

УДК 539.376

## КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. А. Банщикова, А. Ю. Ларичкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mails: binna@ngs.ru, larichking@gmail.com

В результате экспериментов на растяжение и сжатие сплошных круглых образцов, вырезанных из плиты толщиной 60 мм из сплава Ti–Al–Sn–V, при температуре, равной 700 °С, установлено, что сплав обладает небольшой анизотропией и разносопротивляемостью растяжению и сжатию при ползучести. Для каждой серии экспериментов и каждого направления в плите получены параметры аппроксимации степенного закона ползучести. С использованием двух моделей, основанных на “трансформированном” пространстве напряжений, проведено моделирование кручения сплошных круглых образцов. В моделях учитывается разносопротивляемость растяжению и сжатию при ползучести. Проведена серия экспериментов на кручение сплошных круглых стержней, вырезанных в направлении нормали плиты. Показано, что результаты расчета и эксперимента удовлетворительно согласуются.

Ключевые слова: эксперимент, ползучесть, разносопротивляемость растяжению и сжатию, анизотропия, кручение стержней, титановый сплав.

DOI: 10.15372/PMTF20180612

**Введение.** Как правило, при больших значениях температуры конструкционные материалы обладают свойствами анизотропии и разносопротивляемости растяжению и сжатию. В настоящее время активно развиваются способы медленной обработки металлов давлением в условиях ползучести и условиях, близких к сверхпластичности [1–6].

Существует ряд моделей, описывающих материалы с разносопротивляемостью растяжению и сжатию в условиях ползучести, однако их сравнительный анализ не проводился. Следует отметить модели, в которых для описания процессов деформирования используются степенные функции с одинаковыми [7–12] и различными [13–17] показателями при растяжении и сжатии как для изотропного материала [5–11], так и для анизотропного [12, 16, 17]. В случае ортотропного материала для определения констант ползучести требуется провести эксперименты на растяжение и сжатие при различных значениях напряжения для трех главных осей ортотропии и трех направлений вдоль осей системы координат, полученной путем поворота исходной системы координат на угол, равный 45° [4]. При построении моделей, исследуемых в работах [9–12], для учета свойств материала при сдвиге проводились эксперименты на кручение. Существенное отличие свойств при сдвиге от свойств при растяжении и сжатии может быть обусловлено анизотропией материала

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00713-а).

© Банщикова И. А., Ларичкин А. Ю., 2018

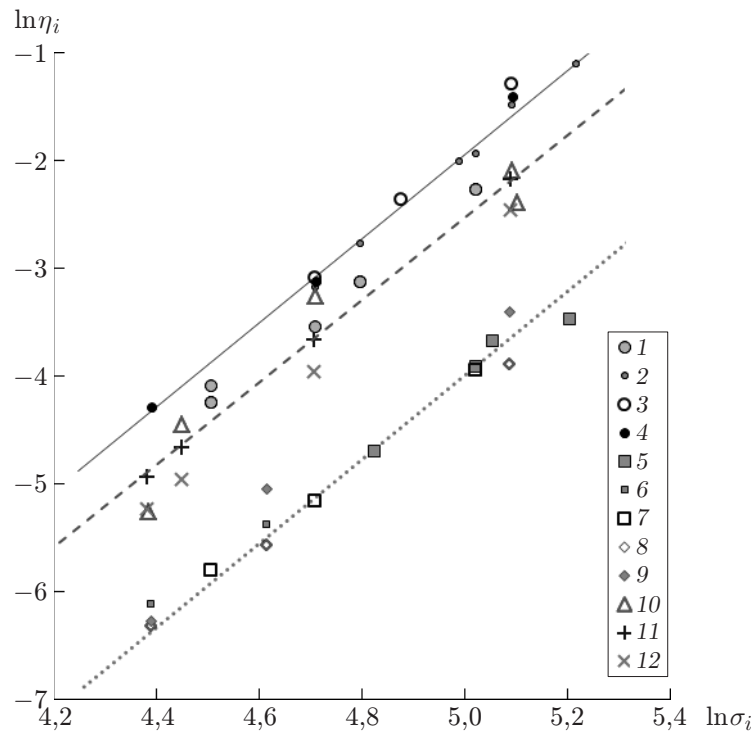


Рис. 1. Зависимость интенсивности скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии от интенсивности напряжений в двойных логарифмических координатах:

1–4 — растяжение (1 — вдоль направления проката плиты, 2 — поперек направления проката, 3 — по нормали к плите, 4 — под углом к нормали плиты  $45^\circ$ ), 5–9 — сжатие (5 — вдоль направления проката плиты, 6 — поперек направления проката, 7 — по нормали к плите, 8 — под углом к нормали плиты  $45^\circ$  вдоль направления проката, 9 — под углом к нормали плиты  $45^\circ$  поперек направления проката), 10 — кручение образцов, вырезанных по нормали к плите, 11 — аппроксимация с использованием модели 1, 12 — аппроксимация с использованием модели 2; линии — аппроксимации с осредненными значениями параметров  $B$ ,  $n$  (сплошная линия — растяжение, пунктирная — сжатие, штриховая — кручение)

[18, 19], вследствие чего указанные модели не всегда корректно описывают напряженно-деформированное состояние.

В данной работе проводится моделирование кручения сплошных круглых образцов с помощью двух моделей, в которых используется “трансформированное” пространство напряжений и учитывается разносопротивляемость материала растяжению и сжатию при ползучести [7, 13, 14]. Проведена серия экспериментов на кручение сплошных круглых стержней, вырезанных в направлении нормали плиты. Для описания напряженно-деформированного состояния используется понятие характеристической точки [20].

**1. Эксперименты на растяжение, сжатие и кручение сплошных круглых образцов.** Проведены эксперименты на растяжение, сжатие и кручение при температуре  $T = 700^\circ\text{C}$  сплошных круглых образцов из сплава Ti–Al–Sn–V (аналог сплава марки ВТ5-1), вырезанных из плиты толщиной 60 мм. Эксперименты на растяжение и сжатие образцов, вырезанных в различных направлениях относительно направления проката, показали, что сплав обладает незначительной анизотропией и разносопротивляемостью растяжению и сжатию при ползучести.

Таблица 1

Значения параметров модели установившейся ползучести для образцов из сплава Ti–Al–Sn–V, вырезанных из плиты толщиной 60 мм в различных направлениях относительно направления проката

Тип нагружения	Направление анизотропии относительно направления проката плиты	$B \cdot 10^{10}$ , МПа <sup>-n</sup> /ч	$n$	$B_* \cdot 10^{10}$ , МПа <sup>-n</sup> /ч
Растяжение	По нормали	5,617	4,73	0,098
Растяжение	Поперек	3,803	4,76	0,072
Растяжение	Под углом к нормали 45°	5,617	4,12	1,921
Растяжение	Вдоль	3,052	3,83	7,227
Сжатие	Под углом к нормали 45° поперек направления проката	0,510	3,51	3,647
Сжатие	Под углом к нормали 45° вдоль направления проката	0,510	3,87	1,004
Сжатие	Вдоль	0,633	3,34	10,150
Сжатие	Поперек	0,633	3,50	17,490
Сжатие	По нормали	0,633	3,65	2,162

Примечание.  $B$  — коэффициент в зависимости  $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$  при среднем значении  $n$ ;  $B_*$  — коэффициент в зависимости  $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$  при значениях  $n$ , соответствующих различным направлениям, в которых вырезались образцы.

На рис. 1 представлена зависимость логарифма интенсивности скоростей деформаций ползучести от логарифма интенсивности напряжений  $\ln \eta_i - \ln \sigma_i$ . Заметим, что при кручении интенсивность скоростей деформаций ползучести вычисляется по углу закручивания, определенному в эксперименте, при этом деформации растяжения вдоль оси стержня и деформации сжатия вдоль радиуса поперечного сечения полагаются малыми и не учитываются.

С использованием результатов каждой серии экспериментов на растяжение и сжатие образцов, вырезанных из плиты в различных направлениях, получены параметры зависимости  $\dot{\epsilon} = \eta = B\sigma^n$  на установившейся стадии ползучести (табл. 1). Показатель ползучести при растяжении и сжатии образцов, вырезанных в различных направлениях, был осреднен и принят равным  $n = 3,92$ , с использованием метода наименьших квадратов найдены значения  $B$  для каждого направления. Анализ результатов испытаний, представленных на рис. 1 и в табл. 1, позволяет сделать вывод, что влияние анизотропии материала на скорость установившейся ползучести сплава Ti–Al–Sn–V при  $T = 700$  °С менее значительно, чем влияние разнсопротивляемости растяжению и сжатию, поэтому значения параметра  $B$  для образцов, вырезанных из плиты в различных направлениях, также осреднены и составили  $B_1 = 4,523 \cdot 10^{-10}$  МПа<sup>-n</sup>/ч в случае растяжения и  $B_2 = 5,836 \cdot 10^{-11}$  МПа<sup>-n</sup>/ч в случае сжатия.

**2. Моделирование кручения стержня с учетом разнсопротивляемости при растяжении и сжатии.** Рассматривается кручение постоянным моментом сплошного стержня с круглым поперечным сечением. В цилиндрической системе координат, ось  $z$  которой совпадает с осью стержня, ось  $r$  направлена вдоль радиуса поперечного сечения стержня, а ось  $\varphi$  совпадает с тангенциальным направлением к радиусу, напряжения равны

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = \tau. \quad (1)$$

В системе координат, оси которой совпадают с направлением главных напряжений, одно

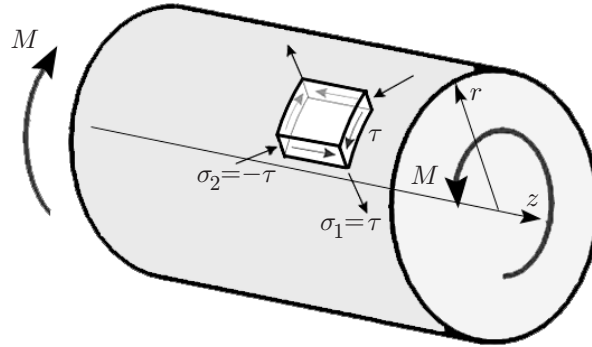


Рис. 2. Схема кручения стержня

напряжение является растягивающим, а другое — сжимающим:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau. \quad (2)$$

Вектор направляющих косинусов между направлениями  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и главным направлением 1 имеет вид  $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , направлением 2 —  $(1, 0, 0)$ , направлением 3 —  $(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ .

На рис. 2 приведена схема кручения круглого стержня постоянным моментом и указаны направления главных напряжений в элементарном объеме материала. Поскольку при кручении стержня главные напряжения имеют разные знаки, для описания деформирования необходимо использовать модели, учитывающие разносопротивляемость растяжению и сжатию. Рассмотрим две модели такого материала, построенные с использованием “трансформированного” пространства напряжений.

2.1. *Модель 1.* Согласно модели 1 компоненты скоростей деформаций ползучести в главных осях имеют вид [16]

$$\eta_j = \frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{2} S^{(n-1)/2} \frac{\partial S_*}{\partial \sigma_{*j}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Здесь

$$S = ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/6, \quad S_* = ((\sigma_{*1} - \sigma_{*2})^2 + (\sigma_{*2} - \sigma_{*3})^2 + (\sigma_{*3} - \sigma_{*1})^2)/6,$$

константа  $n$  в модели 1 не зависит от вида напряженного состояния.

Интенсивность напряжений  $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}_{kl}/2)^{0,5}$ , где  $\bar{\sigma}_{kl}$  ( $k = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3$ ) — компоненты девиатора напряжений, связана с  $S$  выражением  $\sigma_i = \sqrt{3S}$ . Для описания среды с различными свойствами при растяжении и сжатии рассматриваются обобщенные “трансформированные” компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{*j} = \begin{cases} B_1\sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ B_2\sigma_j, & \sigma_j < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $B_1, B_2$  — константы материала при растяжении и сжатии соответственно.

Для области, в которой  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$ , из (3) получаем

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_1}{2} S^{(n-1)/2} \left( \bar{\sigma}_1 + \frac{1-\nu_1}{3} \sigma_3 \right), & \eta_2 &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_1}{2} S^{(n-1)/2} \left( \bar{\sigma}_2 + \frac{1-\nu_1}{3} \sigma_3 \right), \\ \eta_3 &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_1}{2} S^{(n-1)/2} \left( \bar{\sigma}_3 - \frac{2(1-\nu_1)}{3} \sigma_3 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\nu_1 = B_2/B_1$ ;  $\bar{\sigma}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — компоненты девиатора напряжений в главных осях. С учетом (2) компоненты (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\sqrt{3})^{n+1} B_1 (2 + \nu_1) \tau^n / 6, & \eta_2 &= (\sqrt{3})^{n+1} B_1 (\nu_1 - 1) \tau^n / 6, \\ \eta_3 &= -(\sqrt{3})^{n+1} B_1 (2\nu_1 + 1) \tau^n / 6. \end{aligned} \quad (5)$$

На основе формул преобразования компонент тензоров напряжений и деформаций при переходе от одной ортогональной системы координат к другой компоненты скорости деформаций ползучести в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned}\eta_r &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_1}{2} S^{(n-1)/2} \left( \bar{\sigma}_r + \frac{1-\nu_1}{3} (1-3n_1^2)\sigma_3 \right), \\ \eta_{r\varphi} &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_1}{2} S^{(n-1)/2} (\tau_{r\varphi} + (1-\nu_1)n_1n_2\sigma_3),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}S &= ((\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{rz}^2))/6, \\ \sigma_3 &= n_1^2\sigma_r + n_2^2\sigma_\varphi + n_3^2\sigma_z + 2n_1n_2\tau_{r\varphi} + 2n_2n_3\tau_{\varphi z} + 2n_3n_1\tau_{rz},\end{aligned}$$

$n_1, n_2, n_3$  — компоненты вектора направляющих косинусов между осями  $r, \varphi, z$  и главным направлением 3. Невыписанные соотношения (6) можно получить путем круговой перестановки  $r, \varphi, z$  и направляющих косинусов  $n_1, n_2, n_3$ . Величины  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_z$  — компоненты девиатора напряжений в цилиндрической системе координат.

С учетом (1) зависимости (6) записываются в виде

$$\eta_r = -(\sqrt{3})^{n+1} B_1 \frac{1-\nu_1}{6} \tau^n, \quad \eta_\varphi = \eta_z = (\sqrt{3})^{n+1} B_1 \frac{1-\nu_1}{12} \tau^n; \quad (7)$$

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{2} \xi_{r\varphi} = 0, \quad \eta_{rz} = \frac{1}{2} \xi_{rz} = 0, \quad \eta_{\varphi z} = \frac{1}{2} \xi_{\varphi z} = (\sqrt{3})^{n+1} B_1 \frac{1+\nu_1}{4} \tau^n. \quad (8)$$

Из (7) следует, что разнсопротивляемость материала при кручении стержня приводит к возникновению деформаций растяжения вдоль его оси и деформаций сжатия вдоль радиуса его поперечного сечения.

В цилиндрической системе координат выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести  $\eta_i = (2\bar{\eta}_{kl}\bar{\eta}_{kl}/3)^{0,5}$ , где  $\bar{\eta}_{kl}$  — компоненты девиатора скоростей деформаций ползучести, имеет вид

$$\eta_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( (\eta_r - \eta_\varphi)^2 + (\eta_\varphi - \eta_z)^2 + (\eta_z - \eta_r)^2 + \frac{3}{2} (\xi_{r\varphi}^2 + \xi_{\varphi z}^2 + \xi_{rz}^2) \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Из (7)–(9) следует

$$\eta_i = (\sqrt{3})^n B_1 \tau^n \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_1 + 1)}/3. \quad (10)$$

Полагая, что несдвиговые компоненты скоростей деформаций ползучести (7) малы, из (8), (9) получаем

$$\eta_i^* = (\sqrt{3})^n B_1 \tau^n (1 + \nu_1)/2. \quad (11)$$

Вклад несдвиговых компонент в процесс деформирования можно оценить, используя отношение

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^*} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_1 + 1}}{1 + \nu_1}. \quad (12)$$

2.2. *Модель 2.* В работах [13, 14] рассмотрена модель, построенная с использованием “трансформированного” пространства напряжений и учитывающая разнсопротивляемость материала (в том числе упрочняющегося) растяжению и сжатию, при этом степенные показатели в случаях растяжения и сжатия различны.

При описании процесса ползучести изотропных материалов с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии предполагается, что между интенсивностью скоростей деформаций ползучести и интенсивностью напряжений существует связь  $\eta_i = f(\sigma_i)\sigma_i$ . Обобщая это соотношение на случай сложного напряженного состояния, в главных осях имеем

$$\eta_i = f_1(\sigma_i)\sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_1\bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j > 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad (13)$$

$$\eta_i = f_2(\sigma_i)\sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_2\bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j \leq 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где величины  $\lambda_1, \lambda_2$  выражаются через  $f_1, f_2$ .

В пространстве главных напряжений поверхность  $\eta_i = \text{const}$  состоит из двух областей в виде соосных цилиндров. Один цилиндр находится в области, где все главные напряжения положительны, другой — в области, где все главные напряжения отрицательны. Для переходной области, в которой главные напряжения имеют разные знаки, вводится “трансформированное” пространство напряжений

$$\Sigma_j^1 = \begin{cases} \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \mu_1\sigma_j, & \sigma_j \leq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где  $\mu_1 > 0$  — некоторая функция главных напряжений, выбираемая таким образом, чтобы в “трансформированном” пространстве поверхности  $\eta_i = \text{const}$  перешли в соосные цилиндры одинакового радиуса. В этом пространстве полагается справедливой теория течения типа течения Мизеса. Таким образом, из (15) для любой области получаем

$$\eta_i = f_1(\Sigma_i^1)\Sigma_i^1, \quad \eta_j = \lambda_1\bar{\Sigma}_j^1, \quad j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$\Sigma_i^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\Sigma_1^1 - \Sigma_2^1)^2 + (\Sigma_2^1 - \Sigma_3^1)^2 + (\Sigma_3^1 - \Sigma_1^1)^2},$$

где  $\Sigma_i^1$  — интенсивность “трансформированных” напряжений;  $\bar{\Sigma}_j^1 = \Sigma_j^1 - (\Sigma_1^1 + \Sigma_2^1 + \Sigma_3^1)/3$  — компоненты девиатора “трансформированных” напряжений.

В случае всестороннего сжатия при  $\sigma_j \leq 0$  выполняется соотношение (14), а из (16) следует  $\eta_i = f_1(\mu_1\sigma_i)\mu_1\sigma_i$ . Приравнявая эти выражения, находим

$$f_2(\sigma_i) = f_1(\mu_1\sigma_i)\mu_1, \quad (17)$$

откуда следует  $\mu_1 = \mu_1(\sigma_i)$ . Будем считать, что такая зависимость справедлива при любой комбинации знаков главных напряжений.

Соотношения, аналогичные (16), (17), можно получить, используя параметры материала при сжатии, т. е. трансформируя пространство главных напряжений таким образом, чтобы поверхность  $\eta_i = \text{const}$  имела радиус, соответствующий величине радиуса цилиндра в области, где все главные напряжения отрицательны:

$$\eta_i = f_1(\Sigma_i^2)\Sigma_i^2, \quad \eta_j = \lambda_2\bar{\Sigma}_j^2, \quad \Sigma_j^2 = \begin{cases} \mu_2\sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \sigma_j, & \sigma_j \leq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3; \quad (18)$$

$$f_1(\sigma_i) = f_2(\mu_2\sigma_i)\mu_2. \quad (19)$$

Здесь  $\Sigma_i^2$  — интенсивность “трансформированных” напряжений;  $\bar{\Sigma}_j^2$  — компоненты девиатора “трансформированных” напряжений.

Переходя от пространств  $\Sigma_j^1, \Sigma_j^2$  к пространству главных напряжений  $\sigma_j$ , имеем две поверхности с одной и той же интенсивностью напряжений, соответствующие соотношениям (16), (18). Эти поверхности совпадают только в областях, где главные напряжения имеют один и тот же знак. Условия эквивалентности (16), (18) в переходных областях имеют вид

$$\mu_1\mu_2 = 1, \quad \Sigma_j^1 = \mu_1\Sigma_j^2, \quad \Sigma_j^2 = \mu_2\Sigma_j^1, \quad \Sigma_i^1 = \mu_1\Sigma_i^2, \quad \Sigma_i^2 = \mu_2\Sigma_i^1.$$

В результате равенства (17), (19) для определения  $\mu_1, \mu_2$  записываются в виде

$$\mu_1 f_1(\Sigma_i^1) = f_2(\Sigma_i^1/\mu_1), \quad \mu_2 f_2(\Sigma_i^2) = f_1(\Sigma_i^2/\mu_2). \quad (20)$$

В случае описания ползучести степенными зависимостями (13), (14), где  $f_1(\sigma_i) = B_1 \sigma_i^{n_1-1}$ ;  $f_2(\sigma_i) = B_2 \sigma_i^{n_2-1}$ ;  $B_1, n_1$  и  $B_2, n_2$  — константы материала при растяжении и сжатии соответственно, из (20) определяются величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$\mu_1 = (B_2/B_1)^{1/n_2} (\Sigma_i^1)^{(n_2-n_1)/n_2}, \quad \mu_2 = (B_1/B_2)^{1/n_1} (\Sigma_i^2)^{(n_1-n_2)/n_1}. \quad (21)$$

При  $n_1 = n_2 = n$  выражения (21) упрощаются:  $\mu_1 = (B_2/B_1)^{1/n}$ ,  $\mu_2 = (B_1/B_2)^{1/n}$ .

В случае кручения круглого стержня с учетом (2), (16) для компонент скоростей деформаций ползучести аналогично (5) имеем

$$\eta_1 = \frac{B_1}{2} \Sigma_i^{n-1} (2 + \mu_1) \tau, \quad \eta_2 = \frac{B_1}{2} \Sigma_i^{n-1} (\mu_1 - 1) \tau, \quad \eta_3 = -\frac{B_1}{2} \Sigma_i^{n-1} (1 + 2\mu_1) \tau; \quad (22)$$

$$\Sigma_i = \Sigma_i^1 = \tau \sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}. \quad (23)$$

Используя формулы преобразования при переходе от системы координат, направления осей которой совпадают с направлениями главных осей, к цилиндрической системе  $(r, \varphi, z)$ , для компонент тензора скоростей деформаций ползучести получаем

$$\eta_r = B_1 \Sigma_i^{n_1-1} \frac{\mu_1 - 1}{2} \tau, \quad \eta_\varphi = \eta_z = B_1 \Sigma_i^{n_1-1} \frac{1 - \mu_1}{4} \tau; \quad (24)$$

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{2} \xi_{r\varphi} = 0, \quad \eta_{rz} = \frac{1}{2} \xi_{rz} = 0, \quad \eta_{\varphi z} = \frac{1}{2} \xi_{\varphi z} = B_1 \Sigma_i^{n_1-1} \frac{3(\mu_1 + 1)}{4} \tau, \quad (25)$$

откуда в соответствии с (9) находим

$$\eta_i = B_1 \tau^n (\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1})^n. \quad (26)$$

Полагая, что скорости деформаций ползучести (24) малы, и учитывая (9), (25), имеем

$$\eta_i^* = B_1 \tau^n \sqrt{3} (\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1})^{n-1} (1 + \mu_1) / 2. \quad (27)$$

Аналогично (12) для модели 2 получаем

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^*} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}}{1 + \mu_1}. \quad (28)$$

Отношения (12), (28) можно записать в общем виде

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^*} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\nu^2 + \nu + 1}}{1 + \nu}, \quad (29)$$

где  $\nu = \nu_1 = B_2/B_1$  для модели 1 и  $\nu = \mu_1 = (B_2/B_1)^{1/n}$  для модели 2.

**2.3. Использование характеристических параметров в случае кручения сплошного круглого стержня.** В случае кручения постоянным моментом  $M$  круглого стержня радиусом  $R$  распределение  $\sigma_i$  вдоль направления  $r$  изменяется со временем. В работе [20] утверждается, что на радиусе внутри стержня существует малая окрестность точки  $\tilde{r}$ , в которой значение  $\sigma_i$  не изменяется со временем и равно значению напряжения в этой точке в момент нагружения. Данная точка на радиусе называется характеристической, совокупность таких точек внутри стержня образует цилиндрическую поверхность.

При кручении сплошных круглых стержней постоянным моментом имеем

$$\xi_{\varphi z} = r\theta, \quad M = 2\pi \int_0^R \tau_{\varphi z} r^2 dr, \quad (30)$$

где  $0 \leq r \leq R$ ;  $R$  — радиус поперечного сечения стержня;  $\theta$  — скорость погонного угла закручивания. С учетом (8) или (25) в случае установившейся ползучести из (30) получаем

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau = \sqrt{3} M r^{1/n} / J_n, \quad (31)$$

где  $J_n$  — обобщенный полярный момент инерции поперечного сечения:

$$J_n = 2\pi \int_0^R r^{2+1/n} dr.$$

Для того чтобы определить координату характеристической точки, приравняем интенсивности напряжений (31) при упругом нагружении ( $n = 1$ ) и в состоянии установившейся ползучести:

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{3} M \tilde{r}^{1/n} / J_n = \sqrt{3} M \tilde{r} / J_1. \quad (32)$$

Здесь символ “ $\sim$ ” соответствует величинам в характеристической точке. Из (32) следует  $\tilde{r} = (J_1/J_n)^{n/(n-1)}$ . При построении диаграмм на кручение можно использовать координату характеристической точки, которая находится в области пересечения диаграмм упругого и идеально пластического деформирования ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$\tilde{r} = 3R/4, \quad \tilde{\sigma}_i = \sqrt{3} 3M / (2\pi R^3). \quad (33)$$

В случае изотропного материала с одними и теми же свойствами при растяжении и сжатии ( $B_1 = B_2 = B$ ) интенсивность скоростей деформаций ползучести в характеристической точке определяется по формуле

$$\tilde{\eta}_i = \tilde{\xi}_{\varphi z} / \sqrt{3} = \sqrt{3} R\theta / 4, \quad (34)$$

причем  $\tilde{\eta}_i = B \tilde{\sigma}_i^n$ .

В случае материала с различными свойствами при растяжении и сжатии интенсивность скоростей деформаций ползучести в характеристической точке для модели 1 определяется с учетом (10):

$$\tilde{\eta}_i = B_1 \tilde{\sigma}_i^n \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_1 + 1)/3}, \quad (35)$$

для модели 2 — с учетом (26):

$$\tilde{\eta}_i = B_1 \tilde{\sigma}_i^n \left( \sqrt{(\mu_1^2 + \mu_1 + 1)/3} \right)^n. \quad (36)$$

Пренебрегая вкладом компонент  $\eta_r$ ,  $\eta_\varphi$ ,  $\eta_z$  в интенсивность скоростей деформаций ползучести, с учетом (12), (27) соответственно получаем выражения для интенсивности скоростей деформаций в характеристической точке

$$\tilde{\eta}_i^* = B_1 \tilde{\sigma}_i^n (1 + \nu_1) / 2; \quad (37)$$

$$\tilde{\eta}_i^* = B_1 \tilde{\sigma}_i^n \left( \sqrt{(\mu_1^2 + \mu_1 + 1)/3} \right)^{n-1} (1 + \mu_1) / 2. \quad (38)$$

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Для проверки моделей 1 и 2, учитывающих разносопротивляемость материала растяжению и сжатию при ползучести, проведена серия экспериментов на кручение постоянным моментом при температуре





Рис. 3. Образец из сплава Ti–Al–Sn–V, вырезанный в направлении нормали из плиты толщиной 60 мм, после кручения постоянным моментом при температуре  $T = 700$  °С

Таблица 2

Результаты испытаний на кручение образцов, вырезанных по нормали к плите, при  $T = 700$  °С

Номер эксперимента	$M$ , Н·м	$\tilde{\sigma}_i$ , МПа	$t_*$ , ч	$\alpha_*$ , рад	$L$ , мм	$R$ , мм
1	168,0	162,6	0,75	0,60	28,85	9,49
2	166,9	161,0	1,07	0,91	27,93	9,50
3	113,9	110,2	6,32	0,20	26,17	9,49
4	86,7	85,0	18,85	1,75	27,93	9,45
5	82,7	79,6	21,58	3,15	29,11	9,51

$T = 700$  °С сплошных круглых стержней из сплава Ti–Al–Sn–V, вырезанных из плиты толщиной 60 мм.

На рис. 3 показан вырезанный по нормали к плите образец после кручения. Следует отметить, что на поверхностях всех исследованных образцов, вырезанных по нормали к плите, имеются полосы, ортогональные оси образца. По-видимому, это обусловлено слоистостью структуры плиты, возникающей в процессе ее проката.

В табл. 2 для каждого образца приведены значения интенсивности напряжений в характеристической точке  $\tilde{\sigma}_i$  и приложенного крутящего момента  $M$ , длина  $L$  и радиус  $R$  рабочей части, длительность эксперимента  $t_*$ , угол закручивания в момент завершения испытания  $\alpha_*$ . В целом для исследуемого сплава Ti–Al–Sn–V после стадии установившейся ползучести наблюдается стадия разупрочнения материала. На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости угла закручивания от времени  $\alpha = \theta Lt$  на стадии установившейся ползучести материала. Номера кривых соответствуют номерам экспериментов в табл. 2.

На рис. 1 точками 11, 12 показаны зависимости  $\ln \tilde{\sigma}_i - \ln \tilde{\eta}_i^*$ , вычисленные по формулам (37), (38) соответственно. Вклад несдвиговых компонент (растяжения в направлении оси образца и сжатия в поперечном направлении) можно оценить по формуле (29). С учетом полученных осредненных констант ползучести при растяжении и сжатии образцов из сплава Ti–Al–Sn–V и отношения  $B_1/B_2 = 7,75$  для модели 1 этот вклад составляет 9,5 %, для модели 2 — 1,1 %. Из выражения (29) следует, что при  $B_2 < B_1$  с увеличением показателя степени ( $n \rightarrow \infty$ ) для модели 2  $\eta_i/\eta_i^* \rightarrow 1$ . Для модели 1 отношение  $\eta_i/\eta_i^*$  не зависит от  $n$ . Соответственно для модели 2 зависимости  $\ln \tilde{\sigma}_i - \ln \tilde{\eta}_i$  и  $\ln \tilde{\sigma}_i - \ln \tilde{\eta}_i^*$ , рассчитанные по формулам (36), (38), различаются незначительно. При расчете по формулам (35), (37) для модели 1 указанные зависимости различаются более существенно.

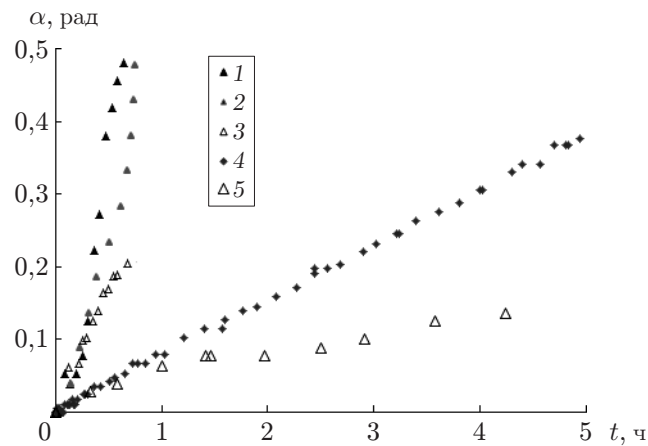


Рис. 4. Зависимость угла закручивания от времени для образцов из сплава Ti-Al-Sn-V при  $T = 700$  °C:

1–5 — номера экспериментов (см. табл. 2)

Для получения оценки компоненты деформации в направлении оси  $z$  с учетом (31), (23) запишем (7), (24) в виде

$$\eta_z = (\sqrt{3})^{n+1} B_1 \frac{1 - \nu_1}{12} \left( \frac{M_z}{J_n} \right)^n r; \quad (39)$$

$$\eta_z = B_1 (\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1})^{n_1-1} \frac{1 - \mu_1}{4} \left( \frac{M_z}{J_n} \right)^n r. \quad (40)$$

При  $M_z = 166,9$  Н·м,  $t = 1$  ч деформация  $\varepsilon_z^c = \eta_z t$  в характеристической точке и на контуре поперечного сечения, вычисленная по формуле (39), составляет 2,6 и 3,5 % соответственно, деформация, рассчитанная по формуле (40), — 0,7 и 0,9 % соответственно.

Следует отметить, что модель 1 более точно описывает результаты экспериментов на кручение, представленные на рис. 1, однако измерение длины образцов после испытаний показало, что их удлинение является незначительным и более точно определяется с использованием модели 2. Для того чтобы устранить это несоответствие, при описании процесса кручения необходимо использовать модели, учитывающие неоднородность материала, а именно модели, в которых степенные зависимости интенсивности скоростей деформаций от интенсивности напряжений имеют разные показатели степени при растяжении и сжатии. В целом для образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, соответствие между экспериментальными данными и результатами расчетов по моделям 1 и 2 является удовлетворительным.

На рис. 5 представлен закрученный постоянным моментом образец, вырезанный вдоль направления проката плиты. Наличие на поверхности винтовых полос свидетельствует о слоистости структуры плиты, возникающей при ее прокате. Такой характер полос, появляющихся при кручении, наблюдался для всех образцов, вырезанных вдоль или поперек направления проката плиты.

Скорость ползучести, полученная в эксперименте при кручении образцов, вырезанных вдоль и поперек направлений проката плиты, сопоставима со скоростью деформирования при растяжении.

**Заключение.** В результате испытаний на растяжение и сжатие сплошных круглых образцов, вырезанных из плиты толщиной 60 мм из сплава Ti-Al-Sn-V, при температуре  $T = 700$  °C установлено, что скорость деформирования при растяжении отличается от



Рис. 5. Образец из сплава Ti–Al–Sn–V, вырезанный в продольном направлении из плиты толщиной 60 мм, после кручения постоянным моментом при температуре  $T = 700\text{ }^{\circ}\text{C}$

скорости деформирования при сжатии в условиях ползучести почти на порядок (в 7,75 раза). Исследуемый сплав обладает небольшой анизотропией по различным направлениям относительно направления проката плиты, скорость деформации ползучести различается не более чем в два раза. С использованием двух моделей, основанных на “трансформированном” пространстве напряжений и учитывающих разность сопротивляемости растяжению и сжатию при ползучести, проведено моделирование кручения сплошных круглых образцов.

Для описания поведения закручиваемого стержня развит подход с использованием характеристической точки (малой области), в которой значения напряжений не меняются в течение всего процесса деформирования.

Результаты расчетов по моделям удовлетворительно согласуются с данными испытаний на кручение сплошных круглых стержней, вырезанных в направлении нормали плиты. Выполнена оценка деформаций растяжения вдоль оси стержня при кручении. Показано, что учет разности сопротивляемости материала при ползучести приводит к удлинению образца при кручении.

На диаграмме интенсивности скоростей деформаций ползучести — напряжение в двойных логарифмических координатах экспериментальные точки и расчетные линии, соответствующие кручению, расположены между точками и линиями, которые соответствуют растяжению и сжатию, что указывает на необходимость учета свойств разности сопротивляемости при оценке скорости деформации в случае сложного нагружения.

Отмечено появление полос на поверхности образцов после закручивания. На боковой поверхности образца, вырезанного по нормали к плите, имеются кольцевые полосы, ортогональные его оси. В случае образцов, вырезанных вдоль или поперек направления проката плиты, на поверхности образца видны винтовые полосы. Появление различных семейств полос на образцах зависит от направления, в котором вырезан образец относительно направления проката плиты. Такая связь косвенно свидетельствует о слоистой структуре плиты, возникающей при ее прокате. Слоистость структуры исследованного сплава оказывает существенное влияние на скорость ползучести.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Raevskaya G. A., Zakharchenko K., Larichkin A. Determination of optimum parameters of the technological process for plates forming from V95 and V-1461 alloys in creep applied in aircrafts constructed by “Sukhoi design bureau” // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 894. 012078.
2. Lam A. C. L., Shi Zh., Yang H., et al. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: Experimental and finite element studies // *J. Materials Process. Technol.* 2015. V. 219. P. 155–163.
3. Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю. Об одном классе обратных задач формоизменения вязкоупругих пластин // *ПМТФ.* 1996. Т. 37, № 6. С. 122–131.

4. Банщикова И. А., Блинов В. А. Экспериментально-теоретический анализ деформирования трансверсально-изотропных пластин при ползучести // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 129–138.
5. Ларичкин А. Ю., Захарченко К. В., Горев Б. В., Капустин В. И. Физическое моделирование технологического процесса формообразования элементов конструкций из алюминиевого сплава В95 в условиях ползучести // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2016. № 1, вып. 70. С. 6–15.
6. Larichkin A., Zakharchenko K., Gorev B., et al. Influence of the creep ageing process on the fatigue properties of components from V95pchT2 (analog 7175T76) and V95ochT2 (analog 7475) aluminium alloys // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894. 012050.
7. Горев Б. В., Никитенко А. Ф. К ползучести материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 6. С. 105–110.
8. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. 1979. № 4. С. 121–128.
9. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности. 1979. № 7. С. 62–67.
10. Горев Б. В., Соснин О. В., Любашевская И. В. К вопросу о ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Тр. 4-й Всерос. конф. с междунар. участием, Самара, 29–31 мая 2007 г. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2007. Ч. 1. С. 77–81.
11. Золочевский А. А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011.
12. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики АН СССР, 1991.
13. Цвелодуб И. Ю. О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1974. Вып. 19/20. С. 147–155.
14. Банщикова И. А., Муравьева А. Е., Цвелодуб И. Ю. Расчет пластин из упрочняющегося материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2014. № 4, вып. 65. С. 68–77.
15. Банщикова И. А., Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю. О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 156–159.
16. Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
17. Цвелодуб И. Ю. К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 98–101.
18. Banshchikova I. A., Petrov D. M., Tsvelodub I. Yu. Torsion of circular rods at anisotropic creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722, N 1. 012004.
19. Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю., Петров Д. М. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
20. Ларичкин А. Ю., Горев Б. В. Построение сдвиговых деформаций ползучести из чистого кручения сплошных круглых валов // Науч.-техн. вед. С.-Петербург. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 4, вып. 177. С. 212–219.

*Поступила в редакцию 16/IV 2018 г.,  
в окончательном варианте — 17/V 2018 г.*