

УДК 519.245

## Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами\*

Т.А. Аверина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090  
E-mail: ata@osmf.ssc.ru

**Аверина Т.А.** Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 2. — С. 97–105.

Построен алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами. Предложенный алгоритм основан на численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений и использует модифицированный метод максимального сечения, когда интенсивность перехода зависит от вектора состояния.

**Ключевые слова:** численные методы, стохастические дифференциальные уравнения, системы со случайной структурой.

**Averina T.A.** A modified algorithm for statistical simulation of multistructural systems with distributed change of structure // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 97–105.

An algorithm for statistical simulation of random-structure systems with distributed transitions has been constructed. The proposed algorithm is based on numerical methods for solving stochastic differential equations, and uses a modified maximum cross-section method when the transition intensity depends on the vector of state.

**Key words:** numerical methods, stochastic differential equations, systems with random structure.

---

## 1. Введение

Радиоизотопные измерительные системы являются примером системы со случайной структурой с распределенными переходами. Среди различных способов применения радиоизотопных измерителей большое место занимают локационные системы, предназначенные для измерения параметров, определяющих пространственное положение объекта таких, как угловые координаты, дальность, углы ориентации. Если в течении времени эти параметры изменяются и система измеряет их с заданной степенью точности, она называется следящей. Радиоизотопные локационные следящие системы используются в космической технике в задачах стыковки сближающихся аппаратов, в робототехнике, при управлении атомными энергетическими установками и в ряде других случаев. Особенности таких систем связана с дискретным характером радиоактивного излучения,

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 11-01-00282, № 12-01-00490).

что приводит к дискретному поступлению информации об измеряемом параметре. Из-за этого локационная система становится непрерывно-дискретной со случайным квантованием, так как последовательность квантов излучения образует случайный поток сигналов. Системы со случайной структурой с распределенными переходами рассмотрены в работах [1, 2]. Характерными особенностями таких систем являются: структурная неопределенность (смена структуры в случайные моменты времени в процессе функционирования) и стохастичность процессов в них.

В работе [3] был построен алгоритм статистического моделирования динамических систем с независимой марковской структурой при распределенных переходах. В работе [4] алгоритм был обобщен для систем с условной марковской структурой при распределенных переходах. В данной работе будет построена менее трудоемкая модификация этого алгоритма, использующая модифицированный метод “максимального сечения” [5–7].

## 2. Системы со случайной структурой

Система со случайной структурой характеризуется вектором состояния  $Y(t)$  и номером структуры  $L(t) = 1, \dots, N_0$ ;  $N_0$  — число детерминированных структур. Номер  $L(t)$  является случайным дискретным скалярным процессом, принимающим целочисленные значения  $1, \dots, N_0$ . Достаточно общая математическая модель динамической непрерывной нелинейной стохастической системы со случайной структурой записывается как задача Коши для стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [1]. Векторное уравнение для фиксированной  $l$ -й структуры имеет вид СДУ в смысле Стратоновича:

$$dY(t) = a^{(l)}(Y, t) dt + \sigma^{(l)}(Y, t) dW(t), \quad t \in [t_0, T], \quad Y(t_0) = Y_0, \quad l = 1, \dots, N_0. \quad (1)$$

Для каждой  $l$ -й структуры вектор состояния системы  $Y(t)$  является непрерывным случайным процессом размерности  $n$ ;  $W(t)$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс;  $a(Y, t)$  —  $n$ -мерная вектор-функция;  $\sigma^{(l)}(Y, t)$  — матричная функция размера  $n \times m$ . Начальное состояние системы задается случайным вектором  $Y_0$ . Случайный дискретный процесс  $L(t)$  может быть произвольным немарковским, марковским или условно марковским, зависящим от вектора  $Y(t)$ . Пусть процесс  $L(t)$  является условно марковским процессом и зависимость от  $Y(t)$  проявляется статистически: моменты перехода из одного состояния в другое случайным образом зависят от изменения фазовых координат. Переходы от одной структуры к другой могут происходить при любых значениях  $Y(t)$ , но с различной вероятностью. Системы, обладающие подобными свойствами, называются системами с распределенными переходами или системами с условной марковской структурой при распределенных переходах [1]. Условные вероятности перехода из  $l$ -й структуры к  $r$ -й для малых временных интервалов выражаются через условные интенсивности переходов и имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{lr}(r, t + \Delta t | l, t, Y) &= \nu_{lr}(Y, t) \Delta t + o(\Delta t), \quad l \neq r; \\ p_{ll}(l, t + \Delta t | l, t, Y) &= 1 - \nu_{ll}(Y, t) \Delta t + o(\Delta t), \quad \nu_{ll}(Y, t) = \sum_{r=1 \neq l}^{N_0} \nu_{lr}(Y, t), \end{aligned}$$

где  $o(\Delta t)$  является малой величиной порядка  $(\Delta t)^2$ ,  $\nu_{lr} \geq 0$ .

Компоненты функций поглощения  $v_{lr}^*$  и восстановления  $u_{lr}^*$  имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{lr}^*(Y, t) &= \nu_{lr}(Y, t) p_1^{*(l)}(Y, t), \quad l, r = 1, \dots, N_0; \quad l \neq r, \\ u_{lr}^*(Y, t) &= p_1^{*(l)}(Y', t) q_{lr}(Y, t | Y', t) dY', \quad v_{ll}^*(Y, t) = u_{ll}^*(Y, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_{lr}(Y, t | Y', t)$  — условная функция плотности вероятности восстановления  $r$ -й реализаций из  $l$ -й (звездочка означает, что речь идет о непоглощенных реализациях, т. е. отсутствует нормировка).

Условная плотность  $f_{\tau_r}(t, \tau)$  распределения временных интервалов  $\tau$  перехода из  $l$ -й структуры в  $r$ -ю имеет вид

$$f_{\tau_r}(t, \tau) = \nu_{lr}(Y, t + \tau) \exp\left(-\int_0^\tau \nu_{lr}(Y, t + t_1) dt_1\right).$$

Обобщенное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для одномерной функции плотности вероятности для каждого  $l$ -го состояния системы с учетом поглощения и восстановления реализаций имеет вид

$$\frac{\partial p_1^{*(l)}(Y, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{*(l)}(Y, t) - \sum_{r=1 \neq l}^{N_0} \nu_{lr}^*(Y, t) + \sum_{r=1 \neq l}^{N_0} u_{rl}^*(Y, t), \quad p_1^{*(l)}(Y_0, t_0) = \psi_0^{(l)}(Y_0),$$

где  $\psi_0^{(l)}$  — функция плотности вероятности распределения фазовых координат  $Y_0$  в начальный момент времени  $t_0$ ,  $\pi^{*(l)}(Y, t)$  — вектор плотности потока вероятности непоглощенных реализаций с компонентами:

$$\pi_k^{*(l)}(Y, t) = \left[ a_k^{(l)}(Y, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^{(l)}} \sum_{j=1}^{m^{(l)}} \frac{\partial \sigma_{kj}^{(l)}}{\partial y_i} \sigma_{ij}^{(l)} \right] p_1^{*(l)}(Y, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n^{(l)}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ B_{kj}^{(l)} p_1^{*(l)}(Y, t) \right],$$

$B^{(l)} = \sigma^{(l)} \sigma^{(l)\top}$ . Дифференциальные уравнения для функции  $P^{(l)}(t)$  — вероятности нахождения системы в  $l$ -й структуре в момент времени  $t$  — имеют вид:

$$\dot{P}^{(l)}(t) = -\sum_{r=1}^{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_{lr}^*(Y, t) dY + \sum_{r=1}^{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} u_{rl}^*(Y, t) dY.$$

Вид функции  $q_{lr}$  в (2) определяется физическим содержанием задачи и характеризует начальные условия при восстановлении процесса в  $r$ -м состоянии при переходе из  $l$ -го состояния. Могут иметь место различные условия восстановления, определяемые функциями  $q_{lr}$ . В частности, если

$$q_{lr}(Y, t | Y', t) = \delta(Y - Y'),$$

то восстановление точное (“жесткое”, “без потерь”), т. е. конечные условия процесса в  $l$ -м состоянии совпадают с начальными в  $r$ -м состоянии. Если условная плотность восстановления

$$q_{lr}(Y, t | Y', t) = \delta(Y - \gamma^{(r)}(t)),$$

то имеют место несвязанные условия восстановления. При восстановлении процесс всегда начинается с заданной функции времени  $\gamma^{(r)}$ . Если условная плотность вероятности не зависит от предыдущего состояния

$$q_{lr}(Y, t | Y', t) = \psi^{(r)}(Y),$$

то имеет место общий случай процесса с несвязанными условиями восстановления.

В общем случае условная плотность вероятности  $q_{lr}(Y, t | Y', t)$  может задавать произвольный закон распределения фазового вектора  $Y(t)$  в состоянии  $r$  при заданном  $Y'(t)$  в состоянии  $l$ .

### 3. Алгоритм статистического моделирования неоднородных пуассоновских процессов

Неоднородный пуассоновский процесс  $\xi(t) = \xi([0, t])$ ,  $t \geq 0$ , можно рассматривать как неоднородный пуассоновский ансамбль в одномерном случае. Поэтому алгоритмы статистического моделирования, предложенные в [6], можно использовать для моделирования неоднородного пуассоновского процесса.

Известно, что плотность вероятности временного интервала между соседними значениями точечного пуассоновского процесса распределена экспоненциально. По этой причине пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda(t)$  обычно моделируют, используя показательное распределение.

**Метод “максимального сечения”** [8] для моделирования неоднородного пуассоновского процесса при условии  $\lambda(t) \leq \lambda_0$ ,  $t \geq 0$ , если  $t_1, \dots, t_{k-1}$  — упорядоченная последовательность точечного пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda(t)$ , то для моделирования  $t_k$  конструируются две последовательности независимых выборочных значений:  $\{\theta_i\}$  с плотностью распределения  $\lambda_0 \exp(-\lambda_0 t)$  и  $\{\alpha_i\}$  — равномерно распределенные в  $(0, 1)$ ;  $\zeta_n = \sum_{i=1}^n \theta_i$ . Пусть

$$N = \min\{n : \alpha_n \leq \lambda(t_{k-1} + \zeta_n)/\lambda_0\}.$$

Тогда  $t_k = t_{k-1} + \zeta_N$  и  $\xi(t_k) = k$ .

Этот алгоритм ранее был строго обоснован для случая постоянной мажоранты в работе [9] и полуэвристически для переменной мажоранты в [10].

В работе [5] была построена модификация метода максимального сечения. В работе [6] построен новый экономичный способ моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин с помощью лишь одного случайного числа, равномерно распределенного в интервале  $(0, 1)$ . Использование этого способа моделирования, а также лемм, доказанных в работе [7], позволило построить еще более экономичную модификацию метода “максимального сечения”.

**Модифицированный метод “максимального сечения”** для моделирования неоднородного пуассоновского процесса при условии  $\lambda(t) \leq \lambda_0(t)$ ,  $t \geq 0$ , если  $t_1, \dots, t_{k-1}$  — упорядоченная последовательность точечного пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda(t)$ , то для моделирования  $t_k$  конструируется последовательность независимых выборочных значений  $\{\theta_i\}$  с плотностью распределения  $\lambda_0 \exp(-\lambda_0 t)$ . Пусть  $\zeta_n = \sum_{i=1}^n \theta_i$  и

$$N = \min \left\{ n : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\lambda(t_{k-1} + \zeta_i)}{\lambda_0(t_{k-1} + \zeta_i)} \right) \right\},$$

где  $\alpha$  — случайное число, равномерно распределенное в  $(0, 1)$ . Тогда  $t_k = t_{k-1} + \zeta_N$  и  $\xi(t_k) = k$ .

Этот метод более эффективен, чем метод “максимального сечения”. Результаты статистического моделирования модифицированным методом “максимального сечения” представлены в [6]. Результаты показывают, что трудоемкость модифицированного метода меньше, чем трудоемкость метода “максимального сечения”.

#### 4. Модифицированный алгоритм численного моделирования для систем с условной марковской структурой при распределенных переходах

Каждая структура описывается системой стохастических дифференциальных уравнений, поэтому численный алгоритм включает в себя численный метод решения СДУ [11], а также моделирование моментов смены структуры и номера новой структуры.

В работе [4] был построен алгоритм статистического моделирования динамических систем с условной марковской структурой при распределенных переходах. Построим менее трудоемкую модификацию этого алгоритма, используя модифицированный метод максимального сечения, предполагая, что для всех интенсивностей, входящих в (2), выполняется

$$\nu_{li}(Y, t) \leq \nu_{li}^m, \quad Y \in R^n, \quad t \in [t_0, T], \quad \nu_{li}^m < \infty.$$

**Модифицированный алгоритм численного моделирования перехода из  $l$ -го состояния** для систем с условной марковской структурой при распределенных переходах:

- 1) пусть в момент  $t_k$  система находилась в  $l$ -м состоянии, и вектор состояния равен  $Y_k$ .
- 2) моделируем вспомогательную случайную величину  $\alpha_1$ , равномерную на интервале  $(0, 1)$ , и заводим счетчик, полагая  $z = 1$ .
- 3) моделируем возможный момент выхода из  $l$ -го состояния:  $t_{k+1} = t_k + \tau$ , где  $\tau$  — случайная величина с плотностью распределения  $p(x) = \nu_l^m \exp(-\nu_l^m x)$ ,  $\nu_l^m = \sum_{i \neq l} \nu_{li}^m$  (по формуле  $\tau = -\ln \alpha / \nu_l^m$ ,  $\alpha$  — равномерная на интервале  $(0, 1)$  случайная величина).
- 4) вычисляем возможный  $r$ -й номер новой структуры, распределенный с вероятностью  $p_r = \frac{\nu_{lr}^m}{\nu_l^m}$ ,  $r \neq l$ ,  $r = 1, \dots, N_0$ .
- 5) на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  численным методом для СДУ [11] решаем уравнения (1) для  $l$ -й структуры, находим  $Y_{k+1}$  — вектор состояния системы в момент времени  $t_{k+1}$  (шаг численного метода должен быть согласован с интенсивностью перехода, например  $h \leq 0.1/\nu_l^m$ ).
- 6) полагаем  $t_k := t_{k+1}$ ,  $Y_k := Y_{k+1}$ .
- 7) полагаем  $z := z * (1 - \nu_{lr}(Y_k, t_k)/\nu_{lr}^m)$ . Проверяем условие смены структуры: если  $1 - \alpha_1 > z$ , то идем на 8), иначе — на 3).
- 8) меняем номер структуры на  $r$ -й; вычисляем  $Y_k$  согласно заданной условной плотности восстановления  $q_{lr}$ .

Следует отметить, что данный алгоритм построен для произвольных систем с условной марковской структурой при распределенных переходах. В более простом, частном случае, когда интенсивности перехода постоянны  $\nu_{lr}(Y, t) = \nu_{lr} = \text{const}$  (такие системы называются системами с независимой марковской структурой при распределенных переходах), в алгоритме будут отсутствовать пункты 2) и 7). Обозначим через  $\tilde{Y}_t$  кусочно-линейный процесс, полученный по значениям  $Y_k$ , а также введем обозначения для функционалов от решения:

$$f(h) := f(\tilde{Y}_t), \quad J(h) := E\tilde{f}(h), \quad J := Ef(Y).$$

Для оценки некоторого функционала  $J$  от решения (1) численным алгоритмом моделируется  $N$  траекторий процесса  $Y(t)$  и величина  $J(h)$  оценивается средним арифметическим полученных выборочных значений  $f(h)$ :

$$J_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(h), \quad \mathbb{E}J_N(h) = J(h).$$

Погрешность оценки  $J_N(h)$  определяется величиной

$$\mathbb{E}|J - J_N(h)| \leq |J - J(h)| + \mathbb{E}|J(h) - J_N(h)| \leq Ch^p + \frac{\sqrt{Vf(h)}}{\sqrt{N}},$$

где  $\mathbb{E}$  — математическое ожидание,  $V$  — дисперсия, а  $p$  — порядок слабой сходимости используемого численного метода решения стохастических дифференциальных уравнений (в пункте 5) алгоритма). Таким образом, для уравнивания статистической и детерминированной погрешностей целесообразно полагать  $N = O(h^{-2p})$ .

Испытание построенного алгоритма проведем на примерах из [2], для которых удалось записать аналитические формулы для математического ожидания решения. В работе [2] в качестве примеров систем со случайным периодом квантования приведены скачкообразные СДУ с пуассоновской случайной мерой, зависящей от вектора состояния (в этом случае в СДУ (1) добавится пуассоновская составляющая, заменяющая условную функцию плотности вероятности восстановления). Чтобы продемонстрировать влияние пуассоновской составляющей на поведение решения СДУ, рассмотрим простейшее уравнение первого порядка

$$dy(t) = \int_{\Gamma} \theta \nu(d\theta \times d\tau), \quad (3)$$

где характеристическая мера  $\Pi$ , задающая пуассоновскую случайную меру  $\nu$ , определяется через неотрицательную функцию  $\pi$  следующим образом:

$$\Pi(B, t, y(t^-)) = \int_B \pi(\theta, t, y(t^-)) d\theta, \quad B \in \Gamma.$$

Обозначим 
$$\mu(t, y) = \int_B \pi(\theta, t, y) d\theta, \quad h(\theta, t, y) = \pi(\theta, t, y)/\mu(t, y) \quad (4)$$

функции, характеризующие пуассоновскую случайную меру  $\nu$ . Пусть эти функции не зависят от  $y$ . Тогда, задавая по-разному функцию  $h(\theta)$ , можно получить скачкообразные процессы с различными размерами скачков. Так, если  $h(\theta) = \delta(\theta - \lambda)$ , то все скачки одинаковы. При  $\lambda > 0$  процесс  $y(t)$  возрастающий, а при  $\lambda < 0$  — убывающий. При

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(\theta - \lambda_i), \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1,$$

где  $\lambda_i$  — некоторые числа, можно получить модель случайного процесса с дискретным числом состояний, но более сложной структуры. Рассмотрим СДУ (3), когда функции (4), характеризующие пуассоновскую меру  $\nu$ , зависят от  $y$ .

**Пример 1.** Рассмотрим СДУ (3) при

$$h(\theta, y) = \begin{cases} \delta(\theta - \lambda) & \text{при } y < 0, \\ \delta(\theta + \lambda) & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

Получаем процесс с двумя возможными состояниями:  $y_0$  и  $y_1 = y_0 + \lambda$ , если  $-\lambda < y_0 < 0$ ;  $y_0$  и  $y_1 = y_0 - \lambda$ , если  $0 < y_0 < \lambda$ .

**Пример 2.** Рассмотрим СДУ (3), когда  $h(\theta, y)$  задана, как в примере 1, но функция  $\mu$  также зависит от  $y$ :

$$\mu(y) = \begin{cases} \alpha & \text{при } y < 0, \\ \beta & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

В этом случае, если  $-\lambda < y_0 < 0$ , получаем процесс  $y(t)$  с двумя возможными состояниями:  $y_0$  и  $y_1 = y_0 + \lambda$ . При  $\alpha < \beta$  в среднем процесс  $y(t)$  будет чаще принимать значение  $y_0$ , а при  $\alpha > \beta$  — значение  $y_1$ . При  $\beta = 0$  процесс  $y(t)$ , приняв значение  $y_1$ , далее не меняется. Точные значения первого  $m(t)$  и второго  $d(t)$  моментов имеют вид:

$$m(t) = y_0 p_1(t) + y_1 p_2(t), \quad d(t) = y_0^2 p_1(t) + y_1^2 p_2(t),$$

где

$$p_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \left( p_1(0) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-(\alpha + \beta)t}, \quad p_2(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} - \left( p_1(0) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

При приближенном вычислении математического ожидания  $E\xi$  случайной величины  $\xi$  с конечной дисперсией  $D\xi = \sigma^2$  по формуле

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$$

при заданном уровне доверия  $(1 - \epsilon)$  имеет место соотношение

$$P\left( |\bar{\xi}_N - E\xi| \leq \gamma(\epsilon) \frac{\sigma}{N} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma(\epsilon)}^{\gamma(\epsilon)} e^{-y^2/2} dy = 1 - \epsilon,$$

где  $\gamma(\epsilon)$  — константа, определяемая выбором величины  $\epsilon$ . При  $\epsilon = 0.003$  имеем  $\gamma(\epsilon) = 3$ , а при  $\epsilon = 0.3$  получаем  $\gamma(\epsilon) = 1$ .

Рассмотренные примеры являются примерами систем со случайным периодом квантования с интенсивностями переходов, зависящими от вектора состояния системы. В уравнении (3), соответствующем уравнению модели (1), отсутствуют коэффициенты сноса и диффузии. Поэтому при численной реализации построенного алгоритма пункт 5) отсутствует, и погрешность численного решения состоит только из статистической составляющей.

Примеры были просчитаны при следующих значениях параметров для примера 1:

- а)  $\lambda = 2, y_0 = 1, \mu = 10$ ;
- б)  $\lambda = 4, y_0 = 3, \mu = 10$ ;

для примера 2:

- а)  $\lambda = 2, y_0 = 1, \alpha = 5, \beta = 10$ ;
- б)  $\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 5, \beta = 10$ ;
- в)  $\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 10$ .

Результаты, полученные модифицированным алгоритмом, приводятся в строках, обозначенных “МА”.

Оба примера были просчитаны предложенным алгоритмом, использующим модифицированный метод максимального сечения. Оценивалось математическое ожидание решения в узлах временной сетки с шагом  $h = 0.1$  на интервале  $[0, T]$ . Моделировалось  $N = 10^6$  траекторий и полагалось  $p_1(0) = 1$ . При численных расчетах использовался “генератор” псевдослучайных чисел RAND [8] с модулем  $2^{40}$  и множителем  $5^{12}$ . Длина периода данного датчика составляет  $2^{38}$ . Данный датчик рекомендуется для численных расчетов, в которых требуется последовательность псевдослучайных чисел не длиннее чем  $2^{37}$ . Расчеты проводились на PC Intel Celeron, 2 ГГц, 768 Мбайт.

В таблице приводятся точные стационарные значения оцениваемых функционалов, их оценки в момент времени  $T = 20$  и время счета. Результаты примера 1 приведены в строках 1а и 1б. Из таблицы видно, что модифицированный алгоритм считает быстрее.

Таблица

Примеры	Параметры	$m$	$\tilde{m}$	$d$	$\tilde{d}$	$t(c)$
1а	$\lambda = 2, y_0 = 1, \mu = 10$	0	0.00118	1	1	80.14
1б	$\lambda = 4, y_0 = 3, \mu = 10$	1	1.00235	5	5.0047	80.73
2а	$\lambda = 2, y_0 = 1, \alpha = 5, \beta = 10$	$-1/3$	$-0.3343$	1	1	99.68
МА	$\lambda = 2, y_0 = 1, \alpha = 5, \beta = 10$	$-1/3$	$-0.3324$	1	1	90.53(<на9%)
2б	$\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 5, \beta = 10$	$1/3$	0.33141	$11/3$	3.6628	97.21
МА	$\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 5, \beta = 10$	$1/3$	0.33512	$11/3$	3.6702	91.17(<на6%)
2в	$\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 10$	$-0.63(63)$	0.63661	1.72(72)	1.7227	101.72
МА	$\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 10$	$-0.63(63)$	0.63604	1.72(72)	1.7228	83.3(<на18%)

Временные графики точных и вычисленных значений первых двух моментов не приводятся ввиду их сильного совпадения.

Основные достоинства построенного алгоритма состоят в следующем:

- 1) использование модифицированного метода “максимального сечения” позволило уменьшить вычислительное время за счет уменьшения числа обращений к “генератору” псевдослучайных чисел;
- 2) кроме уменьшения трудоемкости вычислений, уменьшение количества используемых значений псевдослучайных чисел снизило конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [12];
- 3) статистическое соответствие оценок метода из [4] и модифицированного метода является дополнительным критерием удовлетворительности используемого “генератора” псевдослучайных чисел.

В дальнейшем предполагается решить построенным алгоритмом системы со случайным периодом квантования сигналов во времени из работ [1, 2]. Так как точное решение этих задач неизвестно, то полученное решение будет сравниваться с решением, полученным либо методом линеаризации, либо спектральным методом.

## Литература

1. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. — М.: Наука, 1993.
2. Артемьев В.М., Ивановский А.В. Управление дискретными системами со случайным периодом квантования. — М.: Энергоатомиздат, 1986.

3. **Averina T.A.** Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2001. — Vol. 16, № 6. — P. 467–482.
4. **Averina T.A.** Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure // Monte Carlo Methods and Appl. — 2004. — Vol. 3–4. — P. 221–226.
5. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // ДАН. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
6. **Аверина Т.А.** Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.
7. **Аверина Т.А., Михайлов Г.А.** Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016.
8. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
9. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // Nucl. Sci. and Eng. — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
10. **Михайлов Г.А.** Метод моделирования длины свободного пробега частиц // Атомная энергия. — 1970. — Т. 28, № 2. — С. 175–180.
11. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — 1997. — VSP: Utrecht, The Netherlands.
12. **Соболь И.М.** Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 26 декабря 2011 г.,  
в окончательном варианте 27 января 2012 г.*

