

УДК 532.526

## ГРУППОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЙЛОРА — ГЁРТЛЕРА В СВЕРХЗВУКОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРУЯХ

Н. М. Терехова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: terekh@itam.nsc.ru

В рамках слабонелинейной теории устойчивости проведено численное исследование группового нелинейного взаимодействия возмущений Тейлора — Гёртлера (продольных вихрей) на начальном участке сверхзвуковой осесимметричной струи. Рассмотрен экспериментально наблюдаемый спектр возмущений. Изучены закономерности и особенности продольной динамики различных волновых компонентов для турбулентной струи. Показано, что подобное взаимодействие в режиме связи в групповых резонансных триплетах позволяет описать наблюдаемый экспериментально повышенный рост фоновых компонентов реального спектра.

**Ключевые слова:** неизобарическая сверхзвуковая струя, продольные вихри, трехволновые резонансные взаимодействия.

**Введение.** В настоящей работе проведен теоретический анализ возможности реализации трехволновых взаимодействий возмущений вращательной или центробежной неустойчивости — волн Тейлора — Гёртлера на начальном участке неизобарической струи. Такие волны часто называются продольными вихрями. Этот тип неустойчивости в струях достаточно полно исследован как экспериментально [1–6], так и теоретически [6–12]. При численном моделировании характеристик подобных возмущений установлено, что закономерности продольной динамики большинства азимутальных компонентов реальных амплитудных спектров могут быть объяснены в рамках линейной теории устойчивости. Достаточно полное обоснование применимости вязкого/невязкого приближений продемонстрировано в [12] при анализе экспериментальных данных [2]. Эксперименты [2] в настоящее время представляются наиболее достоверными, и на их основе можно провести верификацию теоретических моделей, объясняющих продольную эволюцию продольных вихрей.

Как выяснено из опыта, реальный сигнал избыточного полного давления, измеренный в разных азимутальных положениях слоя смещения струи, является суперпозицией спектральных волновых компонентов широкого азимутального состава. Среди наблюдаемых мод обнаруживаются фоновые компоненты невысокой интенсивности, в частности, для [2] это мода азимутального числа  $n = 4$ . Для таких компонентов обнаружен повышенный рост интенсивности вниз по потоку со степенью усиления, которая значительно превышает линейную. Этот повышенный рост не может быть объяснен в рамках линейной теории устойчивости. Возникает необходимость выявить природу физических процессов, сопутствующих эволюции таких вихрей вниз по потоку, которые вносят коррективы в теоретические значения волновых инкрементов.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант № НШ 964.2003.1).

Целью работы является изучение нелинейного взаимовлияния наиболее характерных азимутальных мод. Взаимодействие изучается в рамках слабонелинейной теории устойчивости для трехволновых резонансных систем, включающих наиболее представительные азимутальные компоненты волн Тейлора — Гёртлера. Такая модель — наиболее простой способ рассмотрения нелинейности применительно к возмущениям свободного потока. Как показано в [13–15], трехволновые резонансы бегущих крупномасштабных волн из класса неустойчивости Кельвина — Гельмгольца возможны, и они качественно верно отражают процессы заполнения спектра и эволюцию выделенных несущих частот.

В работе рассмотрены триплеты, составленные из 10 (в одном из вариантов — из 11) азимутальных компонентов с волновыми числами  $1 \leq n \leq 10(11)$ , удовлетворяющими условиям фазового синхронизма. Ввиду того что одновременно рассматриваются трехволновые системы для более чем трех компонентов, такие триплеты условно названы нами групповыми, для каждой составляющей реального сигнала они включают целый ряд простых триплетов, и об их числе и составе волн будет сказано ниже. Задача рассмотрена в плоскопараллельном приближении слабонелинейной теории устойчивости сжимаемого невязкого газа.

**Основные уравнения и методы решения.** Основные положения такого приближения подробно изложены в упомянутых выше теоретических работах, поэтому здесь сделаем достаточно краткое введение в постановку задачи. Рассматривается сжатый слой первой ячейки осесимметричной затопленной недорасширенной струи: в поперечном направлении — от внешней границы висячего скачка уплотнения до ближнего околоструйного пространства, в продольном — от среза сопла до диска Маха. При этом положение висячего скачка определяет значения радиусов кривизны  $R_0$  и центробежных сил, пропорциональных  $U^2/R_0$ .

В качестве криволинейных ортогональных координат выбраны радиальная ( $R = R_0 + r$  ( $R_0 \gg r$ )) и угловые — азимутальная ( $\varphi$ ) и продольная ( $\gamma$ ) — переменные. Им соответствуют радиальная, азимутальная и продольная компоненты скорости  $v, w, u$ . Координата  $x$  в продольном направлении вводится как  $dx = R_0 d\gamma$ . В этом направлении протяженность расчетной области выражается через толщину слоя смещения  $\delta$ . Рассмотрен диапазон реальных безразмерных толщин  $0,1 < \delta < 0,65$ . Зависимости  $\delta(x)$  представлены соотношением

$$\delta = \Lambda x + \delta_0, \quad (1)$$

где  $\delta_0$  — начальная толщина при  $x = 0$ , а коэффициент  $\Lambda$  характеризует степень нарастания толщины слоя  $\Lambda = d\delta/dx$ . Значения  $\Lambda$  зависят от режима истечения и конкретизируются ниже.

Поле скоростей, плотность и давление представляются в виде

$$v = \varepsilon v', \quad w = \varepsilon w', \quad u = U(r) + \varepsilon u', \quad \rho = \rho_0(r) + \varepsilon \rho', \quad p = P + \varepsilon p', \quad (2)$$

где штрихами обозначены возмущения, масштабный параметр  $\varepsilon \ll 1$ .

Возмущения рассмотрены в сжатом слое, который состоит из двух подобластей. В невязкой — от внешней границы висячего скачка до линии максимального полного давления — продольная скорость и плотность приняты постоянными и равными своим максимальным значениям. При осреднении уравнений  $\bar{U}$  и средняя плотность  $\bar{\rho}_0$  в этом аналоге потенциального ядра полагаются характерными. Во второй подобласти (слое смещения) происходит плавный переход к параметрам окружающего пространства. Здесь безразмерные профили продольной средней скорости задаются в виде

$$U(r) = \exp(-0,693\eta^2), \quad \eta = 2(r - r_1)/\delta, \quad r_1 = 1 - \delta/2.$$

Средняя плотность  $\rho_0$  связана с  $U$  соотношением

$$\rho_0 = [1 + (k - 1) M_0^2 (1 - U^2)/2]^{-1},$$

а скорость звука  $a = [\rho_0 M_0^2]^{-1/2}$ . Значение числа Маха  $M_0$  также определяется на линии максимальной скорости.

В качестве характерного линейного масштаба  $\bar{r}_m$  выбрано значение  $\bar{r}$  на линии половинной скорости, так что в безразмерном виде  $U = 0,5$  при  $r = 1$ . Значение  $r = 1$  совпадает с половиной толщины слоя смещения, в котором  $r_1 < r < 1 + \delta/2$ .

Ищутся медленно меняющиеся по продольной координате  $x$  волновые решения (выпишем только компонент давления)

$$p'(r, \varphi, x, t) = A(x)p(r) \exp \tau, \quad \tau = i(\alpha x - \omega t + n\varphi), \quad (3)$$

где  $A$  — амплитуда (комплексная величина);  $p$  — собственная амплитудная функция возмущений;  $\alpha = \alpha^r + i\alpha^i$ ;  $\alpha^r$  и  $n$  — продольное и азимутальное волновые числа;  $\alpha^i$  — коэффициент усиления в продольном направлении (при  $\alpha^i < 0$  — инкремент); круговая частота  $\omega$  вещественна. Значение  $n$  определяет число вихрей или вихревых пар по окружности струи. Малые значения  $n$  соответствуют крупномасштабным вихрям, а большие — мелкомасштабным. Полагается, что амплитуды возмущений с положительными и отрицательными  $n$  одинаковы, что приводит к классическому представлению волн Тейлора — Гёртлера  $p'(r, \varphi, x, t) = A(x)p(r) \exp i(\alpha x - \omega t) \cos n$ . Вид (3) позволяет более компактно представить дальнейшие выкладки.

Подставляя (2), (3) в основные уравнения, описывающие движение невязкого сжимаемого газа [13–15], после линеаризации получим следующую систему:

$$\begin{aligned} e^\tau \left[ iFv + \frac{pr}{\rho_0} - \frac{2Uu}{R} \right] &= -B_1, & e^\tau \left[ iFw + \frac{inp}{\rho_0 r} \right] &= -B_2, & e^\tau \left[ iFu + U_r v + \frac{i\alpha p}{\rho_0} \right] &= -B_3, \\ e^\tau \left[ iF M_0^2 p + v_r + \frac{v}{r} + \frac{inw}{r} + i\alpha u \right] &= -B_4, & F &= \alpha U - \omega \end{aligned} \quad (4)$$

с краевыми условиями  $p \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

Экспериментальными методами установлено, что возмущения Тейлора — Гёртлера стационарны или квазистационарны, при этом значения  $\alpha^r$  и  $\omega$  близки к нулю, и для того чтобы избежать особенностей при интегрировании основных уравнений при  $U \rightarrow 0$ , расчеты проводились при малых  $\omega$ , задаваемых через акустическое число Струхаля  $Sh = 2\pi\bar{\omega}\bar{r}/\bar{a}$ , где  $\bar{a}$  — скорость звука во внешнем поле. Как правило, бралось  $Sh = 0,005$ , при этом  $\alpha^r \approx 0$ . В (4) учтен только главный центробежный член в первом уравнении для  $v$ .

Нелинейные коэффициенты  $B$  имеют вид

$$\begin{aligned} B_1 &= v'v'_r + \frac{w'v'_\varphi}{r} + u'v'_x - \frac{w'^2}{r} - \frac{u'^2}{R} - \frac{\rho'p'_r}{\rho_0^2}, \\ B_2 &= v'w'_r + \frac{w'w'_\varphi}{r} + u'w'_x + \frac{v'w'}{r} - \frac{\rho'p'_\varphi}{r\rho_0^2}, & B_3 &= v'u'_r + \frac{w'u'_\varphi}{r} + u'u'_x - \frac{\rho'p'_x}{\rho_0^2}, \\ B_4 &= \frac{1}{a^2} \left\{ \left( \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{P} \right) (p'_t + Up'_x) + v'p'_r + \frac{w'p'_\varphi}{r} + u'p'_x \right\} + \rho' \left( v'_r + \frac{w'_\varphi}{r} + u'_x + \frac{v'}{r} \right). \end{aligned}$$

Для линейных волн (приближение первого порядка по  $\varepsilon$ ) коэффициенты  $B \equiv 0$ , а амплитуда  $A$  — неопределенная.

Амплитудные функции волновых компонентов выражаются через амплитудную функцию давления  $p$ , а система (4) решается для  $p$ . Приведенное уравнение, соответствующее плоскопараллельному приближению, имеет вид

$$e^\tau L(p) = N_1, \quad L(p) \equiv p_{rr} + G_1 p_r + G_2 p, \quad (5)$$

где  $G_1 = G_1^0 + G_1^R$ ;  $G_2 = G_2^0 + G_2^R$ ;  $G_1^0 = 1/r - \rho_{0r}/\rho_0 - 2F_r/F$ ;  $G_2^0 = F^2/a^2 - n^2/r^2 - \alpha^2$ ; дополнительные члены  $G_1^R = 2\alpha U/(FR) - 2F_r b/(FE) + b_r/E$ ,  $G_2^R = b((n^2/(rF)^2 - 1/a^2) + 2(F_r - \alpha U(\rho_{0r}/\rho_0 + 2F_r(1 + b/E)/F - b_r/E - 1/r)))/(FR)$  ( $b = 2UU_r/R$ ,  $E = F^2 - b$ ) определяются наличием центробежной силы. При этом нелинейные члены

$$N_1 \equiv e^{\tau_1} N = \left[ \frac{dB_1}{dr} + \left( \frac{1}{r} - 2 \frac{F_r}{F} \right) B_1 + i \frac{n}{r} B_2 + i \alpha B_3 - i \frac{FB_4}{\rho_0} \right] \rho_0,$$

где  $\tau_1$  — суммарная фаза, получаемая при нелинейном взаимодействии разных компонентов.

Граничные условия в областях постоянных средних параметров выражаются через модифицированные функции Бесселя первого ( $I^n$ ) и второго ( $K^n$ ) рода

$$\begin{aligned} p &= C_1 I^n(z_1), & p_r &= C_1 I_z^n(z_1), & r &\rightarrow 0, \\ p &= C_2 K^n(z_2), & p_r &= C_2 K_z^n(z_2), & r &\rightarrow \infty, \\ z &= \lambda r, & \lambda^2 &= F^2/a^2 - \alpha^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулированная краевая задача на собственные значения позволяет определить собственное значение  $\alpha^i$  при заданных  $M_0$ ,  $\delta$ ,  $R_0$ ,  $n$ . Соответствующая собственная функция  $p$ , полученная при нормировке  $p_{\max} = 1$ , имеет произвольную амплитуду  $A$ .

Рассматривается взаимодействие возмущений, удовлетворяющих условиям фазового синхронизма. Запишем это в виде  $\tau_j = \tau_1$ ,  $\tau_l = \tau_l + \tau_k$ , где индексами обозначены соответствующие взаимодействующие волны. Как правило,  $j \neq l \neq k$ , хотя есть триплеты с  $k = l$ , они описывают эффекты самовоздействия.

Проводя операции осреднения и используя условия разрешимости [16], приходим к искомому амплитудным уравнениям, описывающим продольную эволюцию амплитуд волн в групповых триплетах:

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dx} &= -\alpha_j^i A_j + \sum_{l,k} K_{l,k} A_l A_k, \\ \frac{dA_l}{dx} &= -\alpha_l^i A_l + \sum_{j,k} K_{j,k}^* A_j A_k^*, & \frac{dA_k}{dx} &= -\alpha_k^i A_k + \sum_{j,l} K_{j,l}^* A_j A_l^*, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $K_{l,k} = \int_0^\infty p_j^+ N_{l,k} dr / \int_0^\infty p_j^+ \frac{\partial L(p_j)}{\partial \alpha_j} dr$ , а  $p^+$  — решение уравнения, сопряженного к однородному [13–15]. Его можно получить из (5):

$$p_{rr}^+ - (G_1 p^+)_r + G_2 p^+ = 0,$$

а граничные условия определяются из (6) и билинейной формы  $\phi[pp^+] \equiv pp^+/r + p_r p^+ - pp_r^+ = 0$ .

Амплитуды  $A$  записываются в показательной форме  $A_j = |A_j| e^{i\psi_j}$ , а уравнения (7) решаются для модулей амплитуд  $|A_j|$  и амплитудных фаз  $\psi_j = \text{Arg } A_j$  с начальными условиями, соответствующими [2].

Сделаем необходимые разъяснения. В [2] получены азимутальные развертки избыточного полного давления  $\delta P_0$  в разных продольных сечениях первой ячейки (бочки) струи. В [12] проведена обработка этих данных. Приведенные в [2] значения  $\delta P_0$  разлагались в ряд Фурье, и спектральные компоненты ряда отождествлялись с азимутальными компонентами возмущений Тейлора — Гёртлера. Это позволило получить абсолютные значения избыточного полного давления (интенсивности  $I$ ), фазовые характеристики  $\psi$  всех

мод реализованного сигнала при разных  $x$ , а также степени пространственного усиления  $-\alpha^i = (x_1 - x_0)^{-1} \ln [I(x_1)/I(x_0)]$ .

Начальные значения амплитуд  $|A_j(x_0)|$  находятся из интенсивностей полных давлений в начальном сечении  $x_0$   $I_j(x_0) = |A_j(x_0)| |\delta P_0(x_0)| \exp(-\alpha^i x_0)$ , где  $|\delta P_0|$  — модуль максимального по поперечной координате расчетного значения возмущения полного давления. Для его построения используется известное газодинамическое соотношение, из которого с точностью до квадратичных членов получено [7–11, 15]  $\delta P_0/P_0 = [p/P + k M^2((1 - k)p/(kP) + 2u/U)]/(2 + (k - 1) M^2)$ , где  $M$  — локальное число Маха;  $k = C_P/C_V$ . В (7) начальные условия  $\psi_j(x_0)$  для разных значений  $n$  также соответствовали данным [2].

Обозначим через  $\beta_j$  коэффициент усиления в продольном направлении соответствующей азимутальной моды, это нелинейный инкремент порядка  $O(\varepsilon^2)$ :

$$\beta_j \equiv \text{Real} \frac{d \ln \delta P_{0j}}{dx} = \text{Real} \left( i\alpha_j + \frac{d \ln |A_j|}{dx} \right).$$

Первый член в этом выражении — линейный инкремент, второй определяет вклад нелинейного взаимодействия в резонансном режиме.

**Результаты и обсуждение.** Как сказано выше, основой для определения составляющих нелинейного рассмотрения послужили данные экспериментов [2] для недорасширенной струи со степенью нерасчетности примерно 4,5 при  $M_0 = 1,5$ ;  $k = 1,4$ ;  $R_0 \approx 10 \div 15$ . В [12] показано, что в первой ячейке струи реальный сигнал является суперпозицией компонентов с  $1 \leq n \leq 30$  с разными интенсивностями  $I$ . Часть из них с большими азимутальными волновыми числами  $n$  являются фоновыми, реальный вклад в  $\delta P_0$  вносят моды  $n < 14$ .

На рис. 1 приведены интенсивности ( $I$ ) в произвольном масштабе и фазы ( $\psi$ ) в радианах в начальном и конечном сечениях измерений [2]. Волновые компоненты с интенсивностями менее пяти процентов от среднего полного давления  $I_n/I_0 < 0,05$  считаются фоновыми, на рисунке они ограничены штриховой линией. Отметим, что у фонового компонента  $n = 4$  степень роста весьма значительная. Ожидается, что нелинейность может сказаться для тех мод, у которых замечены изменения значений фаз.

В настоящей работе рассмотрен диапазон  $1 \leq n \leq 10$  для небольших значений  $R_0$  и интервал  $1 \leq n \leq 11$  — для больших  $R_0$ . Для этих мод проведено численное моделирование группового взаимодействия в резонансных триадах в рамках нелинейной модели второго порядка по амплитудам возмущений. Большие значения радиусов искривления  $R_0$  рассмотрены для выявления зависимостей по этому основному параметру задачи.

Так как значения  $\omega$  и  $\alpha^r$  для волн Тейлора — Гёртлера невелики, то условия фазового синхронизма определяются только значениями азимутальных волновых чисел  $n$ :  $n_j = n_l + n_k$ . Простым перебором легко установить, что при групповом нелинейном взаимодействии 11 мод общее число простых триплетов будет 30. Групповой триплет для старшей моды  $n = 11$  состоит из 5, а для младшей моды  $n = 1$  — из 10 простых. Триплеты, связывающие одноименные компоненты, учитывают эффект самовоздействия и возможное перераспределение энергии при таком процессе этого компонента и моды с удвоенным волновым числом. Если число взаимодействующих мод 10, то групповой триплет состоит их 25 простых.

На рис. 2 сплошной линией показаны инкременты  $-\alpha^i$  для рассмотренных азимутальных компонентов при толщине слоя смещения  $\delta = 0,4$ , полученные в рамках невязкого приближения линейной теории устойчивости. Заметим, что для мод с умеренными  $n$  значения линейных инкрементов довольно слабо зависят от  $\delta$ , так что приведенный рисунок достаточно хорошо отражает их соотношение в слое смещения первой ячейки струи, полученное при подобном моделировании.

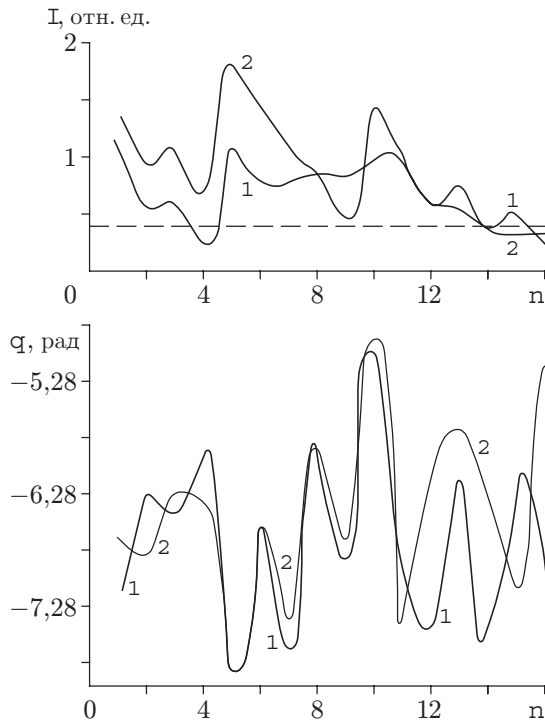


Рис. 1

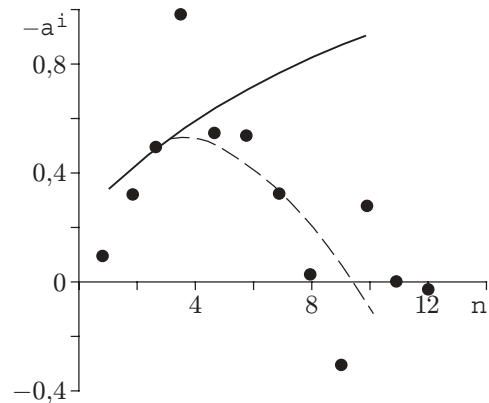


Рис. 2

Рис. 1. Амплитудный и фазовый состав реального сигнала [2] в начальном ( $x_0/D = 1,7$ ) и конечном ( $x/D = 2,5$ ) сечениях (кривые 1 и 2 соответственно)

Рис. 2. Линейные инкременты волн Тейлора — Гёртлера при  $\delta = 0,4$ ,  $R_0 = 10$ : 1 — невязкое приближение; 2 — вязкое приближение с турбулентной вязкостью по Прандтлю;  $Re_t = 300$ ; точки — экспериментальные инкременты [2]

Но, как установлено в экспериментах, для турбулентных струй (а именно такие режимы изучались) с ростом азимутальных волновых чисел  $n$  реальные инкременты начинают отклоняться от этих невязких зависимостей, а их значения заметно ниже расчетных. На рис. 2 приведены инкременты, полученные в [12] на основе экспериментов [2], с этими данными и проводилось сравнение результатов численного моделирования.

В [10] показано, что эти отклонения можно объяснить влиянием вязкости. В рассмотренных экспериментах истечение осуществляется в режиме развитой турбулентности, поэтому для адекватного теоретического описания инкрементов во всей области существования растущих колебаний необходим учет турбулентной вязкости. Как известно, в настоящее время достаточно достоверные модели турбулентности для свободных безграничных потоков типа струи и следа еще не построены, и приходится ограничиваться поиском закономерностей на качественном уровне. Мы воспользовались простой алгебраической моделью турбулентности Прандтля [17]. По этой модели турбулентный масштаб  $\bar{\nu}_t = \bar{l}^2 |\partial \bar{U} / \partial \bar{r}|$  выражается через длину пути смещения  $\bar{l}$ , которая для сжимаемого свободного потока записывается в виде  $\bar{l} = c \delta \bar{r}_m$ , в коэффициенте  $c$  сжимаемость учитывается с использованием эмпирического соотношения  $c = 0,09 - \sqrt{M - 1,2}/42$  ( $1,2 \leq M \leq 3,6$ ). При этом значения числа Рейнольдса с турбулентной вязкостью определяются соотношением  $Re_t = \bar{U} \bar{l} / \bar{\nu}_t$ .

Для воспроизведенных параметров истечения найдено, что значения  $Re_t$  находятся в диапазоне  $300 \leq Re_t \leq 450$ . Штриховой линией на рис. 2 показаны найденные линей-

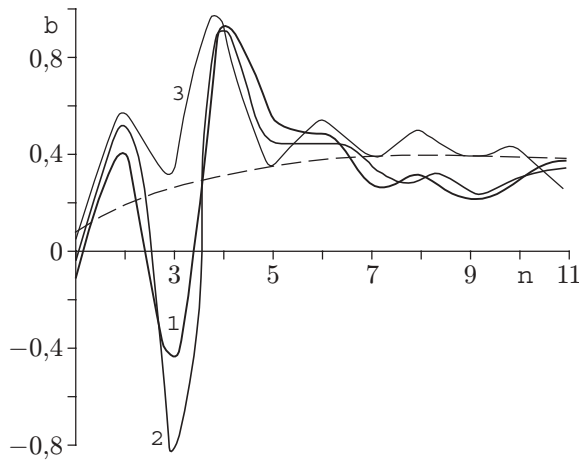


Рис. 3

Рис. 3. Влияние режима истечения струи на нелинейные степени роста:

1 — турбулентная струя ( $\Lambda_1 = 0,2281$ ); 2 — турбулентная струя ( $\Lambda_2 = 0,158$ ); 3 — ламинарная струя ( $\Lambda_3 = 0,083$ ); штриховая линия — линейные инкременты по невязкой модели

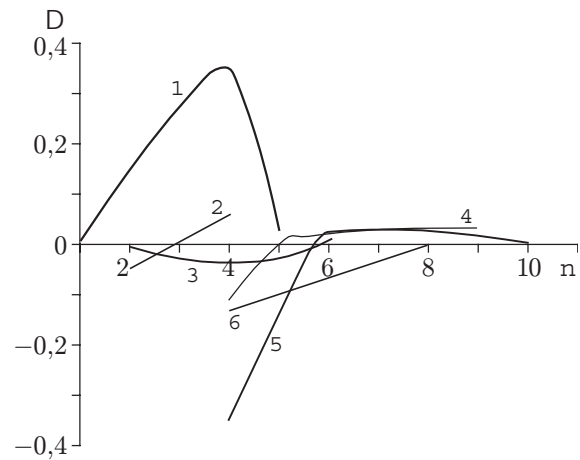


Рис. 4

Рис. 4. Разность нелинейных и линейных инкрементов в простых триплетях  $n_j = n_k + n_l$ , включающих моду  $n_j = 4$ :

1 — триплет с модами 4 = 5 - 1; 2 — 4 = 2 + 2; 3 — 4 = 6 - 2; 4 — 4 = 9 - 5; 5 — 4 = 10 - 6; 6 — 4 = 8 - 4

ные инкременты с учетом турбулентной вязкости при  $Re_t = 300$ . Становится ясным, что существует диапазон невысоких значений азимутальных компонентов, линейные инкременты которых хорошо описываются в рамках невязкого приближения. Вне этого диапазона необходим учет турбулентной вязкости, что позволяет качественно верно отразить наблюдаемые в экспериментах особенности.

В настоящей работе рассмотрены три режима истечения [11], определяющие разные значения коэффициента нарастания  $\Lambda$  при  $M_0 = 1,5$ :

- 1) для турбулентной струи при сильной нерасчетности ( $\Lambda_1 = 0,2281$ );
- 2) для турбулентной струи с небольшой нерасчетностью ( $\Lambda_2 = 0,158$ );
- 3) для ламинарного режима ( $\Lambda_3 = 0,083$ ).

На рис. 3 показаны значения  $\beta$  для группового триплета из 11 мод при радиусе кривизны  $R_0 = 30$  и разных  $\Lambda$  (кривые 1–3) в сравнении с линейным инкрементом  $-\alpha^i$ . Видно, что влияние степени расширения на инкременты большинства мод сказывается не слишком значительно. В этом ряду выделяется только мода  $n = 3$ , инкремент которой сильно зависит от режима истечения и значения  $\Lambda$ . Причину такого сильного влияния установить пока не удалось.

Все последующие расчеты проведены для второго варианта, как для наиболее вероятно реализуемого в экспериментах. Проиллюстрируем на рис. 4 необходимость рассмотрения именно группового триплета, включающего возможно большее число азимутальных компонентов. Здесь для  $R_0 = 10$  приведены разности нелинейных и линейных инкрементов  $\Delta = \beta - \alpha^i$ , полученные при моделировании простых триплетов, включающих моду  $n = 4$ . Из рис. 4 становится ясно, что перераспределение энергии в них совершенно произвольно и непредсказуемо, некоторые моды в одних триплетях характеризуются повышенным ростом, в других — сохраняют линейную степень роста, а в третьих становятся затухающими. Однотипную динамику имеют только триплеты, моделирующие процессы самовоз-

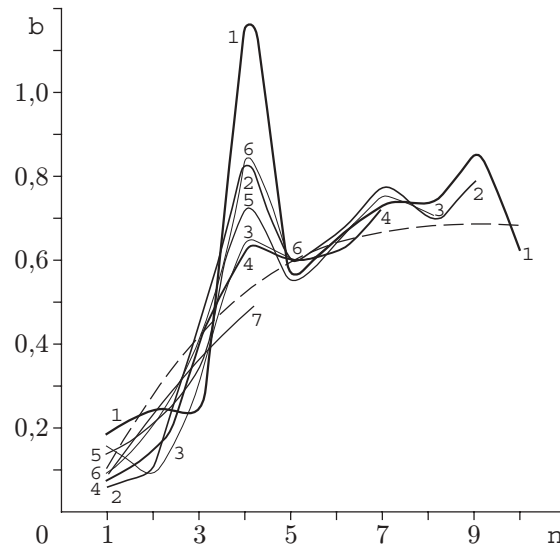


Рис. 5. Нелинейные инкременты (при  $R_0 = 10$ ;  $\delta = 0,5$ ) группового триплета: кривая 1 — из 10 мод; 2 — из 9 мод; 3 — из 8; 4 — из 7; 5 — из 6; 6 — из 5; 7 — из 4; штриховая линия — линейные инкременты

действия, — передача энергии модам с удвоенными  $n$  всегда сопровождается понижением интенсивности основной моды.

Рис. 5 является ключевым — на нем приведены значения инкрементов  $\beta$  для группового триплета, включающего разное число азимутальных компонентов на фоне линейных инкрементов (штриховые линии). Основной вариант — 10 взаимодействующих мод (25 одиночных триплетов) — показан здесь кривой 1. Ясно, что нелинейное взаимодействие приводит к повышенному росту фоновой моды  $n = 4$ , наблюдается также увеличение инкремента для мод  $n = 1; 7; 9$ , сохраняют линейный рост моды  $n = 5; 6; 8$  и замедляется рост для мод  $n = 2; 3; 10$ . Но все изменения у этих компонентов несравнимы с темпом роста моды  $n = 4$ , на основании чего можно сделать вывод о том, что именно нелинейное взаимодействие является причиной значительного по сравнению с линейным усиления этого компонента.

В дальнейшем была предпринята попытка установить, какие моды являются необходимыми для реализации искомых закономерностей. Это исследование заключалось в последовательном исключении из рассмотрения старших мод. Кривой 2 показан групповой триплет из 9 мод ( $1 \leq n \leq 9$ , 20 простых триплетов). Замечается понижение степени роста моды  $n = 4$  и увеличение ее для  $n = 3$ . Становится ясно, что влияние моды  $n = 10$  на их продольную динамику значительно. Уменьшаются инкременты самых малых мод, и незначительно изменяется степень роста остальных. Для групповых триплетов из 8, 7 и 6 мод качественных сдвигов не обнаружено. Остановимся на триплете из 5 мод (6 простых триплетов, кривая 6 на рис. 5), его действие приводит к значительному росту моды  $n = 4$ . Из этого следует, что мода  $n = 5$  также очень важна в нелинейной эволюции фоновой моды.

Нелинейное взаимодействие в триплетах, составленных из компонентов с невысокими азимутальными номерами  $n$ , приводит к снижению инкрементов по сравнению с линейными значениями. Из этого можно сделать вывод, что при моделировании реальной динамики волн Тейлора — Гёртлера необходимо учитывать возможно большее число реализующихся в опыте составляющих наблюдаемого значения избыточного полного давления.



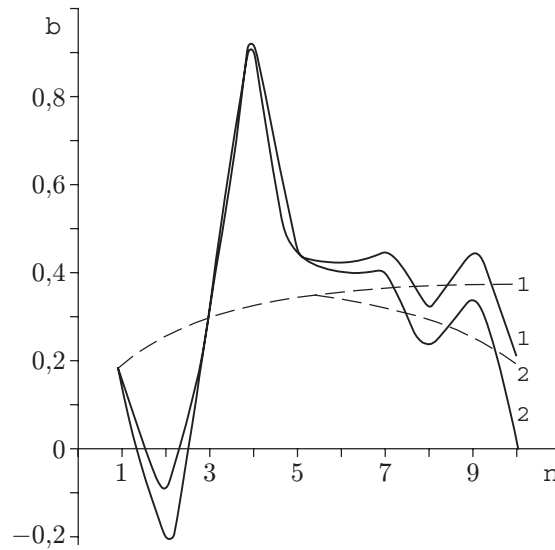


Рис. 6. Моделирование влияния турбулентной вязкости, заключающееся в понижении линейных инкрементов старших мод  $n > 5$ . Групповой триплет из 10 мод при  $R_0 = 30$ :

кривая 1 — инкременты из невязкого приближения; 2 — с учетом понижения; штриховая линия — линейные инкременты

В разобранных выше вариантах линейные инкременты старших мод были представлены их значениями, полученными в рамках невязкого приближения, что (как показывает рис. 2) не так. Поэтому были проведены расчеты, в которых было учтено реальное понижение линейных инкрементов старших мод из-за влияния турбулентной вязкости.

Рис. 6 иллюстрирует влияние данного факта на примере группового триплета из 10 мод при  $R_0 = 30$ . Здесь рассмотрены групповые триплеты с линейными инкрементами по невязкому приближению (кривые 1) и с учетом понижения их у старших мод (кривые 2), взято  $\alpha_{n=6}^i = \alpha_{n=5}^i$ ;  $\alpha_{n=7}^i = \alpha_{n=4}^i$ ;  $\alpha_{n=8}^i = \alpha_{n=3}^i$ ;  $\alpha_{n=9}^i = \alpha_{n=2}^i$ ;  $\alpha_{n=10}^i = \alpha_{n=1}^i$ . Видно, что из-за уменьшения линейных инкрементов старших мод изменяются их нелинейные степени роста, что практически не сказывается на динамике мод с умеренными и малыми значениями азимутальных волновых чисел, и при этом не наблюдается заметного усиления фоновой моды  $n = 4$ .

Проведенное моделирование показало, что в струе нелинейное взаимовлияние возможно, но из-за широкого состава возбуждаемых стационарных компонентов, входящих в реальный сигнал, для правильного понимания хода его действия необходимо рассмотреть по возможности большее число составляющих. Как показали численные расчеты, нелинейность в рамках модели связи в резонансных триадах в первую очередь сказывается на динамике мод небольшой интенсивности и она приводит к повышенному росту этих фоновых компонентов.

К сожалению, достаточно универсальных зависимостей установить не удалось, так как амплитудно-спектральный состав возмущений Тейлора — Гёртлера для струй определяется начальным затравочным фоном, состоянием потока на внутренней поверхности сопла, степенью шероховатости его кромок. Это является специфической особенностью сопла, приводящей к индуцированию стационарных компонентов разного азимутального состава, к тому же имеющих разный сдвиг фаз между собой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Новопашин С. А., Перепёлкин А. Л.** Самоорганизация течения в сверхзвуковой предтурбулентной струе. Новосибирск, 1988. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т теплофизики; № 175-88).
2. **Krothopalli A., Buzuna G., Lourenco L.** Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3, N 8. P. 1848–1851.
3. **Welsh F. P., Cain T. M.** Electron beam visualisation of low density nitrogen plumes // *Flow visualization VII: Proc. of the VII symp. on flow visual.*, Seattle, 11–14 Sept., 1995. N. Y.; Wallingford (U.K.): Begell House, Inc., 1995. P. 192–197.
4. **Запрягаев В. И., Миронов С. Г., Солотчин А. В.** Спектральный состав волновых чисел и особенности структуры течения в сверхзвуковой струе // *ПМТФ*. 1993. Т. 34, № 5. С. 41–47.
5. **Zaryagaev V. I.** The complex investigation method of 3-D disturbances at a curved shear layer of the nonisobaric supersonic jet // *Proc. of the Intern. conf. of the methods of aerophys. res. (ICMAR)*, Novosibirsk, 29 June — 3 July, 1998. Pt 3. P. 295–300.
6. **Желтухин Н. А., Запрягаев В. И., Солотчин А. В., Терехова Н. М.** Спектральный состав и структура стационарных вихревых возмущений Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковой струе // *Докл. РАН*. 1992. Т. 325, № 6. С. 1133–1137.
7. **Желтухин Н. А., Терехова Н. М.** Возмущения высоких мод в сверхзвуковой струе // *ПМТФ*. 1990. № 2. С. 75–82.
8. **Желтухин Н. А., Терехова Н. М.** Неустойчивость Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковой струе // *ПМТФ*. 1993. Т. 34, № 5. С. 48–55.
9. **Терехова Н. М.** Продольные вихри в осесимметричных струях // *ПМТФ*. 1996. Т. 37, № 3. С. 45–57.
10. **Терехова Н. М.** Вязкая неустойчивость Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковой осесимметричной струе // *Теплофизика и аэромеханика*. 1999. Т. 6, № 3. С. 307–318.
11. **Терехова Н. М.** Влияние непараллельности потока на устойчивость волн Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковых осесимметричных струях // *ПМТФ*. 2000. Т. 41, № 4. С. 33–87.
12. **Терехова Н. М.** Эволюция продольных вихрей в сверхзвуковой осесимметричной струе // *Теплофизика и аэромеханика*. 2001. Т. 8, № 3. С. 423–426.
13. **Желтухин Н. А., Терехова Н. М.** Резонансное развитие возмущений в сверхзвуковой струе // *ПМТФ*. 1993. Т. 34, № 2. С. 82–87.
14. **Желтухин Н. А., Терехова Н. М.** Трехволновые резонансные взаимодействия неустойчивых возмущений в сверхзвуковой струе // *Докл. РАН*. 1994. Т. 334, № 2. С. 168–171.
15. **Струйные и нестационарные течения в газовой динамике** / В. Н. Глазнев, В. И. Запрягаев, В. Н. Усков и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
16. **Зельман М. Б.** О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках // *Изв. АН СССР. Сер. техн. наук*. 1974. Вып. 3. С. 16–21.
17. **Теория турбулентных струй** / Под ред. Г. Н. Абрамовича. М.: Наука, 1984.

*Поступила в редакцию 29/XI 2002 г.,  
в окончательном варианте — 9/II 2004 г.*