

УДК 621.396.41

**РЕЖЕКЦИЯ ВНЕПОЛОСНОЙ ПОМЕХИ****Вострецов А.Г.<sup>1,2</sup>, Богданович В.А.<sup>3</sup>, Гундарева М.В.<sup>1</sup>**<sup>1</sup> *Новосибирский государственный технический университет*<sup>2</sup> *Институт горного дела СО РАН*<sup>3</sup> *ОАО «ВНИИРА», г. Санкт-Петербург**vostretsov@adm.nstu.ru*

Предложен алгоритм режекции внеполосной помехи, основанный на построении инвариантных к группе аддитивных преобразований, описывающих априорную неопределенность положения помехи на оси частот, статистик. Режекция сводится к вычитанию из вектора спектральных отсчетов наблюдаемого процесса его проекции в подпространство помехи. Данный алгоритм предложено применять совместно с известной процедурой временного взвешивания для дополнительного подавления помехи. Приводятся характеристики эффективности алгоритма.

*Ключевые слова:* дискретное преобразование Фурье, эффект растекания спектра, внеполосная помеха, режекция помехи, максимальный инвариант.

**1. Введение**

Известно [1], что дискретизированный гармонический сигнал с частотой  $f_p$ , наблюдаемый на конечном временном интервале, имеет частотный спектр в виде двух дискретных линий на частотах  $\pm f_p$ , в случае, когда частота сигнала  $f_S$  кратна частоте  $f_d / N$ , где  $f_d$  – частота дискретизации сигнала,  $N$  – размерность дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Если это условие не выполняется, имеет место эффект «растекания спектра». В результате внеполосная помеха может проникать в рабочую полосу частот и ухудшать характеристики алгоритмов обнаружения полезного сигнала [2].

Для подавления интенсивной внеполосной помехи обычно используют частотную фильтрацию и временное взвешивание наблюдаемого процесса, которое сводится к умножению отсчетов  $\dot{s}_l$  его комплексной огибающей на функцию временного окна  $w(l)$ . В результате последней процедуры получается комплексный вектор взвешенных отсчетов  $\dot{\mathbf{X}} = \{\dot{X}_0, \dots, \dot{X}_{N-1}\}^T$  ( $T$  – знак транспонирования) с компонентами

$$\dot{X}_m = \sum_{l=0}^{N-1} w(l) \dot{s}_l e^{\left(-j \frac{2\pi ml}{N}\right)}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-07-00078-а.

© 2013 А.Г. Вострецов, В.А. Богданович, М.В. Гундарева

Ширина временного окна  $\Delta t$  определяется размерностью ДПФ  $N$  и частотой дискретизации наблюдаемого процесса  $f_d$ :

$$\Delta t = N / f_d.$$

Однако в случае интенсивной помехи подавление с помощью временного окна может оказаться недостаточным. В настоящей работе предлагается метод, обеспечивающий дополнительное подавление внеполосной помехи, основанный на ее режекции в частотной области совместно с временным взвешиванием. Рассмотрены случаи использования прямоугольного окна и окна Натолла.

Прямоугольное окно, задаваемое выражением

$$w_r(l) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq l \leq N-1; \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (2)$$

соответствует случаю взятия отсчетов наблюдаемого процесса на конечном интервале времени с равными весами и имеет высокий уровень растекания спектра [2]. Окно Натолла, задаваемое выражением

$$w_n(l) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 a_i \cos(2\pi i \tau_l) & \text{при } 0 \leq l \leq N-1, \tau_l = [l - 0,5(N-1)] / (N-1); \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (3)$$

где  $N$  – размерность преобразования Фурье,  $a_0 = 0,3635819$ ;  $a_1 = 0,4891775$ ;  $a_2 = 0,1365995$ ;  $a_3 = 0,0106411$ , обеспечивает хорошее подавление внеполосной помехи, которое, однако, может оказаться недостаточным при наличии мощной внеполосной помехи [2].

## 2. Модель наблюдаемого процесса

Пусть наблюдаемый процесс представляет собой аддитивную смесь гармонической помехи и белого гауссовского шума. Тогда вектор взвешенных с помощью временного окна отсчетов комплексной огибающей можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{H}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{Y}$  – вектор взвешенных отсчетов комплексной огибающей помехи,  $\mathbf{H}$  – вектор взвешенных отсчетов комплексной огибающей шума. Применив к вектору  $\mathbf{X}$  ДПФ, получим комплексный вектор в частотной области:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{x} = \{\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{N-1}\}^T = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ ;  $\mathbf{y} = \{\dot{y}_0, \dots, \dot{y}_{N-1}\}^T = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ ;  $\boldsymbol{\eta} = \{\dot{\eta}_0, \dots, \dot{\eta}_{N-1}\}^T = \mathbf{F}(\mathbf{H})$  – комплексные спектры огибающих наблюдаемого процесса, помехи и шума соответственно,  $\mathbf{F}(\cdot)$  – обозначение ДПФ. Отметим, что вектор  $\mathbf{x}$  принадлежит комплексному

$N$ -мерному евклидову пространству  $\mathbf{C}^N$ .

### 3. Представление помехи в ортонормированном базисе

Как и в работах [2, 3], будем полагать, что для полезного сигнала выделен частотный диапазон  $[f_{S1}, f_{S2}]$ ,  $f_{S1} = \frac{K_1 f_d}{N}$ ,  $f_{S2} = \frac{K_2 f_d}{N}$ ,  $K_1$  и  $K_2$  – целые положительные числа. Число спектральных отсчетов в выделенном диапазоне составляет величину  $B = K_2 - K_1 + 1$ . Внеполосная помеха в пределах временного окна (на интервале наблюдения)  $\Delta t$  представляет собой отрезок гармонического сигнала с частотой  $f_p$ , которая может принимать произвольное и заранее неизвестное значение из интервала  $[f_{p1}, f_{p2}]$ , расположенного на частотной оси вне интервала  $[f_{S1}, f_{S2}]$ ;  $f_{p1} = \frac{M_1 f_d}{N}$ ,  $f_{p2} = \frac{M_2 f_d}{N}$ ,  $M_1 < M_2$  – целые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам:  $M_2 < K_1 \vee M_1 > K_2$ .

Таким образом, частотный интервал  $[f_{p1}, f_{p2}]$  содержит  $D = M_2 - M_1 + 1$  спектральных компонент.

Для представления спектра гармонической помехи после временного взвешивания образуем базис, составленный из  $L$  векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L$ , где  $\mathbf{e}_k = \{e_0^{(k)}, \dots, e_{N-1}^{(k)}\}^T = \mathbf{F}(\mathbf{v}_k)$ ,  $\mathbf{v}_k = \{v_0^{(k)}, \dots, v_{N-1}^{(k)}\}^T$ ,  $v_l^{(k)} = w(l) \exp\left\{j \frac{2\pi f_k l}{f_d}\right\}$ ,  $k = 1, \dots, L$ ;  $l = 0, \dots, N-1$ ;  $f_k = f_{S1} + (k-1)\Delta f$ ;  $\Delta f = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{L-1}$ . В данном базисе вектор отсчетов помехи примет вид

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^L a_k \mathbf{e}_k, \quad (6)$$

где  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, L$ , – координаты вектора спектральных отсчетов помехи в данном базисе.

При совпадении частоты помехи с одной из частот  $f_k$  представление (6) будет точным, при несовпадении – приближенным. Число базисных векторов  $L$  выбирается исходя из требуемой точности представления помехи при синтезе алгоритма режекции. Вопрос о выборе числа базисных векторов будет рассмотрен ниже. Отметим, что выражение (6) позволяет приближенно представить любую помеху из частотного интервала  $[f_{p1}, f_{p2}]$ .

Базис, образованный векторами  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L$  в общем случае не является ортонормированным. На практике для представления помехового вектора удобнее использовать ортонормированный базис, так как в этом случае его координаты легко определяются путем вычисления скалярных произведений представляемого и базисных векторов. Поэтому в дальнейшем будем использовать ортонормированный базис  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_L$ , полученный из базиса  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L$ , например, с помощью процедуры Грама-Шмидта. В ортонормированном базисе вектор отсчетов спектра помехи примет вид

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^L b_k \mathbf{E}_k, \quad (7)$$

где  $b_k = (\mathbf{y}, \mathbf{E}_k)$ ,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение. Подпространство  $\mathbf{P}$ , натянутое на базисные векторы  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_L$ , будем называть подпространством помехи.

#### 4. Алгоритм режекции помехи

Действие аддитивной помехи эквивалентно преобразованию наблюдаемого спектра группой  $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}\}$  аддитивных операторов  $\mathbf{g}$ , поэтому для режекции помехи достаточно найти статистику, инвариантную к преобразованиям из группы  $\mathbf{G}$ . Известно [4], что все инвариантные статистики выражаются через специальную статистику – максимальный инвариант группы  $\mathbf{G}$ . Можно показать [5], что для рассматриваемой группы преобразований  $\mathbf{G}$  максимальный инвариант имеет следующий вид:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{Pr}_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{Pr}_{\mathbf{P}}(\cdot)$  – оператор ортогонального проектирования в подпространство  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{z} = \{z_0, \dots, z_{N-1}\}^T$  – вектор, имеющий ту же размерность, что и вектор  $\mathbf{x}$ . В результате перехода к статистике  $\mathbf{z}$  достигается режекция помехи (7) с любыми параметрами  $b_k$  в силу принадлежности векторов  $\mathbf{z}$  ортогональному дополнению  $\mathbf{QP}$  подпространства  $\mathbf{P}$  в комплексном евклидовом пространстве  $\mathbf{C}_N$ , причем степень подавления помехи будет тем выше, чем точнее представлена помеха в базисе  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_L$ . При совпадении частоты гармонической помехи с одной из частот  $f_1, \dots, f_L$  подавление помехи будет полным.

Таким образом, алгоритм режекции помехи задается выражением (8). Основным преимуществом предлагаемого алгоритма режекции перед традиционно применяемым методом на основе частотной фильтрации является то, что подавляются не только составляющие спектра, находящиеся в полосе  $[f_{p1}, f_{p2}]$ , занимаемой помехой, но и составляющие, обусловленные эффектом растекания спектра. Последнее гаран-

тируется процедурой формирования исходного базиса  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_L$ , где присутствуют спектры гармонических сигналов, частоты которых находятся как в кратных, так и в некратных соотношениях с частотой дискретизации.

### 5. Анализ эффективности алгоритма режекции помехи

В качестве характеристики эффективности алгоритма режекции гармонической помехи будем рассматривать долю энергии помехи, «затекающей» в частотный интервал, выделенный для полезного сигнала. Для этого введем обозначение  $\Delta E_f$  для доли (в относительных единицах) энергии внеполосной помехи на интервале наблюдения длительностью  $\Delta t$ , попадающей вследствие эффекта растекания спектра в анализируемый частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ ,  $\Delta f$  – смещение частоты помехи относительно нижней границы анализируемого интервала, то есть  $\Delta f = f_{S1} - f_p$ . Анализ эффективности алгоритма, как и в работе [2], проведем для случая, когда размерность ДПФ  $N = 1024$ , число спектральных компонент в выделенном для полезного сигнала частотном диапазоне  $B = 19$ , ширину частотного интервала  $[f_{p1}, f_{p2}]$ , в котором возможно появление помехи (величину параметра  $D$ ), и размерность подпространства помехи (величину параметра  $L$ ) будем варьировать. Для определенности примем

$f_{p2} < f_{S1}$ ,  $\frac{(f_{S1} - f_{p2})N}{f_d} = 10$ . При построении ортонормированного базиса

$\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_L$  подпространства помехи  $\mathbf{P}$  будем использовать классический процесс ортонормализации Грама–Шмидта. Известно, что при достаточно близких исходных базисных векторах и больших значениях  $L$  из-за ошибок округления при вычислении на ЭВМ базисные вектора получаются не строго ортогональными. Последнее приводит к ухудшению режекции с помощью алгоритма (8). Поэтому в настоящей работе приводятся характеристики режекции при относительно небольших значениях параметров

$D$  и  $L$ :  $D = \frac{(f_{p2} - f_{p1})N}{f_d} = 5$ ,  $D = \frac{(f_{p2} - f_{p1})N}{f_d} = 7$  и  $L = 7$ ,  $L = 9$  и  $L = 11$ .

На рис. 1–4 показаны зависимости доли энергии помехи  $\Delta E_f$ , проникающей вследствие эффекта растекания спектра в частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ , от смещения частоты помехи относительно нижней границы интервала, выраженного в относительных единицах  $\frac{N\Delta f}{f_d}$ , для случая использования прямоугольного временного

окна (а) и окна Натолла (б), без режекции (пунктир) и с режекцией (сплошная линия) при различных значениях параметров  $D$  и  $L$ . Из рисунков видно, что применение режекции позволяет уменьшить «затекание» энергии гармонической помехи, распложенной вне полосы, отведенной для сигнала, более чем на 6 порядков (60 дБ) для прямоугольного окна и на 4 порядка (40 дБ) – для окна Натолла.

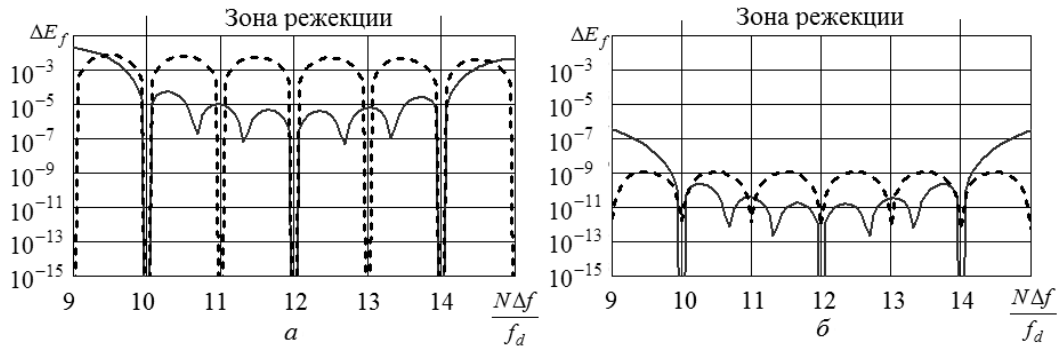


Рис. 1. Зависимости доли энергии помехи  $\Delta E_f$ , проникающей вследствие эффекта растекания спектра в частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ , от смещения частоты помехи относительно нижней границы интервала для случая  $D=5, L=7$

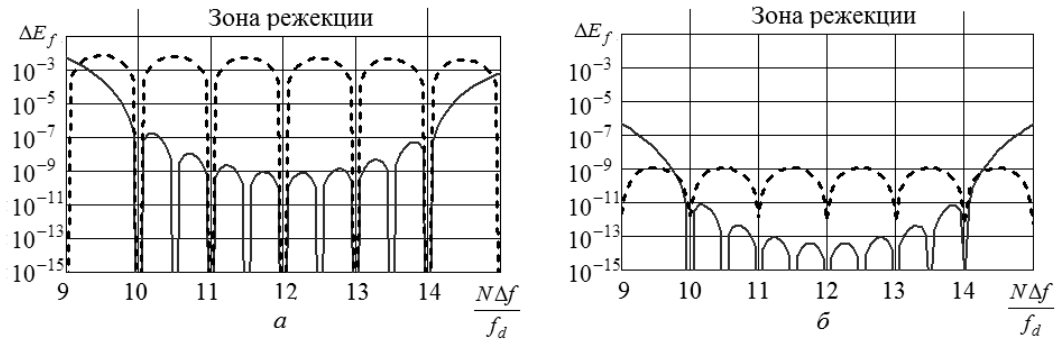


Рис. 2. Зависимости доли энергии помехи  $\Delta E_f$ , проникающей вследствие эффекта растекания спектра в частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ , от смещения частоты помехи относительно нижней границы интервала для случая  $D=5, L=9$

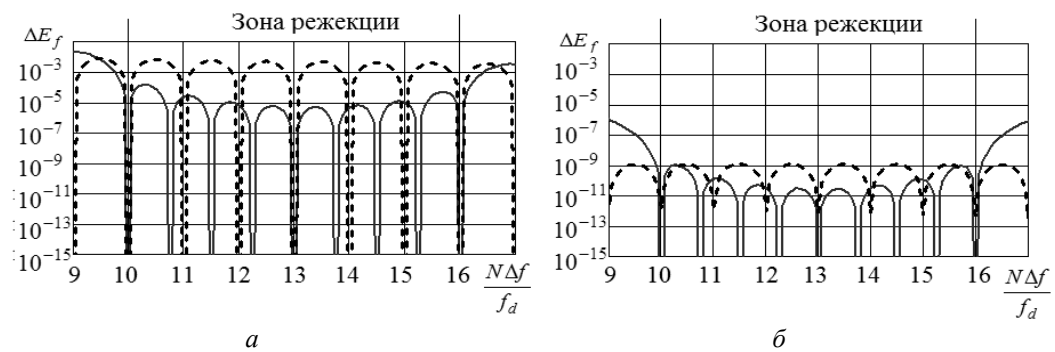


Рис. 3. Зависимости доли энергии помехи  $\Delta E_f$ , проникающей вследствие эффекта растекания спектра в частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ , от смещения частоты помехи относительно нижней границы интервала для случая  $D=7, L=9$

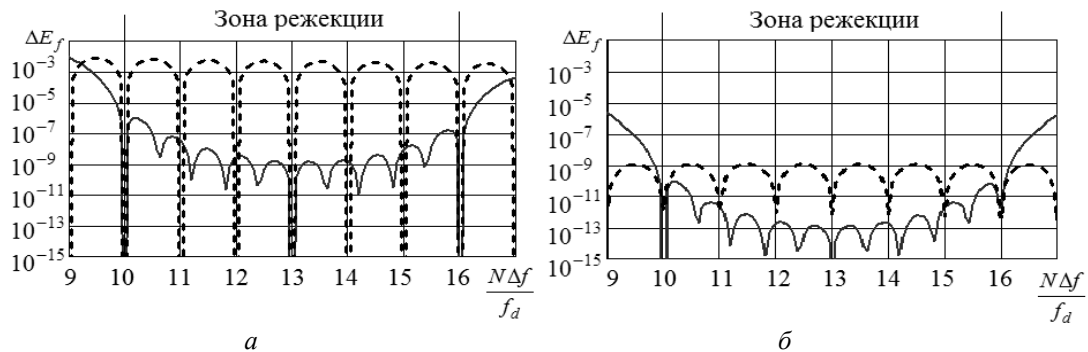


Рис. 4. Зависимости доли энергии помехи  $\Delta E_f$ , проникающей вследствие эффекта растекания спектра в частотный интервал  $[f_{S1}, f_{S2}]$ , от смещения частоты помехи относительно нижней границы интервала для случая  $D=7, L=11$

## 6. Выводы

Предложен алгоритм режекции внеполосной помехи, позволяющий значительно снизить долю ее энергии, проникающей вследствие эффекта растекания спектра в полосу, отведенную для полезного сигнала. Данный алгоритм может быть использован в дополнение к временному взвешиванию наблюдаемой выборки, широко используемому на практике.

Для случая гармонической помехи дополнительное подавление помехи составляет величину до 60 дБ при использовании для временного взвешивания прямоугольного окна и до 40 дБ – для окна Натолла.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Оппенгейм А.** Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2007. – 856 с.
- [2] **Вострецов А.Г.** Влияние растекания спектра внеполосной помехи на характеристики обнаружения сигнала неизвестной формы в частотной области / А.Г. Вострецов, В.Н. Васюков // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2012. – № 1 (25), часть 1. – С. 24–28.
- [3] **Богданович В.А.** Построение инвариантного алгоритма обнаружения сигналов в частотной области на основе критерия согласия / В.А. Богданович, Ё.Ю. Бородич // Доклады АН ВШ РФ. – 2010. – № 1(14). – С. 74–83.
- [4] **Леман Э.** Проверка статистических гипотез / пер. с англ. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
- [5] **Богданович В.А.** Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В.А. Богданович, А.Г. Вострецов. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.

*Vostretsov A.G., Bogdanovich V.A., Gundareva M.V.*

### **REJECTION OF OUT-OF-BAND INTERFERENCE**

Algorithm for rejection of out-of-band interference is proposed. The algorithm is based on formation of invariant statistics. These statistics are invariant to a group of additive transformations characterizing a priori uncertainty of the interference's frequency. The rejection is implemented by subtracting a projection of an observed spectrum into an interference subspace. The performance of the algorithm is summarized.

*Keywords:* Discrete Fourier transform; Effect of spectrum spreading; Out-of-band interference; Interference rejection; The maximum invariant.

*Статья поступила 11 ноября 2012 г.*