УДК 534.16

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРУЖИНАМИ И ДЕМПФЕРАМИ

М. Мухаммадиан

Филиал Исламского университета Азад в г. Горган, Горган, Иран
E-mail: mo.mohammadyan@gmail.com

Предложен модифицированный алгебраический метод решения задач о колебаниях нелинейных осцилляторов. В качестве пробного решения выбираются полиномы, коэффициенты которых определяются из системы алгебраических уравнений. Для расширения области определения решения преобразование Лапласа применяется к решению, полученному алгебраическим методом, затем используется аппроксимация Паде, после чего применяется обратное преобразование Лапласа для получения периодического решения. Предложенный метод используется при решении задач о колебаниях нелинейного осциллятора и задач о поперечных колебаниях гибкой балки со свободно опертыми торцами, нагруженной осевой силой. Проведено сравнение решений, полученных предложенным методом, с численным решением, полученным методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Ключевые слова: алгебраический метод, нелинейный осциллятор, коэффициент затухания, метод Рунге — Кутты.

DOI: 10.15372/PMTF20210109

Введение. В рамках структурной механики и физики изучаются нелинейные явления, которые моделируются поведением осцилляторов, содержащих существенно нелинейные жесткости (пружины) и демпферы (вязкие элементы) [1–4]. Например, исследование поперечных колебаний гибкой балки под действием осевой силы сводится к исследованию нелинейного дифференциального уравнения с нелинейными членами третьего-пятого порядков, учитывающих наличие демпфирующих элементов [5]. Получение аналитических решений таких задач существенно затруднено и зачастую невозможно.

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений предложены различные методы: методы, основанные на частотно-амплитудной формулировке задачи [6–8], минимаксный метод [9, 10], метод гармонического баланса общего остатка [11–14], метод Гамильтона [15, 16], энергетический метод [17, 18] и вариационные методы [19]. Однако большинство предложенных методов неприменимы к неконсервативным системам

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений предложен алгебраический метод (АМ). В этом методе используются только начальные условия, основное дифференциальное уравнение и его производные. В отличие от других методов, таких как метод дифференциальных преобразований [20], метод оптимальных гомотопических возмущений [21, 22] и метод разложения Адомиана [23], АМ легко реализуем. Следует отметить, что

АМ применяется при решении нелинейных дифференциальных уравнений, в частности уравнений задач о колебаниях нелинейных осцилляторов [24–28]. В указанных выше работах в качестве пробного решения дифференциального уравнения выбираются тригонометрические функции, а затем с использованием АМ определяются неизвестные коэффициенты в этом решении. В результате такой процедуры строится система алгебраических уравнений, содержащих синусы и косинусы, которую очень трудно, а иногда невозможно решить. В работе [29] с использованием тригонометрических функций и вариационно-итерационного метода модифицирован АМ [29].

1. Модифицированный алгебраический метод. Основное дифференциальное уравнение и начальные условия записываются в виде

$$f(\ddot{u}, \dot{u}, u) = 0; \tag{1}$$

$$u(0) = A, \qquad \dot{u}(0) = B, \tag{2}$$

где u — функция времени t. Решение уравнения (1) ищется в виде полинома:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n. \tag{3}$$

Решение (3) содержит $n+1$ неизвестных констант, для определения которых необходимо построить $n+1$ уравнений. Для этого должны быть выполнены начальные условия. В результате получаем

$$u\big|_{t=0} = A \;\rightarrow\; a_0 = A, \qquad \dot{u}\big|_{t=0} = B \;\rightarrow\; a_1 = B. \tag{4}$$

Итак, первые две неизвестные константы определяются соотношением (4). Для того чтобы определить остальные $n-1$ констант, подставим решение (3) в уравнение (1) и уравнения, полученные из (1) при его дифференцировании (при этом используются начальные условия и условия, получаемые из них путем дифференцирования):

$$\begin{gathered} f(\ddot{u}(C_i), \dot{u}(C_i), u(C_i)) = 0, \\ f'(\ddot{u}(C_i), \dot{u}(C_i), u(C_i)) = 0, \\ f''(\ddot{u}(C_i), \dot{u}(C_i), u(C_i)) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь C_i — обозначение начальных условий (2). Число производных в системе (5) равно числу неизвестных констант $n-1$. Например, если решение (3) является полиномом четвертой степени, то число неизвестных констант равно пяти, причем две из них определены в соотношениях (4). Для определения трех остальных констант необходимы три уравнения. В соответствии с (5) основное дифференциальное уравнение, его первая и вторая производные являются необходимыми тремя уравнениями.

Таким образом, уравнения (4), (5) являются $n+1$ уравнениями для определения $n+1$ неизвестных констант.

В случае если дифференциальное уравнение (1) описывает поведение осциллятора, решение (3) справедливо только при малых значениях времени, поскольку не является периодическим. Для устранения этого недостатка предлагается следующая простая и эффективная процедура. Сначала к решению (3) применяется преобразование Лапласа:

$$L[u(t)] = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2a_2}{s^3} + \frac{6a_3}{s^4} + \frac{24a_4}{s^5} + \ldots. \tag{6}$$

Затем в уравнении (6) переменная s заменяется переменной $1/t$:

$$g(t) = L[u(t)] = a_0 t + a_1 t^2 + 2a_2 t^3 + 6a_3 t^4 + 24a_4 t^5 + \ldots. \tag{7}$$

С использованием аппроксимации Паде уравнение (7) заменяется рациональной функцией. Аппроксимация Паде $[L/M]$ уравнения (7) строится следующим образом:

$$g(t) = \sum_{i=0}^{L} r_i t^i \Big/ \sum_{i=0}^{M} q_i t^i = \frac{r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots + r_L t^L}{1 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots + q_M t^M} + O(t^{L+M+1}). \qquad (8)$$

Здесь коэффициенты r_i, q_i в числителе и знаменателе определяются таким образом, чтобы функция $g(t)$, аппроксимация Паде $[L/M]$ и их производные имели одни и те же значения в интервале от $t = 0$ до $t = L + M$. С учетом (8) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} g_L q_1 + \ldots + g_{L-M+1} q_M = -g_{L+1}, \\ g_{L+1} q_1 + \ldots + g_{L-M+2} q_M = -g_{L+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{L+M-1} q_1 + \ldots + g_L q_M = -g_{L+M}; \end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{gathered} r_L = g_0, \\ r_1 = g_1 + g_0 q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_L = g_L + g_{L-1} q_1 + \ldots + g_0 q_L. \end{gathered} \qquad (10)$$

Сначала из системы (9) определяются коэффициенты q_i, затем из системы (10) определяются коэффициенты r_i. Полагая $t = 1/s$ и применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (8), получаем модифицированное решение уравнения (1), которое является периодическим.

2. Применение модифицированного алгебраического метода. Для того чтобы показать точность и преимущества предлагаемого метода, рассмотрим несколько примеров.

2.1. *Пример* 1. Рассматривается вращающийся осциллятор с линейными и нелинейными пружинами и демпферами (рис. 1). Нелинейное дифференциальное уравнение движения этого осциллятора имеет вид [30]

$$f(\theta) = \ddot{\theta} + (c_1 + c_2\theta^3)\dot{\theta} + k_1\theta + k_2\theta^3 = 0.$$

Для этого уравнения ставятся следующие начальные условия:

$$\theta(0) = A, \qquad \dot{\theta}(0) = B.$$

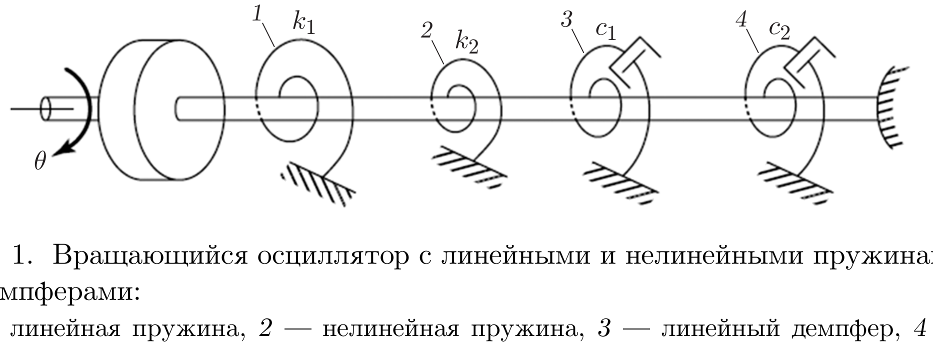

Рис. 1. Вращающийся осциллятор с линейными и нелинейными пружинами и демпферами:
1 — линейная пружина, *2* — нелинейная пружина, *3* — линейный демпфер, *4* — нелинейный демпфер

Принимая для решения представление (3) и полагая $n = 7$, получаем

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_7 t^7. \tag{11}$$

С учетом начальных условий из (11) следует

$$a_0 = A, \qquad a_1 = B. \tag{12}$$

Применяя алгебраический метод (см. уравнения (5)), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&f(\theta(0)):\quad 2a_2 + (c_1 + c_2 a_0^3)a_1 + k_1 a_0 + k_2 a_0^3 = 0,\\
&f'(\theta(0)):\quad 6a_3 + 3c_2 a_0^2 a_1^2 + 2(c_1 + c_2 a_0^3)a_2 + k_1 a_1 + 3k_2 a_0^2 a_1 = 0,\\
&f''(\theta(0)):\quad 24a_4 + 6c_2 a_0 a_1^3 + 18c_2 a_1 a_2 a_0^2 + 6(c_1 + c_2 a_0^3)a_3 + 2k_1 a_2 + 6k_2 a_1^2 a_0 + 6k_2 a_0^2 a_2 = 0,\\
&f'''(\theta(0)):\quad 120a_5 + 6c_2 a_1^4 + 72c_2 a_1^2 a_0 a_2 + 36c_2 a_0^2 a_2^2 + 72c_2 a_0^2 a_1 a_3 + 24(c_1 + c_2 a_0^3)a_4 +\\
&\qquad + 6k_1 a_3 + 6k_2 a_1^3 + 36k_2 a_0 a_1 a_2 + 18k_2 a_0^2 a_3 = 0,\\
&f^4(\theta(0)):\quad 720a_6 + 120c_2 a_1^3 a_2 + 360c_2 a_2^2 a_0 a_1 + 360c_2 a_1^2 a_0 a_3 + 360c_2 a_0^2 a_2 a_3 +\\
&\qquad + 360c_2 a_0^2 a_1 a_4 + 120(c_1 + c_2 a_0^3)a_5 + 24k_1 a_4 + 72k_2 a_1^2 a_2 + 72k_2 a_2^2 a_0 +\\
&\qquad + 144k_2 a_0 a_1 a_3 + 72k_2 a_0^2 a_4 = 0,\\
&f^5(\theta(0)):\quad 5040a_7 + 1080c_2 a_1^2 a_2^2 + 720c_2 a_2^3 a_0 + 2160c_2 a_1^2 a_0 a_4 + 1080c_2 a_0^2 a_3^2 +\\
&\qquad + 2160c_2 a_0^2 a_2 a_4 + 2160c_2 a_0^2 a_1 a_5 + 360k_2 a_2^2 a_1 + 720k_2 a_0 a_2 a_3 + 720k_2 a_0 a_1 a_4 + 120k_1 a_5 +\\
&\qquad + 720(c_1 + c_2 a_0^3)a_6 + 360k_2 a_0^2 a_5 + 720c_2 a_1^3 a_3 + 4320c_2 a_0 a_1 a_2 a_3 + 360k_2 a_1^2 a_3 = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая для рассматриваемого осциллятора $c_1 = 0{,}8$, $c_2 = 0{,}2$, $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, принимая начальные условия $\theta(0) = -0{,}2$, $\dot{\theta}(0) = 1$ и решая систему уравнений (12), (13), находим неизвестные коэффициенты a_i: $a_0 = -0{,}2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0{,}6088$, $a_3 = -1{,}872\,689$, $a_4 = -0{,}039\,373\,5$, $a_5 = 0{,}950\,87$, $a_6 = -0{,}415\,455\,7$, $a_7 = -0{,}047\,308\,3$. Поэтому соотношение (11) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\theta(t) = -0{,}2 + t + 0{,}6088t^2 - 1{,}872\,689t^3 - 0{,}039\,373\,5t^4 +\\
+ 0{,}950\,87t^5 - 0{,}415\,455\,7t^6 - 0{,}047\,308\,3t^7.
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя модифицированный алгебраический метод (МАМ), преобразуем решение (14). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (13), получаем

$$\begin{aligned}
L[\theta(t)] = -\frac{0{,}2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1{,}2176}{s^3} - \frac{11{,}236\,134}{s^4} - \frac{0{,}944\,964}{s^5} + \frac{114{,}1044}{s^6} -\\
- \frac{299{,}128\,104}{s^7} - \frac{238{,}433\,832}{s^8}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Полагая в выражении (15) $s = 1/t$, имеем

$$\begin{aligned}
L[\theta(t)] = -0{,}2t + t^2 + 1{,}2176t^3 - 11{,}236\,134t^4 - 0{,}944\,964t^5 + 114{,}1044t^6 -\\
- 299{,}128\,104t^7 - 238{,}433\,832t^8.
\end{aligned} \tag{16}$$

Применяя аппроксимацию Паде [4/4] к (16) и учитывая, что $t = 1/s$, находим

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{-s^3 + 1{,}5753s^2 - 76{,}4623s + 366{,}6361}{5s^4 + 17{,}1237s^3 + 498{,}37s^2 + 482{,}015\,56s + 4458{,}5078}. \tag{17}$$

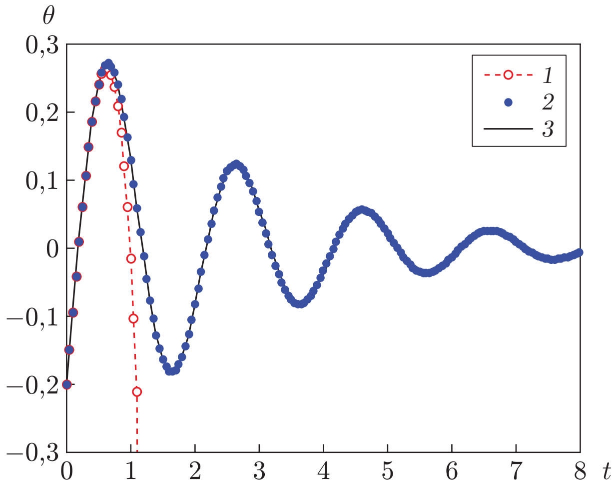

Рис. 2

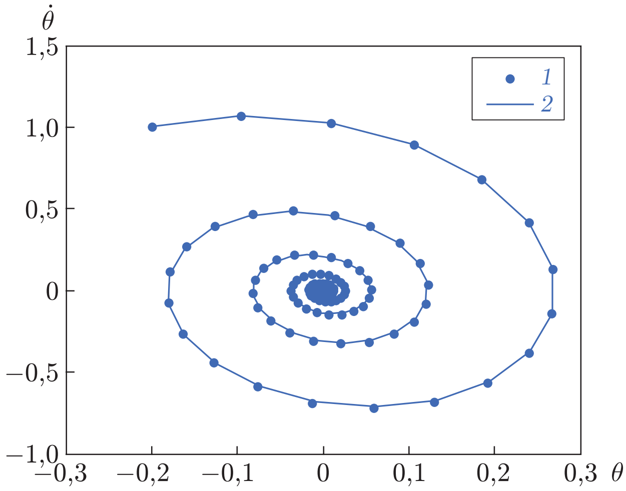

Рис. 3

Рис. 2. Решения задачи 1, полученные с использованием АМ (*1*), МАМ (*2*) и МРК4 (*3*), при $c_1 = 0{,}8$, $c_2 = 0{,}2$, $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $\theta(0) = -0{,}2$, $\dot\theta(0) = 1$

Рис. 3. Фазовые диаграммы в задаче 1, полученные с использованием МАМ (*1*) и МРК4 (*2*), при $c_1 = 0{,}8$, $c_2 = 0{,}2$, $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $\theta(0) = -0{,}2$, $\dot\theta(0) = 1$

Применяя обратное преобразование Лапласа к выражению (17), получаем решение в виде

$$\theta(t) = m_1\,\mathrm{e}^{(-1{,}314\,209-9{,}254\,642i)t} + m_2\,\mathrm{e}^{(-1{,}314\,209+9{,}254\,642i)t} + \\ + m_3\,\mathrm{e}^{(-0{,}398\,161-3{,}169\,678i)t} + m_4\,\mathrm{e}^{(-0{,}398\,161+3{,}169\,678i)t}, \qquad (18)$$

где

$$m_1 = 0{,}000\,157\,67 + 0{,}000\,106\,21i, \qquad m_2 = 0{,}000\,157\,67 - 0{,}000\,106\,21i,$$
$$m_3 = -0{,}100\,157\,67 + 0{,}144\,919\,9i, \qquad m_4 = -0{,}100\,157\,67 - 0{,}144\,919\,9i.$$

Отделяя действительную часть выражения (18), имеем

$$\theta(t) = \mathrm{e}^{-0{,}398\,161t}(n_1\sin(\omega_1 t) + n_2\cos(\omega_1 t)) + \mathrm{e}^{-1{,}314\,21t}(n_3\sin(\omega_2 t) + n_4\cos(\omega_2 t)), \qquad (19)$$

где $n_1 = 0{,}289\,839\,8$; $n_2 = -0{,}200\,315\,34$; $n_3 = 0{,}000\,212\,42$; $n_4 = 0{,}000\,315\,339$; $\omega_1 = 3{,}169\,678$; $\omega_2 = 9{,}254\,642$.

Для того чтобы проверить точность решения (19), полученного с использованием МАМ, проведено его сравнение с численным решением, полученным методом Рунге — Кутты четвертого порядка (МРК4). На рис. 2 приведены зависимости $\theta(t)$, полученные различными методами. На рис. 3 представлены фазовые диаграммы в плоскости $(\theta(t), \dot\theta(t))$. Из зависимостей, приведенных на рис. 2, следует, что решение, полученное с использованием АМ, справедливо только на небольшом начальном интервале времени. Применение МАМ позволяет существенно уточнить решение (см. рис. 2, 3). В табл. 1 приведены решения, полученные с использованием МАМ и МРК4.

2.2. *Пример* 2. На рис. 4 показана гибкая балка со свободно опертыми торцами, на которую действует постоянная осевая сила. Поперечные колебания такой балки описываются дифференциальным уравнением [5]

$$f(t) = \ddot w + (c_1 - c_2 w^2 + c_3 w^4)\dot w + k_1 w - k_2 w^3 - k_3 w^5 = 0, \\ w(0) = A, \qquad \dot w(0) = B. \qquad (20)$$

Таблица 1

Угол поворота $\theta(t)$ и скорость изменения угла поворота $\dot{\theta}(t)$ в задаче 1

t	$\theta(t)$			$\dot{\theta}(t)$		
	МРК4	МАМ	Δ	МРК4	МАМ	Δ_1
0	−0,2000	−0,2000	0	1,0000	1,0000	0
0,5	0,2398	0,2397	0,0003	0,4168	0,4158	0,0024
1,0	0,1314	0,1289	0,0186	−0,6739	−0,6806	−0,0100
1,5	−0,1619	−0,1640	−0,0128	−0,2730	−0,2629	−0,0371
2,0	−0,0876	−0,0828	−0,0540	0,4522	0,4629	0,0237
2,5	0,1087	0,1120	0,0307	0,1819	0,1657	0,0891
3,0	0,0588	0,0531	0,0971	−0,3028	−0,3146	−0,0389
3,5	−0,0728	−0,0765	−0,0506	−0,1222	−0,1040	−0,1491
4,0	−0,0396	−0,0339	−0,1436	0,2026	0,2137	0,0544
4,5	0,0487	0,0521	0,0710	0,0824	0,0649	0,2124
5,0	0,0267	0,0215	0,1917	−0,1355	−0,1450	−0,0698
5,5	−0,0325	−0,0355	−0,0914	−0,0557	−0,0403	−0,2768
6,0	−0,0180	−0,0137	−0,2405	0,0906	0,0983	0,0846
6,5	0,0217	0,0242	0,1115	0,0376	0,0248	0,3416
7,0	0,0121	0,0086	0,2898	−0,0606	−0,0666	−0,0988
7,5	−0,0145	−0,0164	−0,1309	−0,0254	−0,0151	−0,4061
8,0	−0,0082	−0,0054	−0,3391	0,0405	0,0451	0,1123

Примечание. $\Delta = [(\theta_{\text{МРК4}} - \theta_{\text{МАМ}})/\theta_{\text{МРК4}}] \cdot 100$ %, $\Delta_1 = [(\dot{\theta}_{\text{МРК4}} - \dot{\theta}_{\text{МАМ}})/\dot{\theta}_{\text{МРК4}}] \cdot 100$ %.

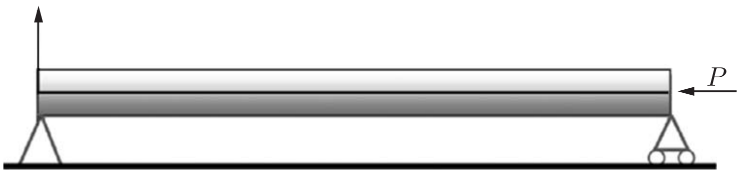

Рис. 4. Свободно опертая гибкая балка, нагруженная осевой силой

Для того чтобы решить задачу (20) с помощью МАМ, аппроксимируем прогиб полиномом третьей степени:

$$w(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \tag{21}$$

Из начальных условий следует

$$w(0) = A \to a_0 = A, \qquad \dot{w}(0) = B \to a_1 = B. \tag{22}$$

Подставляя (21) в дифференциальное уравнение в (20) и в уравнения, полученные путем его дифференцирования, а также используя начальные условия, получаем

$$\begin{gathered} f(w(0)):\quad 2a_2 + (c_1 - c_2 a_0^2 + c_3 a_0^4)a_1 + k_1 a_0 - k_2 a_0^3 - k_3 a_0^5 = 0, \\ f'(w(0)):\quad 6a_3 + (-2c_2 a_0 a_1 + 4c_3 a_0^3 a_1)a_1 + 2(c_1 - c_2 a_0^2 + c_3 a_0^4)a_2 + k_1 a_1 - 3k_2 a_0^2 a_1 - 5k_3 a_0^4 a_1 = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Из уравнений (22), (23) определяются коэффициенты a_i:

$$a_0 = A, \qquad a_1 = B,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}Bc_1 + \frac{1}{2}Bc_2A^2 - \frac{1}{2}Bc_3A^4 - \frac{1}{2}Ak_1 + \frac{1}{2}k_2A^3 + \frac{1}{2}k_3A^5,$$

$$a_3 = \frac{1}{3}Ac_2B^2 - \frac{2}{3}B^2c_3A^3 + \frac{1}{6}Bc_1^2 - \frac{1}{3}Bc_1c_2A^2 + \frac{1}{3}Bc_1c_3A^4 + \frac{1}{6}k_1Ac_1 - \frac{1}{6}c_1k_2A^3 -$$

$$-\frac{1}{6}\,c_1k_3A^5+\frac{1}{6}\,Bc_2^2A^4-\frac{1}{3}\,Bc_2c_3A^6-\frac{1}{6}\,c_2k_1A^3+\frac{1}{6}\,c_2k_2A^5+\frac{1}{6}\,c_2k_3A^7+\frac{1}{6}\,Bc_3^2A^8+$$
$$+\frac{1}{6}\,c_3k_1A^5-\frac{1}{6}\,c_3k_2A^7-\frac{1}{6}\,c_3k_3A^9-\frac{1}{6}\,k_1B+\frac{1}{2}\,Bk_2A^2+\frac{5}{6}\,k_3A^4B.$$

Учитывая начальные условия $w(0)=0{,}2$, $\dot w(0)=0$ и полагая $c_1=2$, $c_2=1{,}5$, $c_3=2{,}5$, $k_1=64$, $k_2=3{,}5$, $k_3=2$, находим

$$w(t)=0{,}2-6{,}3857t^2+4{,}137\,97t^3. \qquad (24)$$

Применим преобразование Лапласа к выражению (24):

$$L[w(t)]=\frac{0{,}2}{s}-\frac{12{,}7714}{s^3}+\frac{24{,}8278}{s^4}. \qquad (25)$$

Заменяя в (25) s на $1/t$, используя аппроксимацию Паде [2/2] и учитывая, что $t=1/s$, получаем

$$\Big[\frac{2}{2}\Big]=\frac{0{,}2s+0{,}3888}{s^2+1{,}944\,02s+63{,}857}. \qquad (26)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к выражению (26), находим решение с помощью МАМ:

$$w(t)=\mathrm{e}^{-0{,}972t}(0{,}024\,51\sin(7{,}9317t)+0{,}2\cos(7{,}9317t)). \qquad (27)$$

На рис. 5 приведена зависимость поперечного прогиба w гибкой балки, нагруженной осевой силой, от времени, на рис. 6 — зависимость скорости поперечного прогиба от поперечного прогиба. Решение, полученное с использованием МАМ, согласуется с численным решением. В табл. 2 приведены решения, полученные с помощью МАМ и МРК4.

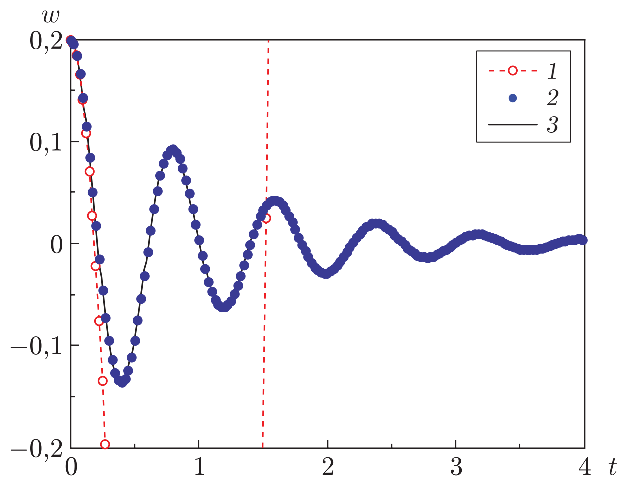

Рис. 5

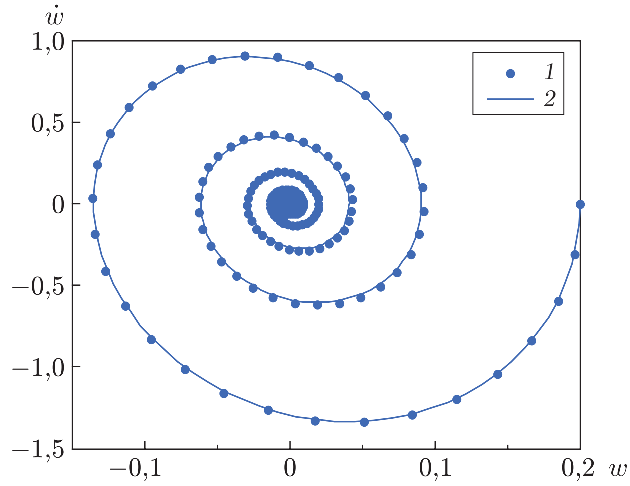

Рис. 6

Рис. 5. Решения задачи 2, полученные с использованием АМ (*1*), МАМ (*2*) и МРК4 (*3*), при $c_1=2$, $c_2=1{,}5$, $c_3=2{,}5$, $k_1=64$, $k_2=3{,}5$, $k_3=2$, $w(0)=0{,}2$, $\dot w(0)=0$

Рис. 6. Фазовые диаграммы в задаче 2, полученные с использованием МАМ (*1*) и МРК4 (*2*), при $c_1=2$, $c_2=1{,}5$, $c_3=2{,}5$, $k_1=64$, $k_2=3{,}5$, $k_3=2$, $w(0)=0{,}2$, $\dot w(0)=0$

Таблица 2

Смещение $w(t)$ и скорость смещения $\dot{w}(t)$ в задаче 2

t	$w(t)$			$\dot{w}(t)$		
	МРК4	МАМ	Δ	МРК4	МАМ	Δ_1
0	0,2000	0,2000	0	0	0	0
0,2	0,0178	0,0176	0,8323	−1,3214	−1,3255	−0,3112
0,4	−0,1348	−0,1360	−0,9209	0,0358	0,0355	0,6561
0,6	−0,0083	−0,0084	−0,8511	0,8857	0,8977	1,3474
0,8	0,0906	0,0902	0,4644	−0,0481	−0,0482	−0,2635
1,0	0,0031	0,0032	0,7025	−0,5926	−0,6013	−1,4783
1,2	−0,0608	−0,0609	−0,1735	0,0484	0,0481	0,5081
1,4	−0,0005	−0,0004	−0,6572	0,3958	0,3905	1,3511
1,6	0,0408	0,0407	0,0868	−0,0432	−0,0432	−0,1021
1,8	−0,0008	−0,0008	−1,1210	−0,2641	−0,2622	−0,7236
2,0	−0,0273	−0,0274	−0,4291	0,0362	0,0357	1,3890
2,2	0,0013	0,0013	0,4495	0,1760	0,1770	0,5603
2,4	0,0183	0,0183	0,2449	−0,0291	−0,0290	−0,3457
2,6	−0,0014	−0,0014	−1,6660	−0,1171	−0,1160	−0,9725
2,8	−0,0122	−0,0123	−0,9588	0,0227	0,0229	0,7304
3,0	0,0013	0,0012	0,7335	0,0779	0,0768	1,3526
3,2	0,0081	0,0082	0,8337	−0,0174	−0,0176	−1,2824

Примечание. $\Delta = [(w_{\text{МРК4}} - w_{\text{МАМ}})/w_{\text{МРК4}}] \cdot 100\ \%$, $\Delta_1 = [(\dot{w}_{\text{МРК4}} - \dot{w}_{\text{МАМ}})/\dot{w}_{\text{МРК4}}] \cdot 100\ \%$.

В рассматриваемом примере можно получить эквивалентную систему линейных уравнений. Решение (27) можно записать в следующей форме:

$$w(t) = 0{,}2015\,\mathrm{e}^{-0{,}972t} \sin(7{,}9317t + 1{,}4489). \tag{28}$$

В то же время решение задачи для осциллятора с линейным демпфером имеет вид

$$x(t) = C\,\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t + \Phi). \tag{29}$$

Из решения (28), (29) следует

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 7{,}9317, \qquad \xi\omega_n = 0{,}972.$$

Отсюда получаем значение для коэффициента демпфирования (затухания) $\xi = 0{,}1216$.

Заключение. В работе предложен модифицированный алгебраический метод, с использованием которого решены задачи о колебаниях существенно нелинейных осцилляторов. Решения представлены в виде зависимостей осциллирующих величин от времени и фазовых диаграмм. Установлено, что полученные аналитические решения хорошо согласуются с численными решениями, полученными с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Предложенный метод легко реализуется и может быть использован при решении других инженерных задач о колебаниях осцилляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tian Z., Jiang J.** An active nonlinear controller emulating a pendulum-type auto-parametric vibration absorber // J. Vibrat. Engng Technol. 2020. V. 8. P. 555–566.
2. **Laoye J. A., Roy-Layinde T. O., Omoteso K. A., et al.** Vibrational resonance in a higher-order nonlinear damped oscillator with rough potential // Pramana. 2019. V. 93. 102.

3. **Dou C., Fan J., Li C., et al.** On discontinuous dynamics of a class of friction-influenced oscillators with nonlinear damping under bilateral rigid constraints // Mechanism Machine Theory. 2020. V. 147. 103750.
4. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Accurate investigation of lateral vibrations of a quintic nonlinear beam on an elastic foundation: Using an exact formulation of the beam curvature // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 6. P. 1066–1074.
5. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** An analytic solution of transversal oscillation of quintic non-linear beam with homotopy analysis method // Intern. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. P. 777–784.
6. **Rafieipour H., Lotfavar A., Masroor A.** Analytical approximate solution for nonlinear vibration of microelectromechanical system using He's frequency amplitude formulation // Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Engng. 2013. V. 37. P. 83–90.
7. **Hu G.-F., Deng S.-X.** Ren's frequency-amplitude formulation for nonlinear oscillators // J. Low Frequency Noise, Vibrat. Active Control. 2019. V. 38. P. 1681–1686.
8. **Akbarzade M., Farshidianfar A.** Nonlinear dynamic analysis of an elastically restrained cantilever tapered beam // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 3. P. 556–565.
9. **Ganji S. S., Ganji D. D., Davodi A. G., Karimpour S.** Analytical solution to nonlinear oscillation system of the motion of a rigid rod rocking back using max-min approach // Appl. Math. Modelling. 2010. V. 34. P. 2676–2684.
10. **Yazdi M. K., Ahmadian H., Mirzabeigy A., Yildirim A.** Dynamic analysis of vibrating systems with nonlinearities // Comm. Theor. Phys. 2012. V. 57. P. 183–187.
11. **Mohammadian M., Shariati M.** Approximate analytical solutions to a conservative oscillator using global residue harmonic balance method // Chinese J. Phys. 2017. V. 55. P. 47–58.
12. **Mohammadian M.** Application of the global residue harmonic balance method for obtaining higher-order approximate solutions of a conservative system // Intern. J. Appl. Comput. Math. 2017. V. 3. P. 2519–2532.
13. **Mohammadian M., Akbarzade M.** Higher-order approximate analytical solutions to nonlinear oscillatory systems arising in engineering problems // Arch. Appl. Mech. 2017. V. 87. P. 1317–1332.
14. **Mohammadian M., Pourmehran O., Ju P.** An iterative approach to obtaining the nonlinear frequency of a conservative oscillator with strong nonlinearities // Intern. Appl. Mech. 2018. V. 54. P. 470–479.
15. **Forsat M.** Investigating nonlinear vibrations of higher-order hyper-elastic beams using the Hamiltonian method // Acta Mech. 2020. V. 231. P. 125–138.
16. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Changizian M.** Effect of the amplitude of vibrations on the pull-in instability of double-sided actuated microswitch resonators // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56, N 2. P. 304–312.
17. **Khan Y., Mirzabeigy A.** Improved accuracy of He's energy balance method for analysis of conservative nonlinear oscillator // Neural Comput. Applic. 2014. V. 25. P. 889–895.
18. **Sierra-Porta D.** Analytic approximations to Liénard nonlinear oscillators with modified energy balance method // J. Vibrat. Engng Technol. 2020. V. 8. P. 713–720.
19. **Yazdi M. K., Mirzabeigy A., Abdollahi H.** Nonlinear oscillators with non-polynomial and discontinuous elastic restoring forces // Nonlinear Sci. Lett. A. 2012. V. 3. P. 48–53.
20. **Hatami M., Hatami J., Jafaryar M., Domairry G.** Differential transformation method for Newtonian and non-Newtonian fluids flow analysis: comparison with HPM and numerical solution // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Engng. 2016. V. 38. P. 589–599.
21. **Sheikholeslami M., Ganji D. D.** Magnetohydrodynamic flow in a permeable channel filled with nanofluid // Sci. Iran. B. 2014. V. 21. P. 203–212.

22. **Cao D. X., Wang J. J., Gao Y. H., Zhang W.** Free vibration of variable width beam: Asymptotic analysis with FEM simulation and experiment confirmation // J. Vibrat. Engng Technol. 2019. V. 7. P. 235–240.
23. **Dalir N., Nourazar S. S.** On absolute linear instability analysis of plane Poiseuille flow by a semi-analytical treatment // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Engng. 2015. V. 37. P. 495–505.
24. **Akbari M. R., Ganji D. D., Majidian A., Ahmadi A. R.** Solving nonlinear differential equations of Vanderpol, Rayleigh and Duffing by AGM // Frontiers Mech. Engng. 2014. V. 9. P. 177–190.
25. **Meresht N. B., Ganji D. D.** Solving nonlinear differential equation arising in dynamical systems by AGM // Intern. J. Appl. Comput. Math. 2017. V. 3. P. 1507–1523.
26. **Mirgolbabaee H., Ledari S. T., Gaji D. D.** New approach method for solving Duffing-type nonlinear oscillator // Alexandria Engng J. 2016. V. 55. P. 1695–1702.
27. **Mirgolbabaee H., Ledari S. T., Ganji D. D.** An assessment of a semi analytical AG method for solving nonlinear oscillators // New Trends Math. Sci. 2016. V. 4. P. 283–299.
28. **Akbari M., Nimafar M., Ganji D., Chalmiani H. K.** Investigation on non-linear vibration in arched beam for bridges construction via AGM method // Appl. Math. Comput. 2017. V. 298. P. 95–110.
29. **Mohammadian M., Shariati M.** Application of AG method and its improvement to nonlinear damped oscillators // Sci. Iran. 2020. V. 27. P. 203–214.
30. **Bayat M., Bayat M., Pakar I.** Analytical study of nonlinear vibration of oscillators with damping // Earthquakes Structures. 2015. V. 9. P. 221–232.

Поступила в редакцию 11/II 2020 г.,
после доработки — 22/IV 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.