

имеет порядок  $O(Re^{-1/2})$ . Поэтому вычисление следующих членов ряда (9) приведет к дальнейшему улучшению формулы (11) лишь с получением решения для концентрации в области задней критической точки.

Поступила 27 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1969, № 6.
3. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалок А. Т. Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 2.
4. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Pt 1. Low speed flows. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 23, pt 2.
5. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 18, pt 3.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
7. Sin P. H., Newman J. Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1967, vol. 10, p. 1749—1756.

УДК 532.529.5 : 66.065.5

### УРАВНЕНИЯ ТЕРМОГИДРОМЕХАНИКИ ДВУХФАЗНОЙ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

И. Н. Дорохов, В. В. Кафаров, Э. М. Кольцова

(Москва)

1. Рассмотрим гетерогенную смесь двух фаз, из которых первая фаза несущая, а вторая присутствует в виде отдельных твердых частиц различных размеров, непосредственными взаимодействиями между которыми можно пренебречь. Примем гипотезу квазигомогенности [1—3]: расстояния, на которых параметры течения смеси меняются существенно, много больше размеров самих частиц и расстояний между ними. В каждой точке объема, занятого смесью, можно ввести объемные содержания фаз  $\alpha_i$  и средние плотности  $\rho_i$ , причем

$$\rho = \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i,$$

где индекс 1 относится к несущей фазе, а 2 — ко всей дисперсной фазе;  $\rho_i$  — плотность  $i$ -й составляющей смеси. Дисперсность второй фазы характеризуется функцией  $f(r)$ , так что  $f(r)dr$  — число частиц в единице объема смеси, размеры (объемы) которых находятся в пределах от  $r$  до  $r + dr$ . Плотность второй фазы непрерывно распределена на отрезке  $[0, R]$ , где

$R$  — размер (объем) наибольшей частицы. Следовательно, можно записать

$$\alpha_2 = \int_0^R f(r) r dr, \quad \rho_2 = \int_0^R \rho_2^0 f(r) r dr,$$

где  $\rho_2^0$  — истинная плотность дисперсной фазы. Полагаем  $f(0) = f(R) = 0$ . Предполагается, что частиц всех размеров достаточно много, так что можно принять, что несущая фаза и любое подмножество частиц (размеры которых принадлежат отрезку  $[r', r'']$ , где  $r'$  и  $r''$  — любые значения из множества  $[0, R]$ ) — континуумы, заполняющие один и тот же объем. Несущая фаза описывается моделью вязкой жидкости. При этом в качестве тензоров поверхностных сил  $\sigma_i^{hl}$  и тензоров вязких напряжений  $\tau_i^{hl}$  примем [1, 3]

$$\sigma_1^{hl} = -p_1 \delta^{hl} + \tau_1^{hl}, \quad \sigma_2^{hl} = 0, \quad \tau_1^{hl} = \lambda_1 \nabla v_1 + 2\mu_1 e_1^{hl},$$

где  $\delta^{hl}$  — символ Кронекера;  $\lambda_1, \mu_1$  — коэффициенты вязкости;  $e_1^{hl}$  — тензор скоростей деформаций несущей фазы.

2. Введем фазовое пространство с координатами  $x^1, x^2, x^3, r$ , где  $x^1, x^2, x^3$  — координаты обычного евклидова пространства;  $r$  — объем частицы. Выделим в фазовом пространстве фиксированный объем  $V^*$ , ограниченный поверхностью  $S^*$ . Тогда уравнение сохранения массы для дисперсной фазы можно записать в виде

$$(2.1) \quad \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2^0 f r) dV^* = - \int_{S^*} \rho_2^0 f r v^n dS^* + \int_{V^*} \rho_2^0 f (\lambda - \mu) dV^* \\ (dV^* = dV dr = dx^1 dx^2 dx^3 dr).$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.1) характеризует приток массы через поверхность  $S^*$ , где  $v$  — вектор, координаты которого  $dx^1/dt, dx^2/dt, dx^3/dt, dr/dt$ ; второе — характеризует изменение массы вещества в объеме  $V^*$  непосредственно за счет фазовых переходов. Фазовые переходы условно разбиты на две реакции: рост частиц (например, рост кристаллов при кристаллизации) с объемной скоростью  $\lambda$  и растворение частиц с объемной скоростью  $\mu$ , так что  $dr/dt = \lambda - \mu = \eta$ , где  $\eta$  — наблюдаемая скорость изменения объема частиц ( $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ ).

Уравнения сохранения массы несущей фазы и массы соли в растворе в объеме  $V$  обычного евклидова пространства с координатами  $x^1, x^2, x^3$ , ограниченного поверхностью  $S$ , имеют вид

$$(2.2) \quad \int_V \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV = - \int_S \rho_1 v_1^n dS - \int_V \int_0^R (\lambda - \mu) \rho_2^0 f dr dV;$$

$$(2.3) \quad \int_V \frac{\partial (\rho_1 c)}{\partial t} dV = - \int_S \rho_1 c v_1^n dS - \int_V m \int_0^R (\lambda - \mu) \rho_2^0 f dr dV,$$

где  $v_1$  — скорость несущей фазы;  $c$  — массовая концентрация соли в растворе;  $m$  — отношение молекулярных весов безводной соли к кристаллогидрату.

Уравнения сохранения импульса для дисперсной и несущей фаз имеют вид

$$(2.4) \quad \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2^0 r f v_2) dV^* = - \int_{S^*} \rho_2^0 f r v_2 v^n dS^* + \int_{S^*} \sigma_2^n dS^* + \int_{V^*} \rho_2^0 f r F_2 dV^* + \\ + \int_{V^*} f r \rho_2^0 r_{(12)} dV^* + \int_{V^*} [\rho_2^0 \lambda f v_{(12)} - \rho_2^0 \mu f v_{(21)}] dV^*;$$

$$(2.5) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 v_1) dV = - \int_S \rho_1 v_1 v_1^n dS + \int_S \sigma_1^n dS + \int_V \rho_1 F_1 dV + \\ + \int_{V_0}^R \rho_2^0 f r_{(12)} dr dV - \int_V \left[ \int_0^R (\rho_2^0 \lambda f v_{(12)} - \rho_2^0 \mu f v_{(21)}) dr \right] dV.$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (2.4), (2.5) дают приток импульса соответствующей фазы через поверхность  $S^*$  и  $S$ ;  $v_2(r)$  — скорость частиц размером  $r$ ; вторые и третьи слагаемые — воздействия внешних поверхностных и массовых сил, характеризующихся соответственно тензорами  $\sigma_1^{kl}$ ,  $\sigma_2^{kl}$  и векторами  $F_1$ ,  $F_2$ , причем  $\sigma_2^{kl} = 0$ ; последнее слагаемое характеризует изменение импульса соответствующей фазы за счет фазовых переходов;  $v_{12}(r)$  — скорость несущей фазы на поверхности контакта фаз;  $v_{(21)}(r)$  — скорость частиц размером  $r$  на поверхности контакта фаз. Силу взаимодействия между несущей фазой и включениями представим в виде [1]

$$\int_0^R \rho_2^0 f r r_{(12)} dr = - \int_0^R r f \nabla p_1 dr + \int_0^R \rho_2^0 f r f_{(12)} dr \\ \left( \int_0^R \rho_2^0 f r r_{(12)} dr = - \int_0^R \rho_2^0 f r r_{(21)} dr \right),$$

здесь первое слагаемое справа связано с воздействием поля давления на включения (архимедова сила), а второе — характеризует силовое взаимодействие фаз и обусловлено тремя эффектами [1]:  $f_{(12)} = f_f + f_m + f_r$ , где  $f_f$  — составляющая, возникающая из-за вязких сил при взаимодействии между фазами;  $f_m$  — сила, связанная с эффектом «присоединенных масс»;  $f_r$  — сила Магнуса или Жуковского.

Применив теорему Гаусса — Остроградского к уравнениям (2.4) — (2.5), получим описание системы в форме дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla (f v_2) + \frac{\partial}{\partial r} (f \eta) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_1 v_1) = - \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr; \quad \rho_1 \frac{\partial c}{\partial t} = (c - m) \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr;$$

$$(2.6) \quad g \frac{D_2 v_2}{D_2^*} = - f r \nabla p_1 + g f_{(12)} + g F_2 + \rho_2^0 f \lambda (v_{(12)} - v_2) - \rho_2^0 f \mu (v_{(21)} - v_2);$$

$$(2.7) \quad \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = - \alpha_1 \nabla p_1 + \nabla^k \tau_1^k - \int_0^R \rho_2^0 f r f_{(12)} dr + \rho_1 F_1 - \int_0^R \rho_2^0 f [\lambda (v_{(12)} - v_1) - \\ - \mu (v_{(21)} - v_1)] dr,$$

где

$$g = \rho_2^0 r f; \quad d_1/dt = \partial/\partial t + v_1^k (\partial/\partial x^k);$$

$$D_2/Dt = \partial/\partial t + v_2^k (\partial/\partial x^k) + \eta (\partial/\partial r).$$

3. Примем гипотезу аддитивности основных термодинамических характеристик по массам фаз. Аналогично [1, 4] введем поверхностную составляющую внутренней энергии смеси, учитывающую поверхностный эффект (по Гиббсу). Тогда можно записать

$$\rho u = \rho_1 u_1 + \int_0^{\bar{r}} (\rho_2^0 f r u_2 + f u_\sigma^1) dr;$$

$$\rho K = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \int_0^R \rho_2^0 r f \frac{v_2^2}{2} dr,$$

где  $\rho = \rho_1 + \int_0^{\bar{r}} \rho_2^0 f r dr$ ;  $u$ ,  $u_1$  — удельные внутренние энергии всей смеси и несущей фазы соответственно;  $u_2(r)$  — удельная внутренняя энергия частиц размером  $r$ ;  $u_\sigma^1 = 4\pi a^2 u_\sigma$ ;  $u_\sigma^1$  и  $u_\sigma$  — поверхностные энергии, приходящиеся соответственно на одно включение и единицу поверхности;  $a$  — радиус частиц;  $K$  — кинетическая энергия смеси, определенная без учета мелкомасштабных эффектов (которыми в данной работе будем пренебрегать).

Проводя рассуждения и выполняя выкладки, аналогичные подробно приводимым в работах [1, 3], получим дифференциальные уравнения для внутренних энергий несущей фазы, частиц размером  $r$  и поверхности раздела фаз

(3.1)

$$\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = \int_0^R \{ -\rho_2^0 f \lambda x_{1(12)}(r) - \rho_2^0 f \mu x_{1(21)}(r) - q_{1\sigma}(r) \} dr - \nabla q_1 + \rho_1 Q_1 +$$

$$+ \tau_1^{kl} e_1^{kl} + \int_0^R \kappa_1 g f_{(12)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dr + \int_0^R \left\{ -\rho_2^0 f \lambda \frac{(\mathbf{v}_{(12)} - \mathbf{v}_1)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \rho_2^0 f \mu \frac{(\mathbf{v}_{(21)} - \mathbf{v}_1)^2}{2} \right\} dr;$$

(3.2)

$$g \frac{D_2 u_2}{Dt} = -\rho_2^0 f \lambda x_{2(12)}(r) - \rho_2^0 f \mu x_{2(21)}(r) - q_{2\sigma}(r) + g Q_2 + \kappa_2 g f_{(12)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) +$$

$$+ \rho_2^0 f \lambda \frac{(\mathbf{v}_{(12)} - \mathbf{v}_2)^2}{2} - \rho_2^0 f \mu \frac{(\mathbf{v}_{(21)} - \mathbf{v}_2)^2}{2};$$

(3.3)

$$f \frac{D_2 u_\sigma^1}{Dt} = -\rho_2^0 f \lambda x_{\sigma(12)}(r) - \rho_2^0 f \mu x_{\sigma(21)}(r) +$$

$$+ q_{1\sigma}(r) + q_{2\sigma}(r) + f \lambda \frac{2\sigma_S}{a} - f \mu \frac{2\sigma_S}{a},$$

где  $x_{i(12)}(r)$ ,  $x_{i(21)}(r)$  — потоки тепла от  $i$ -й фазы к веществу, терпящему превращение из  $i$ -й фазы в частицы с размером  $r$  и из частиц размером  $r$  в  $i$ -ю фазу соответственно ( $i = 1, 2, \sigma$ );  $q_{2\sigma}(r)$ ,  $q_{1\sigma}(r)$  — потоки тепла,

отнесенные к единице объема смеси, от частиц размером  $r$  к поверхности раздела фаз и от несущей фазы к поверхности раздела фаз соответственно;  $\mathbf{q}_1$  — внешний поток тепла (теплопроводность,  $\mathbf{q}_1 = -\lambda_2 \nabla T_1$ ,  $\lambda_2$  — коэффициент теплопроводности материала 1-й фазы);  $gQ_2$ ,  $\rho_1 Q_1$  — мощности объемных источников тепла; коэффициент  $\kappa_i(r)$  показывает долю кинетической энергии смеси из-за силового взаимодействия между несущей фазой и частицами размером  $r$ , переходящую непосредственно во внутреннюю энергию  $i$ -й фазы ( $\kappa_1(r) + \kappa_2(r) = 1$ );  $\sigma_S$  — поверхностное натяжение межфазной границы.

Выделим фиксированный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . По аналогии с [2] определим понятие субстанциональной производной полной энергии смеси  $E$ , представляющей изменение полной энергии, приходящейся на единицу фиксированного в пространстве объема смеси, за вычетом изменения, связанного с притоком массы через границы выделенного объема:

$$(3.4) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) dV = \int_S \left\{ \rho_1 \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_1^n + \right. \\ \left. + \int_0^R \left[ g \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2^n + f u_\sigma^1 v_2^n \right] dr \right\} dS + \rho \frac{dE}{dt}.$$

После применения к (3.4) формулы Гаусса — Остроградского получим

$$(3.5) \quad \rho \frac{dE}{dt} = \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \int_0^R \left\{ g \frac{d_2}{dt} \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) + f \frac{d_2 u_\sigma^1}{dt} \right\} dr + \\ + \int_0^R \left\{ \left[ u_\sigma^1 \left( -\frac{\partial}{\partial r} (f\lambda) + \frac{\partial}{\partial r} (f\mu) \right) \right] + \left[ (-\rho_2^0 f\lambda + \rho_2^0 f\mu) \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[ \rho_2^0 r \left( -\frac{\partial}{\partial r} (f\lambda) + \frac{\partial}{\partial r} (f\mu) \right) \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] \right\} dr.$$

Исходя из определения (3.5) уравнений движения (2.6), (2.7) и уравнений для составляющих энергии смеси (3.1)—(3.3), получим явное выражение для субстанциональной производной полной энергии смеси

$$(3.6) \quad \rho \frac{dE}{dt} = \int_0^R -\rho_2^0 f \lambda (u_1 - u_2 + x_{2(12)}(r) + x_{1(12)}(r) + \\ + x_{\sigma(12)}(r) + \frac{p_1}{\rho_1^0} - \frac{p_2}{\rho_2^0} - \frac{2\sigma_S}{\rho_2^0 a}) dr + \int_0^R \rho_2^0 f \mu [u_1 - u_2 - \\ - (x_{1(21)}(r) + x_{2(21)}(r) + x_{\sigma(21)}(r)) + \frac{p_1}{\rho_1^0} - \frac{p_2}{\rho_2^0} - \frac{2\sigma_S}{\rho_2^0 a}] dr - \\ - \nabla (\alpha_1 F_1 \mathbf{v}_1) - \int_0^R \nabla \left( \frac{g}{\rho_2^0} p_1 \mathbf{v}_2 \right) dr + \nabla^k v_1^k v_1^l - \\ - \nabla \mathbf{q}_1 + \rho_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{v}_1 + \int_0^R g \mathbf{F}_2 \mathbf{v}_2 dr + \rho_1 Q_1 + \int_0^R g Q_2 dr -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^R \rho_2^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ f \lambda r \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dr + \int_0^R \rho_2^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ f \mu r \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dr + \\
& + \int_0^R \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} (f \lambda u_\sigma^1) + \frac{\partial}{\partial r} (f \mu u_\sigma^1) \right\} dr.
\end{aligned}$$

В силу определения  $f$  последние три слагаемых равны нулю. Кроме того, по смыслу  $dE/dt$  следует, что изменение полной энергии смеси определяется только внешним воздействием. Поэтому выражения в правой части уравнения (3.6) (типа источников энергии из-за фазовых переходов) должны равняться нулю. Вводя энтальпии фаз ( $i_i = u_i + p_i/\rho_i^0$ ,  $i = 1, 2$ ), получим

$$\begin{aligned}
x_{1(12)} + x_{2(12)} + x_{\sigma(12)} &= i_2 - i_1 + \frac{2\sigma_S}{\rho_2^0 a}, \\
x_{1(21)} + x_{2(21)} + x_{\sigma(21)} &= i_1 - i_2 - \frac{2\sigma_S}{\rho_2^0 a}.
\end{aligned}$$

Конкретизация модели требует определения энергий  $x_{k(ij)}$ . Эти дополнительные соотношения будем постулировать

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad x_{1(12)} &= x_{2(12)} = x_{1(21)} = x_{2(21)} = 0, \\
x_{\sigma(12)} &= -x_{\sigma(21)} = i_2 - i_1 + 2\sigma_S/\rho_2^0 a.
\end{aligned}$$

Согласно соотношениям (3.7), роль источника или стока тепла, необходимого для фазовых превращений, отводится поверхностной фазе.

4. Непосредственно кристаллизация обычно рассматривается как процесс, происходящий в два последовательных этапа [5]: перенос вещества из несущей фазы к поверхности растущей грани кристалла и собственно процесс кристаллизации, т. е. включение структурных частиц растворенного вещества в кристаллическую решетку. Первый этап можно описать с помощью уравнения внешней массоотдачи

$$(4.1) \quad \rho_2^0 \eta = \beta F_s (c - c^*),$$

где  $c, c^*$  — концентрация вещества в основной массе раствора и у поверхности кристалла;  $\beta$  — коэффициент массоотдачи;  $F_s$  — поверхность кристалла.

Масса, подошедшая к границе кристалла, должна перейти в него за счет реакции на поверхности, т. е.

$$(4.2) \quad \rho_2^0 \eta = \beta_K F_s (c^* - c_p)^n,$$

где  $c_p$  — равновесная концентрация, соответствующая температуре у поверхности кристалла  $T_\sigma(r)$ ;  $\beta_K(T_2(r), T_\sigma(r))$  — коэффициент скорости кристаллизации;  $n$  — порядок кинетической «реакции».

Из уравнений (4.1), (4.2) можно определить  $c^*$ , а затем, подставив  $c^*$  в уравнение (4.1), определить скорость роста кристалла. Например, если  $n = 1$  (в случае «реакции» первого порядка), то

$$\rho_2^0 \eta = \frac{\beta \beta_K}{\beta + \beta_K} F_s (c - c_p).$$

Аналогично [1] примем  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 0$ , т. е. будем полагать, что доля кинетической энергии из-за силового взаимодействия несущей и дисперсной фаз переходит непосредственно во внутреннюю энергию несущей фазы. Можно считать, что на поверхности контакта фаз выполняется соотношение

$$(4.3) \quad \mathbf{v}_{(21)}(r) = \mathbf{v}_{(12)}(r) = \mathbf{v}_2(r).$$

Важно отметить, что при принятых соотношениях (3.7), (4.3) отпадает необходимость введения условных скоростей роста кристалла и его растворения  $\lambda$ ,  $\mu$ . В этом случае все эффекты можно учесть действительной скоростью роста кристалла  $\eta = \lambda - \mu$ .

Таким образом, полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_1) &= - \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f \mathbf{v}_2) + \frac{\partial}{\partial r}(f \eta) = 0, \\ \rho_1 \frac{d_1 \mathbf{v}_1}{dt} &= - \alpha_1 \nabla P_1 + \nabla^k \tau_1^k - \int_0^R g \mathbf{f}_{(12)} dr + \rho_1 \mathbf{F}_1 - \int_0^R \rho_2^0 f \eta (\mathbf{v}_2(r) - \mathbf{v}_1) dr, \\ \frac{D_2}{Dt} \mathbf{v}_2(r) &= - \frac{\nabla P_1}{\rho_2^0} + \mathbf{f}_{(12)}(r) + \mathbf{F}_2(r), \\ \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} &= \tau_1^i e_1^i + \int_0^R g \mathbf{f}_{(12)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dr - \\ &- \int_0^R \rho_2^0 f \eta \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2}{2} dr - \int_0^R q_{1\sigma}(r) dr + \nabla \mathbf{q}_1 + \rho_1 Q_1, \\ g \frac{D_2 u_2}{Dt} &= - q_{2\sigma}(r) + g Q_2(r), \quad f \frac{D_2 u_\sigma}{Dt} = q_{1\sigma}(r) + q_{2\sigma}(r) - \rho_2^0 f \eta (i_2 - i_1), \\ [\rho_1^0(c) &= (\rho_1^0)_{c=0}/(1-c), \quad \alpha_1 + \int_0^R r f dr = 1, \\ \rho_1 &= \rho_1^0 \alpha_1, \quad g = \rho_2^0 f r, \quad \rho_2^0 = \text{const}, \\ \frac{d_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_1^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \frac{D_2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_2^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \eta \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

При  $n = 1$

$$\rho_2^0 \eta = \frac{\beta \beta_\kappa}{\beta + \beta_\kappa} F_s (c - c_p(r)),$$

$$c_p = c_p(T_1); \quad \beta_\kappa^* = \beta_\kappa(T_2(r), T_\sigma(r)).$$

Величину  $\beta$  можно определить из уравнения

$$\text{Nu} = A \text{Pr} \text{Re}_{(12)},$$

где

$$\text{Re}_{(12)} = (|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/v_1) a_1; \quad \text{Pr} = v_1/D_1; \quad \text{Nu} = \beta a_1/D_1;$$

$v_1$  — вязкость раствора;  $D_1$  — коэффициент диффузии в несущей фазе;  $q_{i\sigma} = 4\pi a^2 \beta_i (T_i - T_\sigma)$ ,  $\beta_i$  — коэффициент теплоотдачи от поверхности

раздела фаз к  $i$ -й фазе;  $\vec{q}_1 = -\lambda_2 \nabla T_1$ ;

$$i_1 = \frac{c}{m} \Delta h + \left(1 - \frac{c}{m}\right) i_B + \frac{c}{m} i_{(21)} \quad (\text{согласно [6]}); \quad \Delta h = \Delta h(T_1, c) -$$

теплота растворения при концентрации насыщения;  $i_B = \Delta H_{B(298)} +$

$$+ \int_{298}^{T_1} c_B dT_1; \quad i_{(21)} = \Delta H_{2(298)} + \int_{298}^{T_1} c_2 dT_1; \quad i_2 = \Delta H_{2(298)} + \int_{298}^{T_2} c_2 dT_2; \quad \Delta H_{B(298)},$$

$\Delta H_{2(298)}$  — стандартные энтальпии воды и твердого вещества;  $c_B, c_2$  — удельные теплоемкости воды и вещества частиц соответственно.

Если пренебречь величиной  $D_2 u_\sigma^1 / Dt$ , то уравнение притока тепла к поверхности раздела фаз переходит в конечное алгебраическое уравнение относительно  $T_\sigma$

$$4\pi a^2 f [\beta_1 (T_1 - T_\sigma) + \beta_2 (T_2 - T_\sigma)] - \rho_2^0 f \eta (i_2 - i_1) = 0.$$

Мanuscript 21 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. — ПММ, 1971, т. 35, № 3.
2. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. — ПММ, 1970, т. 34, № 6.
3. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами теплопереноса. — ПММ, 1975, т. 39, № 3.
4. Эпштейн П. С. Курс термодинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. Матусевич Л. Н. Кристаллизация из растворов в химической промышленности. М., «Химия», 1968.
6. Мищенко К. П., Полторацкий Г. М. Вопросы термодинамики и строения водных и неводных растворов электролитов. Л., «Химия», 1968.

УДК 532.135.3:532.546

### О ТЕЧЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ НЬЮТОНОВСКОЙ И БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТЕЙ В КОЛЬЦЕВОМ КАПИЛЛЯРЕ

И. Б. Муратов

(Душанбе)

Закономерности движения ньютоновской [1, 2], вязкопластической [3—5] и неньютоновской [6] жидкостей в кольцевом капилляре (в зазоре между двумя соосными цилиндрическими трубками) были получены ранее. В данной работе решена задача об установившемся горизонтальном тече-