

8. Рыбаков А. П., Ментешов Е. В., Шавков В. П. Действие взрыва листового заряда ВВ на металлические пластины.— ФГВ, 1968, т. 4, № 1.
9. McQueen R. G., Marsh S. P. Ultimate yield strength of copper.— «J. Appl. Phys.», 1962, vol. 33, N 2.
10. Бутчер Б. М., Баркер А. М., Мансон Д. И., Ландерген С. Д. Влияние предистории напряженного состояния на нестационарный откол в металлах.— «Ракет. техн. и космонавтика», 1964, № 6.
11. Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж. Взрывная обработка металлов. М., «Мир», 1966.
12. Скидмор И. С. Ударные волны в твердых телах.— Сб. пер. Механика, 1968, № 4.
13. Иванов А. Г. Откол в квазиакустическом приближении.— ФГВ, 1975, т. 11, № 3.
14. Слудкер А. И. Прочность и время.— «Природа», 1965, № 8.
15. Бетехтин В. И., Журков С. П. Временная и температурная зависимость прочности твердых тел.— «Проблемы прочности», 1974, т. 3, № 2.

УДК 624.074.4

ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ИНТЕНСИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

А. В. Маркин

(Новосибирск)

Стержень, на который действует постоянная интенсивная нагрузка [1], можно заменить системой с одной степенью свободы, если движение изучается на достаточно большом отрезке времени [2]. При рассмотрении движения под действием аperiодической интенсивной нагрузки стержень аппроксимируется системой с большим числом степеней свободы [3].

Процесс выпучивания упругого однородного стержня при переменном интенсивном нагружении описывается уравнением

$$(1) \quad EIw_{xxxx} + N(t)w_{xx} + \rho Fw_{tt} = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0,$$

где w — нормальный прогиб; x и t — продольная координата и время; L — длина стержня; ρ — плотность материала стержня; F и I — постоянная площадь поперечного сечения и изгибная жесткость стержня; E — модуль Юнга; $N(t)$ — заданная переменная продольная сила (фиг. 1); $f(x)$ — функция, определяемая заданными малыми возмущениями или несовершенствами.

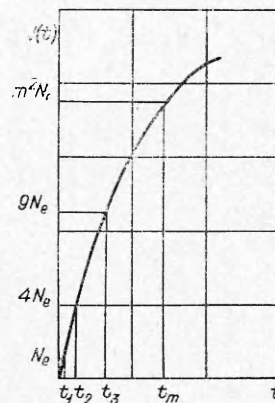
Заданная продольная сила $N(t)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией времени. Она возрастает от нуля и пробегает последовательно значения, равные критическим значениям статической задачи $N(t) = m^2 N_e$, $N_e = \pi^2 EIL^{-2}$ ($m = 1, 2, \dots$).

Предположим, что шарнирно-опертый стержень до нагружения находился в покое. Тогда начальные и граничные условия примут вид

$$(2) \quad w = w_t = 0 \quad (t=0, \quad 0 \leq x \leq L), \quad w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0, L, \quad t > 0).$$

Решение задачи (1), (2) разыскивается в виде ряда

$$(3) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L}.$$



Фиг. 1

Подставляя (3) в (1), после соответствующих преобразований для $q_m(t)$ получим уравнение при нулевых начальных условиях

$$(4) \quad q_m'' - \lambda^2 \alpha_m^2(t) q_m = f_m, \quad q_m = q_m' = 0, \quad t = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi EI}{\rho FL}, \quad \alpha_m^2(t) = -m^2 [m^2 - \eta^2(t)], \quad \eta^2(t) = \frac{N(t)}{N_e},$$

$$f_m = \frac{2}{\rho FL} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx,$$

где $\eta(t)$ — параметр, характеризующий интенсивность нагружения; N_e — нагрузка Эйлера; λ — большой параметр.

Пока нагрузка $N(t)$ возрастает от нуля до величины $m^2 N_e$, коэффициент m -й формы α_m^2 имеет отрицательный знак. Момент времени $t = t_m$, когда $N(t) = m^2 N_e$, $\alpha_m^2 = 0$, является точкой поворота уравнения (4) (см. фиг. 1). Дальнейший рост нагрузки $N(t) > m^2 N_e$ приводит к изменению знака коэффициента α_m^2 , он становится положительным.

Задача Коши (4) для неоднородного дифференциального уравнения с точкой поворота описывает процесс изменения амплитуд движений со временем.

Уравнение, аналогичное (4), получено в [4], где рассматривалась задача об интенсивном нагружении стержня силой, возрастающей пропорционально времени. Асимптотический анализ поведения упругого стержня при аperiодическом интенсивном нагружении проведен в [3], нагружение является слабо переменным, поэтому уравнение для амплитуд не имеет точек поворота. В данной работе исследуется движение стержня в общем случае интенсивной монотонно возрастающей нагрузки при наличии точек поворота в уравнении (4).

В работе [5] для однородных дифференциальных уравнений второго порядка типа (4) с коэффициентом $\alpha_m^2(t)$, имеющим нуль первого порядка, при больших λ построена асимптотика собственных значений. Суть метода, применяемого для нахождения асимптотических представлений решений уравнений указанного типа, состоит в том, что решение конкретного уравнения выражается через решения эталонного уравнения, которое должно точно изображать особенности поведения коэффициентов данного уравнения: его коэффициенты должны иметь нули того же порядка, что и коэффициенты исходного уравнения. Метод эталонных уравнений почти не отличается от ВБК метода.

Чтобы воспользоваться методом эталонных уравнений, произведем сдвиг по времени у функции нагружения. Введем новую переменную $\tau = t - t_m$. Тогда все точки поворота переместятся в одну точку $\tau = 0$; однородное уравнение для уравнения (4) запишется в виде

$$(5) \quad q_m'(\tau) - \lambda^2 \alpha_m^2(\tau) q_m(\tau) = 0.$$

В качестве эталонного уравнения, соответствующего уравнению (5), получим уравнение Эйри

$$(6) \quad V_m' - (s - t_m) V_m = 0, \quad V_m = V_m(s - t_m).$$

Функции Эйри V_{m1} , V_{m2} , линейно-независимые решения уравнения (6), удовлетворяют начальным условиям

$$V_{m1}(0) = 1, \quad V_{m1}'(0) = 0, \quad V_{m2}(0) = \Gamma(1/3)/3^{1/3} \Gamma(2/3), \quad V_{m2}'(0) = 1$$

и условиям на бесконечности

$$V_{m1} \rightarrow \infty, V_{m2} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Линейно-независимое решение уравнения (5) разыскивается через функцию Эйри V_{m1} в виде

$$(7) \quad q_{m1}(\tau) = A_m(\tau)V_{m1}[\varphi_m(\tau)].$$

Подставив решение (7) в уравнение (5), получим

$$(8) \quad A_m(\tau) [V_{m1}''\varphi_m'^2 - \lambda^2\alpha_m^2 V_{m1}] + V_{m1}' [2A_m'\varphi_m' + A_m\varphi_m''] + V_{m1}A_m'' = 0.$$

Уравнение (6) позволяет представить выражение в скобках при $A_m(\tau)$ в виде

$$V_{m1}''\varphi_m'^2 - \lambda^2\alpha_m^2 V_{m1} = V_{m1}(\varphi_m\varphi_m'' - \lambda^2\alpha_m^2).$$

Поэтому, положив

$$(9) \quad \varphi_m\varphi_m'' = \lambda^2\alpha_m^2,$$

уничтожим в выражении (8) члены, содержащие λ^2 . Решаем уравнение (9)

$$\varphi_m = \lambda^{2/3}\omega_m; \omega_m^{1/2}\omega_m' = \alpha_m, \omega_m = \left(\frac{3}{2} \int_0^\tau \alpha_m dt\right)^{2/3}.$$

Приравняв нулю выражение при V_{m1}' , уничтожим в (8) члены порядка $\lambda^{2/3}$. Для $A_m(\tau)$ это дает уравнение

$$2A_m'\varphi_m' + A_m\varphi_m'' = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{A_m''}{A_m'} = -\frac{\varphi_m''}{2\varphi_m'} - \frac{\omega_m''}{2\omega_m'}, A_m(\tau) = \frac{c_{m1}}{(\omega_m')^{1/2}}.$$

Другое линейно-независимое решение уравнения (5) разыскивается через функцию Эйри V_{m2} в виде

$$q_{m2} = B_m(\tau)V_{m2}[\varphi_m(\tau)] \quad (B_m(\tau) = c_{m2}(\omega_m')^{-1/2}).$$

Выражение в скобках для коэффициента $B_m(\tau)$ получено повторением предыдущих выкладок. Функция $\varphi_m(\tau)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению (9).

Так как $A_m'' \neq 0, B_m'' \neq 0$, то в (8) останутся нескомпенсированными члены порядка λ в нулевой степени, а члены порядка $\lambda^{2/3}$ и λ^2 уничтожаются. Запишем общее асимптотическое решение уравнения (5)

$$(10) \quad q_m(\tau) = c_{m1}(\omega_m')^{-1/2}V_{m1}[\lambda^{2/3}\omega_m] + c_{m2}(\omega_m')^{-1/2}V_{m2}[\lambda^{2/3}\omega_m] + O(1).$$

По известному общему решению (10) однородного дифференциального уравнения (5) найдем методом вариации постоянных решение неоднородной задачи (4). В старых переменных решение имеет вид

$$(11) \quad q_m(t) = \frac{V_{m2}[\lambda^{2/3}\omega_m]}{\lambda^{2/3}(\omega_m')^{1/2}} \int_0^{t_m} f_m V_{m1}[\lambda^{2/3}\omega_m] dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{V_{m_2} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{\lambda^{2/3} (\omega'_m)^{1/2}} \int_{t_m}^t \frac{f_m V_{m_1} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{(\omega'_m)^{1/2}} dt - \\
& - \frac{V_{m_1} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{\lambda^{2/3} (\omega'_m)^{1/2}} \int_0^{t_m} \frac{f_m V_{m_2} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{(\omega'_m)^{1/2}} dt - \\
& - \frac{V_{m_1} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{\lambda^{2/3} (\omega'_m)^{1/2}} \int_{t_m}^t \frac{f_m V_{m_2} [\lambda^{2/3} \omega_m]}{(\omega'_m)^{1/2}} dt + O(1).
\end{aligned}$$

Здесь величина $\lambda^{2/3}$ в знаменателе есть значение вронскиана функций $V_{m_1} (\omega'_m)^{-1/2}$, $V_{m_2} (\omega'_m)^{-1/2}$ [5]

$$\lambda^{2/3} = \frac{V_{m_1}}{(\omega'_m)^{1/2}} \left[\frac{V_{m_2}}{(\omega'_m)^{1/2}} \right]' - \frac{V_{m_2}}{(\omega'_m)^{1/2}} \left[\frac{V_{m_1}}{(\omega'_m)^{1/2}} \right]'.$$

Формула (11) описывает процесс изменения амплитуд движений стержня. При увеличении нагрузки от нуля до $N_1 = N_e$, ($t < t_1$) движение стержня колебательное. После прохождения точки поворота $t = t_1$ амплитуда первого движения экспоненциально возрастает. Пока нагрузка $N(t)$ не достигла величины $N_2 = 4N_e$, ($t < t_2$), стержень совершает одновременно с движением по первой форме и колебательное движение по второй форме с амплитудой q_2 . После второй точки поворота $t = t_2$ амплитуда второго движения экспоненциально возрастает. Новые формы экспоненциального движения стержня появляются после превышения нагрузкой очередного критического значения статической задачи. Чем интенсивнее прикладываемая нагрузка, тем больше форм экспоненциального движения развивается в стержне, тем больше членов ряда (3) необходимо учитывать.

Итак, основную часть решения задачи движения упругого стержня при существенно переменном интенсивном нагружении представим в виде ряда

$$(12) \quad w = \sum_{m=1}^{m_*} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L}.$$

Здесь функции $q_m(t)$ определены формулой (11). Число членов ряда m_* равно номеру критической нагрузки Эйлера, которой достигла продольная сила $N(t)$, $m_* = E \max \sqrt{N(t)/N_e}$, где E — целая часть числа.

Перейдем к получению оценки критического времени выпучивания. В работе [6] предложено судить о потере устойчивости упругой оболочки под действием нестационарной нагрузки по коэффициенту усиления начальных неправильностей. Коэффициент усиления вычисляется для всех форм движения. По максимуму коэффициента усиления для некоторой из форм определяется момент потери устойчивости.

Оценки критических параметров: интенсивности нагружения, времени выпучивания и коэффициента усиления в случае действия на упругий стержень слабопеременной аperiодической интенсивной нагрузки получены в [3]. В отличие от методики работы [6] в [3] форма потери устойчивости выбирается специально такая, у которой максимален коэффициент показателя экспоненты функции времени [1]. При этом преднамеренно завышается скорость роста прогибов, чтобы получить нижние оценки критического времени и критической интенсивности. Практические расчеты по методике работы [3] проще, отпадает необходимость вычислять всю кри-

вую усиления. В частном случае постоянного интенсивного нагружения критические параметры вычисляются особенно просто [2].

Применяя методику работы [3], используем выражения (12), (11) для получения оценки критического времени выпучивания. Особенностью зависимости (12) является то, что каждый член ряда состоит из двух сомножителей и второй сомножитель по модулю не превосходит единицы. Из (12) имеем

$$(13) \quad |w| \leq \sum_{m=1}^{m_*} |q_{r,m}|.$$

Первое слагаемое в выражении (11) при достаточно большом $t > t_m$ стремится к нулю, так как содержит перед определенным интегралом экспоненту с большим отрицательным показателем.

Сравнивая второе и четвертое слагаемые, заменим функции Эйри первыми членами их асимптотических представлений. При больших t основной вклад дает экспонента (сомножители меньше единицы опускаем). Имеем

$$J_1 = \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda \omega_m^{3/2}\right) \int_{t_m}^t \exp\left(\frac{2}{3} \lambda \omega_m^{3/2}\right) dt,$$

$$J_2 = \exp\left(\frac{2}{3} \lambda \omega_m^{3/2}\right) \int_{t_m}^t \exp\left(-\frac{2}{3} \lambda \omega_m^{3/2}\right) dt.$$

Запишем интегралы по формуле трапеции

$$J_1 = [1 + \exp\{(-2/3)\lambda[\omega_m^{3/2}(t) - \omega_m^{3/2}(t_m)]\}](t - t_m)/2,$$

$$J_2 = [1 + \exp\{(2/3)\lambda[\omega_m^{3/2}(t) - \omega_m^{3/2}(t_m)]\}](t - t_m)/2.$$

Из последних выражений видно, что второе слагаемое из (11) остается ограниченным со временем, а четвертое — возрастает. Поскольку знак второго слагаемого противоположен знаку третьего и четвертого слагаемых, второе слагаемое опускаем, усиливая неравенство (13)

$$(14) \quad |w| \leq \sum_{m=1}^{m_*} |q_m| \leq \sum_{m=1}^{m_*} \left| c_m V_{r+1} \int_0^t V_{m2} dt \right|.$$

Здесь c_m — постоянная, определяемая условиями задачи. Предполагается, что начальные возмущения, соответствующие различным формам движений, имеют один порядок малости. Заменяя функцию Эйри в (14) первым членом ее асимптотического разложения и используя свойства определенного интеграла, для нормального прогиба стержня в момент времени t_* получим

$$(15) \quad |w(t_*)| \leq \sum_{m=1}^{m_*} \left| c_m \exp 1,5 \lambda \int_{t_m}^{t_*} \alpha_m dt \max |V_{m2}| t_* \right| \leq$$

$$\leq m_* C t_* \sum_{m=1}^{m_*} \exp \alpha_* (t_* - t_m) \leq m_*^2 C t_* \exp (m_* \alpha_* t_*),$$

$$C = 2, 1 \max |c_m|, \alpha_* = 0,75 \lambda \max \alpha_m.$$

В выражении (15) сомножитель $m_* \exp (m_* \alpha_* t_*)$ появляется в результате оценки функции Эйри V_{m1} : m_* -й член ряда, аппроксимирующего функ-

цию Эйри, $\exp(m_* \alpha_* t_*)$ суммируется m_* раз. Сомножитель $m_* C t_*$ — оценка интеграла с коэффициентом из (14).

Критическое время t_* определится из соотношения

$$(16) \quad \max |w(t_*)| = w_0,$$

если максимум прогиба задан.

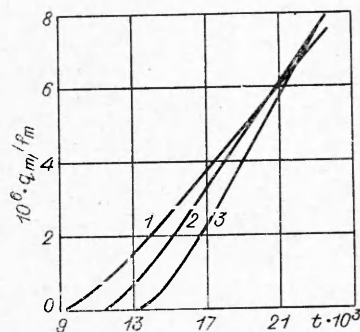
Подставляя в (16) оценку (15) для прогиба, для критического времени t_* имеем

$$(17) \quad w_0 = m_*^2 C t_* \exp(m_* \alpha_* t_*).$$

Полученная оценка критического времени выпучивания является сложной функцией в отличие от [2, 3], так как здесь рассматривается случай существенно переменного нагружения стержня: уравнение для амплитуд имеет точку поворота.

Правая часть выражения (17) является быстро возрастающей функцией. Коэффициент показателя экспоненты и коэффициент перед экспонентой содержат большой множитель m_* , характеризующий интенсивность нагружения. Таким образом, получены нижние оценки критического времени, как и в [2, 3]. Причем с ростом интенсивности нагружения оценка (17) становится еще ниже, что повышает надежность практических расчетов критического времени.

Выше была найдена зависимость (11) изменения амплитуд движений со временем. На фиг. 2 приведены результаты расчетов амплитуд движений при следующих значениях параметров: длина стержня $L = 800$ мм, диаметр 10 мм, $\lambda = 193 \text{ с}^{-1}$, $N_e = 151,2$ кгс, закон нагружения $N(t) = 1,7 \exp 500 t$. При



Ф и г. 2

расчете использовались таблицы [7].

По оси ординат отложен безразмерный параметр, равный отношению переменной амплитуды q_m к начальному прогибу f_m , по оси абсцисс — время t . Кривые 1—3 отвечают значениям $m = 1, 2, 3$. Видно, что после точки поворота имеет место резкое нарастание прогибов стержня, причем различные формы движений растут с разной скоростью. Большим номерам форм соответствует и большая скорость роста амплитуд. Величины амплитуд движений имеют одинаковый порядок, поэтому их все необходимо учитывать. Таким образом, система с распределенными параметрами в рассматриваемом случае монотонно возрастающей интенсивной нагрузки аппроксимируется системой с большим, но конечным числом степеней свободы.

Поступила 8 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ицлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. — «Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 6.
2. Корнев В. М. Развитие динамических форм потерь устойчивости упругих систем при интенсивном нагружении на конечном отрезке времени. — ПМТФ, 1972, № 4.
3. Корнев В. М. Асимптотический анализ поведения упругого стержня при аперподическом интенсивном нагружении. — ПМТФ, 1972, № 3.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.

5. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. — «Усп. мат. наук», 1952, т. VII, вып. 6 (52).
6. Anderson D. L., Lindberg H. E. Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressure. — «AIAAJ.», 1968, vol. 6, N 4. Рус. пер. Динамическое выпучивание цилиндрических оболочек под действием нестационарного бокового давления. — «Ракет. техн. и космонавтика», 1968, т. 6, № 4.
7. Смирнов А. Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. М., Изд-во АН СССР, 1955.

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОГО НЕУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ

В. М. Жигалкин, Г. Л. Линдин

(Новосибирск)

В работах [1, 2] предложен механизм пластического деформирования, дополненный промежуточными площадками скольжения [3]. На основе этого механизма деформирования указываются уравнения упрочнения при нагружении с неподвижными главными направлениями тензора напряжений, при этом достаточно знать закон упрочнения материала при осевом растяжении.

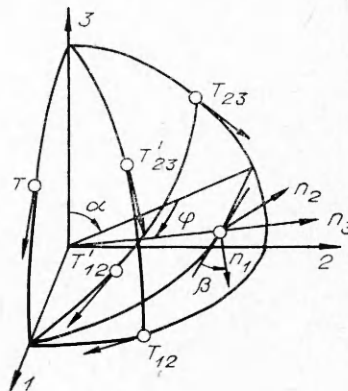
В данной работе приводятся результаты экспериментов, в которых нагружение типа двуосного растяжения создавалось в трубчатых образцах из стали 40X под действием внутреннего давления и осевой силы. При этом главные направления тензора напряжений оставались неподвижными в теле образца, хотя нагружение существенно отличалось от пропорционального.

1. Рассмотрим напряженное состояние элемента с неподвижными главными направлениями тензора напряжений (1, 2, 3) на фиг. 1. Пусть неравенства

$$(1.1) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

выполнены без перенумерации. Начало вспомогательной системы координат (n_1, n_2, n_3) из соображений удобства вынесено на поверхность единичной сферы, описанной вокруг рассматриваемого элемента. В дальнейшем площадкой скольжения τ'_{31} называется площадка с нормалью n_3 и направлением n_1 на ней. Касательное напряжение τ'_{31} на этой площадке скольжения (α, β, φ) на фиг. 1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tau'_{31} = & \frac{\sigma_1}{2} \cos \beta \cdot \sin 2\varphi + \frac{\sigma_2}{2} (\sin 2\alpha \times \\ & \times \sin \beta \cdot \cos \varphi - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin 2\varphi) - \\ & - \frac{\sigma_3}{2} (\sin 2\alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta \times \\ & \times \sin 2\varphi). \end{aligned}$$



Ф и г. 1