УДК 532.59

ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ДВУХСЛОЙНОЙ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложен критерий корректности полной системы законов сохранения, предполагающий максимальную согласованность области выпуклости замыкающего закона сохранения с областью гиперболичности модели. На основе этого критерия получены корректные полные системы законов сохранения для моделей двухслойной «мелкой воды»: со свободной поверхностью (модель I) и «под крышкой» (модель II).

В [1] выведены и проанализированы три дифференциальные модели двухслойной «мелкой воды»: модель I — со свободной верхней границей, модель II — «под крышкой» и модель III — их общий предельный случай. Для них построены области гиперболичности, в которых допускаются разрывные решения, в связи с чем поставлена задача о формулировке этих моделей в виде полных систем законов сохранения [2–4].

В настоящей работе предлагается решение данной задачи, основанное на критерии корректности полной системы законов сохранения, предполагающем максимальную согласованность области выпуклости замыкающего закона сохранения (в качестве которого берется закон сохранения полной энергии) с областью гиперболичности модели. При этом для модели I корректной является полная система, в которую в качестве базисных входят законы сохранения массы в слоях, полного импульса и скачка скорости на границе раздела слоев. Для модели II основной корректной системой (отвечающей течениям, в которых отношение глубин слоев не является слишком малым) оказывается полная система, в которой на разрывах выполняются законы сохранения массы, полного импульса и скачка локального импульса на границе раздела слоев. В то же время при достаточно малом отношении глубины верхнего к глубине нижнего слоя более корректной для модели II является полная система, в которой на разрывах (одновременно с законами сохранения массы и полного импульса) выполняется закон сохранения локального импульса в нижнем слое. И наоборот, при достаточно малом отношении глубины нижнего к глубине верхнего слоя более корректной для модели II оказывается полная система, в которой на разрывах (наряду с законами сохранения массы и полного импульса) выполняется закон сохранения локального импульса в верхнем слое.

1. Полная система законов сохранения в общем случае. Рассмотрим квазилинейную систему законов сохранения [2–4]

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{u}(t,x) = (u_1,\ldots,u_m)$ — искомая кусочно-непрерывная вектор-функция; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1,\ldots,f_m)$ — заданная гладкая вектор-функция. Система (1.1) называется полной [4], если для нее существует такая скалярная функция $U(\boldsymbol{u})$, что:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01546).

а) ее градиент $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}) = U_{\boldsymbol{u}}$ представляет собой интегрирующий множитель системы (1.1), т. е. $U_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}} = F_{\boldsymbol{u}}$, в результате система (1.1) допускает дополнительный *замыкающий* закон сохранения

$$U(\boldsymbol{u})_t + F(\boldsymbol{u})_x = 0; \tag{1.2}$$

б) отображение $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u})$ локально взаимно однозначно.

Вводя при помощи преобразования Лежандра *производящие функции* (или *потенциалы*) $\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} - U$, $\Psi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} - F$, полную систему законов сохранения (1.1) в *канонических переменных* $\boldsymbol{v}$ можно записать в следующей *симметрической форме*:

$$(\Phi_{\boldsymbol{v}})_t + (\Psi_{\boldsymbol{v}})_x = 0, \tag{1.3}$$

развернутая *недивергентная* запись которой имеет вид

$$A\boldsymbol{v}_t + B\boldsymbol{v}_x = 0, \tag{1.4}$$

где $A = \Phi_{\boldsymbol{vv}}$, $B = \Psi_{\boldsymbol{vv}}$ — симметрические матрицы. На возможность записи в симметрической форме (1.3), (1.4) широкого класса уравнений математической физики (в частности, уравнений газовой динамики) указано в [5]. Эквивалентность полноты системы (1.1) возможности записи ее в симметрической форме (1.3) показана в [5–7].

Если полная система (1.1) допускает замыкающий закон сохранения (1.2) с выпуклой функцией $U(\boldsymbol{u})$, то отображение $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u})$ *базисных переменных* $\boldsymbol{u}$ в *канонические* $\boldsymbol{v}$ автоматически взаимно однозначно, потенциал $\Phi(\boldsymbol{v})$ выпуклый, а матрица $A(\boldsymbol{v})$, входящая в симметрическую систему (1.4), положительно определена (последнее означает, что система (1.1) является гиперболической). В [7, 8] замыкающий закон сохранения (1.2) такой полной системы (1.1) (названный ее *выпуклым расширением* [7]) предложено использовать для отбора устойчивых разрывных решений. Они определяются как решения, которые в слабом смысле [2] удовлетворяют *энтропийному неравенству*

$$U(\boldsymbol{u})_t + F(\boldsymbol{u})_x \leqslant 0 \tag{1.5}$$

(при этом функции U и F называют соответственно *энтропийной функцией* и *энтропийным потоком*). В [7] показано, что в случае полной системы (1.1) с выпуклым расширением (1.2) неравенству (1.5) удовлетворяют предельные при $\mu \to 0$ решения системы с линейной вязкостью $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \mu \boldsymbol{u}_{xx}$, а в [2] доказано, что если такая полная система является сильнонелинейной, то для нее энтропийное условие (1.5) «в малом» (т. е. на ударных волнах достаточно малой интенсивности) эквивалентно введенному ранее в [9] характеристическому условию устойчивости.

Во многих работах (см., например, [8, 10, 11]) предполагается, что для полных систем законов сохранения (1.1) с выпуклым расширением (1.2) энтропийное условие (1.5) гарантирует однозначную разрешимость «в целом» задачи Коши в некотором классе кусочно-непрерывных функций. Таким образом, наличие выпуклого расширения (1.2) выдвигается в качестве решающего требования корректной формулировки гиперболической системы в виде полной системы законов сохранения. Для конкретной полной системы (1.1) это означает, что область выпуклости $\Omega^{\text{в}}$ ее энтропийной функции должна быть максимально согласована с областью ее гиперболичности $\Omega^{\text{г}}$ (при этом в силу гиперболичности полной системы с выпуклым расширением $\Omega^{\text{в}} \subseteq \Omega^{\text{г}}$). В частности, если мы имеем две различных полных системы законов сохранения (1.1) с областями выпуклости $\Omega_1^{\text{в}}$ и $\Omega_2^{\text{в}}$, которые получены из одной и той же дифференциальной гиперболической системы, и при этом $\Omega_2^{\text{в}} \subset \Omega_1^{\text{в}}$, то более корректной следует признать полную систему с областью выпуклости $\Omega_1^{\text{в}}$. Далее с этой точки зрения проанализированы полные системы законов сохранения для уравнений однослойной и двухслойной «мелкой воды».

2. Полные системы законов сохранения для уравнений однослойной «мелкой воды». Дифференциальные уравнения теории однослойной «мелкой воды» без учета влияния трения и в предположении прямоугольности русла и горизонтальности дна могут быть записаны в виде [4, 12]

$$h_t + q_x = 0; \tag{2.1}$$

$$v_t + (v^2/2 + gh)_x = 0, \tag{2.2}$$

где h — глубина потока; $q = hv$ — расход; v — скорость; g — ускорение силы тяжести. Уравнения (2.1), (2.2) представляют собой законы сохранения массы и локального импульса каждой частицы жидкости вдоль ее линии тока. Система (2.1), (2.2), как и любая другая система из двух скалярных законов сохранения, допускает бесконечно много других линейно независимых законов сохранения, однако физический смысл имеют лишь два из них: закон сохранения полного импульса

$$q_t + (qv + gh^2/2)_x = 0 \tag{2.3}$$

и закон сохранения полной энергии

$$e_t + [(v^2 + 2gh)q]_x = 0, \tag{2.4}$$

где

$$e = qv + gh^2. \tag{2.5}$$

Обычно [4, 12] при формулировке дифференциальной модели «мелкой воды» (2.1)–(2.4) в виде полной системы законов сохранения в качестве базисных выбирают законы сохранения массы (2.1) и полного импульса (2.3), в качестве замыкающего — закон сохранения полной энергии (2.4) (отвечающая этому случаю симметрическая форма записи (1.3) приведена в [4]). В такой полной системе (будем обозначать ее S_1) роль энтропийной функции $U(\boldsymbol{u})$ играет полная энергия (2.5), которая в базисных переменных $\boldsymbol{u} = (h, q)$ записывается в виде функции $e(h,q) = q^2/h + gh^2$, выпуклой при $h > 0$. Тем самым полная система S_1 имеет выпуклое расширение (2.4) во всей области гиперболичности системы (2.1), (2.3).

В отличие от системы S_1 полная система, состоящая из базисных законов сохранения (2.1), (2.2) и замыкающего закона сохранения (2.4) (обозначим эту систему S_2), имеет энтропийную функцию

$$e(h,v) = (v^2 + gh)h, \tag{2.6}$$

которая является выпуклой только для докритических течений $|v| < \sqrt{gh}$. Поэтому (согласно предложенному выше критерию) система S_1 более корректна, чем S_2 (интересно, что, несмотря на это, для обеих систем S_1 и S_2 энтропийный (1.5) и характеристический [9] критерии устойчивости эквивалентны во всей области гиперболичности $h > 0$). Наконец, если в качестве базисных законов сохранения взять уравнения (2.1), (2.2), а в качестве замыкающего — закон сохранения полного импульса (2.3), то энтропийная функция $q(h,v) = h \cdot v$ такой «совершенно нефизической» полной системы невыпукла при всех значениях базисных переменных h и v. Таким образом, для хорошо изученной модели однослойной «мелкой воды» предложенный в п. **1** критерий однозначно выделяет физически корректную полную систему (2.1), (2.3), (2.4).

3. Полные системы законов сохранения для уравнений двухслойной «мелкой воды». Дифференциальные уравнения двухслойной «мелкой воды» имеют вид [1]

$$h_t + q_x = 0, \qquad H_t + Q_x = 0; \tag{3.1}$$

$$v_t + [v^2/2 + g(h+H)]_x = -p_x, \qquad V_t + [V^2/2 + g(H + \lambda h)]_x = -\lambda p_x, \tag{3.2}$$

где h, $q = hv$, v — глубина, расход и скорость в верхнем слое; H, $Q = HV$, V — то же в нижнем слое; g — ускорение силы тяжести; p — давление на верхней границе; $\lambda < 1$ — отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. Уравнения (3.1), (3.2) представляют собой законы сохранения массы и локального импульса в каждом из слоев жидкости.

Из системы (3.1), (3.2) при $p_x = 0$ получим модель I со свободной поверхностью, а при

$$h + H = H^*, \qquad q + Q = 0, \qquad H^* = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

получим модель II «под крышкой». Система (3.1), (3.2) допускает еще два имеющих физический смысл закона сохранения: полного импульса

$$\alpha_t + [QV + \lambda qv + g\varphi/2]_x = -\lambda H^* p_x, \tag{3.4}$$

где $\alpha = Q + \lambda q$, $\varphi = H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda hH$, и полной энергии

$$e_t + [QV^2 + \lambda qv^2 + 2g(H\alpha + \lambda h(Q + q))]_x = 0, \tag{3.5}$$

где

$$e = QV + \lambda qv + g\varphi. \tag{3.6}$$

Других линейно независимых законов сохранения модель I не имеет.

Подобно однослойному случаю (см. [13]) будем считать, что полный импульс α на прерывных волнах сохраняется, а полная энергия e теряется. С учетом этого в обеих моделях I и II в качестве замыкающего возьмем закон сохранения полной энергии (3.5).

Модель II. С учетом (3.3) система (3.1), (3.2) должна иметь лишь два базисных закона сохранения, одним из которых является закон сохранения массы (3.1). Для получения второго необходимо исключить давление p_x из уравнений импульсов (3.2), (3.4), что можно сделать тремя различными способами.

Система II.1. Исключая p_x из уравнений локальных импульсов (3.2), в качестве второго базисного закона сохранения получим *закон сохранения скачка локального импульса на линии раздела слоев*

$$\beta_t + [(V^2 - \lambda v^2)/2 + \mu gH]_x = 0, \tag{3.7}$$

где $\beta = V - \lambda v$, $\mu = 1 - \lambda$ (отметим, что β совпадает с «нормализованной» скоростью, введенной в [1]). При этом в получаемой таким образом полной системе законов сохранения (которую обозначим II.1) сами законы сохранения (3.2) на разрыве выполняться не будут, поскольку скачок давления p_x на нем необходимо определять из закона сохранения полного импульса (3.4).

Записывая полную энергию (3.6), которая с учетом (3.3) имеет вид

$$e = \frac{a}{Hh} Q^2 + g\varphi, \tag{3.8}$$

в базисных переменных β, H, получим

$$e(\beta, H) = \frac{Hh}{a} \beta^2 + g\varphi, \tag{3.9}$$

где $a = h + \lambda H$; $\varphi = H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda hH$; $h = H^* - H$. Функция (3.9) является выпуклой при условии

$$\left[1 + \frac{(h^2 - \lambda H^2)^2}{\lambda Hh(H^*)^2}\right]\beta^2 < \frac{\mu g a^3}{\lambda (H^*)^2}, \tag{3.10}$$

которое усиливает полученное в [1] условие гиперболичности модели II

$$\beta^2 < \frac{\mu g a^3}{\lambda (H^*)^2}. \tag{3.11}$$

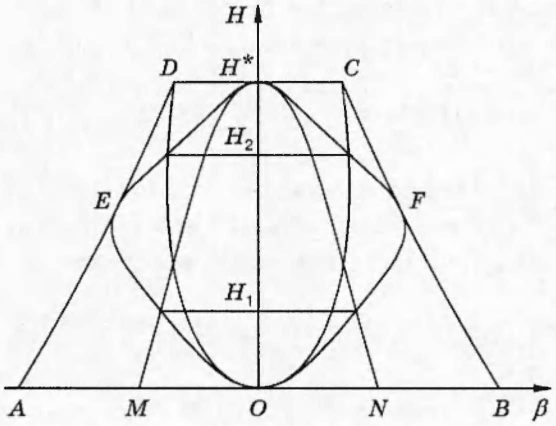

Рис. 1

На рис. 1 на плоскости базисных переменных β и H область гиперболичности (3.11) представлена криволинейной трапецией $ABCD$, вершины которой имеют координаты $A(-\beta_1, 0)$, $B(\beta_1, 0)$, $C(\beta_2, H^*)$, $D(-\beta_2, H^*)$, где $\beta_1 = \sqrt{\mu g H^*/\lambda}$, $\beta_2 = \lambda\sqrt{\mu g H^*}$, $\lambda = 0{,}5$, а множество выпуклости полной энергии (3.10) — вписанным в нее множеством OFH^*E, в котором лежащие на его границе точки F и E имеют координаты $F(\beta_3, H_0)$, $E(-\beta_3, H_0)$, $H_0 = H^*/(1+\sqrt{\lambda})$, $\beta_3 = \sqrt{\mu g\sqrt{\lambda}H^*}$. На рис. 1 видно, что область выпуклости (3.10) достаточно хорошо согласуется с областью гиперболичности (3.11): она содержит ее основную центральную часть и «обрезает» ее углы, которым соответствуют физически менее устойчивые течения, имеющие достаточно большой скачок импульса на границе раздела слоев при малой глубине одного из них.

Система II.2. Предполагая, что на разрыве сохраняется локальный импульс нижнего слоя, и исключая с учетом этого p_x из уравнения (3.4) и второго уравнения (3.2), получим следующий базисный закон сохранения:

$$\bar{\beta}_t + \left[\frac{v^2}{2h}(hH^* - 2aH) + \frac{g}{2}(H^2 + 2Hh + \lambda h^2)\right]_x = 0,$$

где $\bar{\beta} = H^*V - \alpha = h\beta$. Этот базисный закон сохранения является интегральным следствием законов сохранения полного импульса (3.4) и локального импульса в нижнем слое (второе уравнение (3.2)) при условии, что из одного из них определяется скачок давления p_x на разрыве.

Записывая полную энергию (3.8) в новых базисных переменных β и H, получим функцию $e(\beta, H) = H\beta^2/(ha) + g\varphi$, которая является выпуклой при условии

$$\beta^2 < \mu g a^3/\psi, \tag{3.12}$$

где $\psi = [r^3 + (2+\lambda)r^2 + (1+2\lambda)r + \lambda]H^2$, $r = h/H$. Из рис. 1, на котором область выпуклости (3.12) ограничена кривой, проходящей через точки D, O, C, следует, что эта область хорошо согласована с областью гиперболичности (3.11) только при достаточно больших глубинах нижнего слоя H (точнее, при достаточно малом $r = h/H$). При этом в соответствии с предложенным выше критерием корректности полных систем законов сохранения система II.1 корректнее системы II.2 при глубинах $0 < H < H_2$, $H_2 = (3 - \sqrt{1+8\lambda})H^*/(2\mu)$, для которых область выпуклости (3.12), отвечающая системе II.2, расположена строго внутри области выпуклости (3.10), отвечающей системе II.1 (рис. 1). Наоборот, при глубинах $H_2 < H < H^*$, для которых область выпуклости (3.10) расположена строго внутри области выпуклости (3.12), система II.2 более корректна, чем II.1.

Система II.3. Предполагая, что на разрыве сохраняется локальный импульс верхнего слоя, и исключая с учетом этого p_x из уравнения (3.5) и первого уравнения (3.2), получим

$$\tilde{\beta}_t + \left[\frac{v^2}{2H}(2ah - \lambda HH^*) + \frac{g}{2}(H^2 - 2\lambda HH^* - \lambda h^2)\right]_x = 0, \qquad (3.13)$$

где $\tilde{\beta} = \alpha - \lambda H^* v = H\beta$. Новый базисный закон сохранения (3.13) является интегральным следствием законов сохранения полного импульса и локального импульса в верхнем слое при условии, что по одному из этих двух законов сохранения определяется скачок давления p_x на разрыве.

Записывая полную энергию (3.8) в базисных переменных $\tilde{\beta}$ и H, получим функцию

$$e(\tilde{\beta}, H) = \frac{h}{Ha}\tilde{\beta}^2 + g\varphi,$$

выпуклую при условии

$$\beta^2 < \mu g a^3/\psi_1, \qquad (3.14)$$

где $\psi_1 = [\lambda^2 R^3 + \lambda(3+\mu)R^2 + (3+2\mu)R + (1+2\mu)]h^2$, $R = H/h$. Из рис. 1, на котором область выпуклости (3.14) ограничена кривой, проходящей через точки M, H^* и N (точки N и M имеют абсциссы $\pm\sqrt{\mu g H^*/(1+2\mu)}$), следует, что область (3.14) относительно хорошо согласована с областью гиперболичности лишь при достаточно малых глубинах нижнего слоя H (точнее, при малых $R = H/h$). При этом сравнение областей выпуклости систем II.1 и II.3 показывает, что система II.1 корректнее II.3 при глубинах $H_1 < H < H^*$, где $H_1 = R_1 H^*/(1 - R_1)$, а R_1 — соответствующий корень кубического уравнения $\lambda(2+\mu)R^3 + (3+2\mu)R^2 + 3\mu R - 1 = 0$, и наоборот, система II.3 корректнее II.1 при малых глубинах нижнего слоя $0 < H < H_1$.

Суммируя полученные выше результаты, приходим к выводу, что внутри области гиперболичности модели II выделяются три различные подобласти, каждая из которых имеет свою корректную полную систему законов сохранения. В основной центральной части области гиперболичности при $H_1 < H < H_2$ корректной является система II.1; при больших глубинах нижнего слоя, удовлетворяющих неравенствам $H_2 < H < H^*$, корректной становится система II.2; и, наконец, при малых глубинах верхнего слоя, удовлетворяющих условию $0 < H < H_1$, корректной является система II.3.

В заключение рассмотрим, как преобразуется рис. 1 в предельных случаях $\lambda \to 0$ и $\lambda \to 1$. При $\lambda \to 0$ абсциссы точек A и B стремятся к $\mp\infty$, точек M и N — к $\mp\sqrt{gH^*/3}$ и точек E, F, D и C — к нулю. При этом

$$\lim_{\lambda\to 0} H_2(\lambda) = H^*, \qquad \lim_{\lambda\to 0} H_1(\lambda) = \frac{4\sqrt{29} - 17}{35}H^* \simeq 0{,}13H^*$$

(в качестве примера на рис. 2 приведен случай для $\lambda = 0{,}1$). При $\lambda \to 1$ абсциссы точек A, M, E, D стремятся к $-\sqrt{gH^*}$, точек B, N, F, C — к $\sqrt{gH^*}$, а ординаты точек E и F — к $H^*/2$, причем $\lim\limits_{\lambda\to 1} H_1(\lambda) = H^*/3$, $\lim\limits_{\lambda\to 1} H_2(\lambda) = 2H^*/3$ (этот предельный случай показан на рис. 3).

Естественное (на первый взгляд) предположение о том, что изображенный на рис. 3 предельный случай должен соответствовать предложенной в [1] предельной при

$$\mu \to 0, \qquad H \to H^*H, \qquad \beta \to \sqrt{\mu H^*}\beta, \qquad t \to t/\sqrt{\mu H^*} \qquad (3.15)$$

модели III, оказывается неверным. Объясняется это тем, что в модели III уравнение полной энергии (3.5) принимает вид

$$e_t + [Hh(h - H)\beta^3]_x = 0,$$

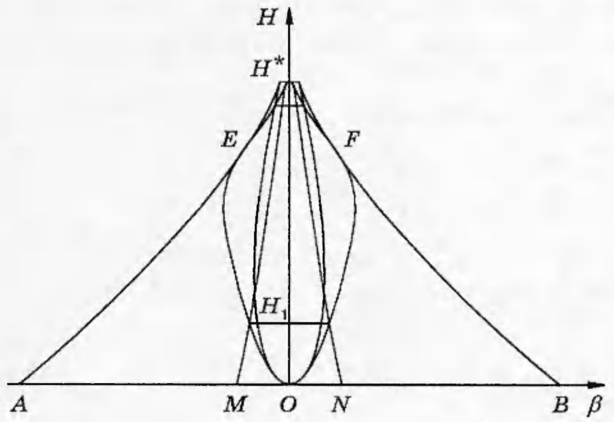

Рис. 2

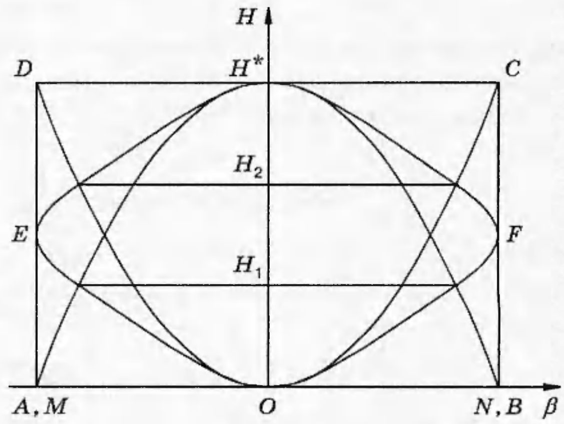

Рис. 3

где $e = Hh\beta^2$, $h = 1 - H$, и поэтому полная энергия e в базисных переменных $\beta = V - v$, H (система II.1), $\bar\beta = V$, H (система II.2) и $\tilde\beta = v$, H (система II.3) записывается следующим образом:

$$e(\beta, H) = H(1-H)\beta^2, \qquad e(\bar\beta, H) = \frac{H\bar\beta^2}{1-H}, \qquad e(\tilde\beta, H) = \frac{1-H}{H}\tilde\beta^2. \tag{3.16}$$

Легко убедиться, что все три функции (3.16) невыпуклы во всей области гиперболичности $\{0 < H < 1,\ |\beta| < g\}$ модели III.

Модель I. Для корректной формулировки модели I в виде полной системы законов сохранения необходимо в качестве базисных законов сохранения взять два закона сохранения массы в слоях (3.1) и закон сохранения полного импульса (3.4), а в качестве замыкающего закона сохранения — закон сохранения полной энергии (3.5). Однако вначале рассмотрим систему базисных законов сохранения, в которой закон сохранения полного импульса не выполнен.

Система I.0. В системе I.0 в качестве базисных законов сохранения выберем законы сохранения массы (3.1) и законы сохранения локальных импульсов в слоях (3.2). Записывая полную энергию (3.6) в базисных переменных V, v, H, h системы I.0, получим функцию

$$e(V, v, H, h) = HV^2 + \lambda hv^2 + g(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda hH),$$

которая (подобно своему однослойному аналогу (2.6)) выпукла при условии докритичности течений в обоих слоях

$$|V| < \sqrt{gH}, \qquad |v| < \sqrt{gh} \tag{3.17}$$

и дополнительном, усиливающем (3.17) условии

$$(Hg - V^2)(hg - v^2) > \lambda g^2 hH.$$

Очевидно, что эти условия не согласованы с полученным в [1] условием гиперболичности модели I, которое предполагает ограничение лишь на разность скоростей в слоях, и поэтому систему I.0 нельзя признать корректной.

Системы I.1, I.2, I.3. В системах I.1, I.2, I.3 в качестве базисных возьмем два закона сохранения массы в слоях (3.1) и закон сохранения полного импульса (3.4). При этом в качестве четвертого базисного закона сохранения в системе I.1 (по аналогии с системой II.1) выберем закон сохранения скачка локального импульса на линии раздела слоев (3.7), в системе I.2 (по аналогии с II.2) — закон сохранения локального импульса в нижнем слое (второе уравнение (3.2)) и в системе I.3 (по аналогии с II.3) — закон сохранения локального импульса в верхнем слое (первое уравнение (3.2)).

Записывая полную энергию (3.6) в базисных переменных α, β, H, h системы I.1, получим

$$e(\alpha,\beta,H,h) = (b\alpha^2 + 2\mu Hh\alpha\beta + Hha\beta^2)/(H^*)^2 + g\varphi,$$

где $b = H + \lambda h$, $a = \lambda H + h$, $H^* = H + h$, $\varphi = H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda hH$. Необходимое условие выпуклости этой функции $e_{HH} > 0$, записанное в гиперплоскости $H^* = \text{const}$, при $\alpha = 0$, $\lambda > 0{,}5$ имеет вид

$$\beta^2 = (V - \lambda v)^2 < \mu g(H^*)^2/[(2\lambda - 1)H + (2 - \lambda)h]. \tag{3.18}$$

Записывая полную энергию (3.6) в базисных переменных α, V, H, h системы I.2, получим функцию

$$e(\alpha,V,H,h) = (\alpha^2 - 2H\alpha V + HbV^2)/(\lambda h) + g\varphi,$$

необходимое условие выпуклости которой $e_{VV}e_{HH} - e_{VH}^2 > 0$ при $\alpha = 0$ имеет вид

$$V^2 < \lambda gHhb/(H^2 + Hb + b^2). \tag{3.19}$$

Записывая полную энергию (3.6) в базисных переменных α, v, H, h системы I.3, получим функцию

$$e(\alpha,v,H,h) = (\alpha^2 - 2\lambda h\alpha v + \lambda hbv^2)/H + g\varphi,$$

необходимое условие выпуклости которой $e_{vv}e_{hh} - e_{vh}^2 > 0$ при $\alpha = 0$ имеет вид

$$v^2 < gHhb/(h^2 + hb + b^2). \tag{3.20}$$

Поскольку полученные неравенства (3.18)–(3.20) не согласованы с условием гиперболичности модели I (предполагающим ограничение только на разность скоростей в слоях), то все три системы I.1, I.2, I.3 (так же как и система I.0) не являются корректными.

Система I.4. Анализ систем I.1, I.2, I.3 показывает, что необходимое условие выпуклости соответствующих им функций полной энергии приводит к ограничению на четвертую дополнительную базисную функцию. Поскольку эта функция не совпадает с разностью скоростей в слоях (через которую записывается условие гиперболичности модели I), то и получаемые условия выпуклости оказываются несогласованными с условием гиперболичности. Это приводит к предположению о том, что для получения корректной полной системы законов сохранения для модели I в дополнение к законам сохранения массы в слоях (3.1) и полного импульса (3.4) в качестве базисного закона необходимо взять закон сохранения скачка скорости на линии раздела слоев

$$\gamma_t + [(V^2 - v^2)/2 - \mu gh]_x = 0,$$

где $\gamma = V - v$ (обозначим эту систему I.4). Отметим, что такой же дополнительный базисный закон сохранения возникает и в предельном случае моделей, предложенных в [14, 15].

Записывая полную энергию (3.6) в базисных переменных α, γ, H, h системы I.4, получим функцию

$$e(\alpha,\gamma,H,h) = (\alpha^2 + \lambda hH\gamma^2)/b + g\varphi,$$

которая является выпуклой при условии

$$|\bar\gamma| < f(\lambda,r) = \frac{\bar b}{\lambda r}\sqrt{\frac{g}{2}\,(c - \sqrt{c^2 - 4\lambda^2\mu r^3})}, \tag{3.21}$$

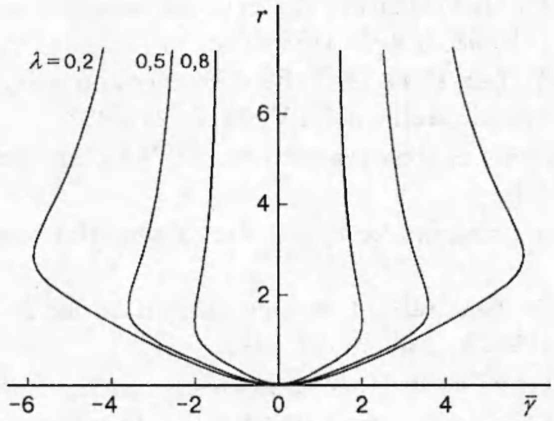

Рис. 4

в котором $\bar{b} = 1 + \lambda r$, $c = 1 + \lambda^2 r^3$, где $\bar{\gamma} = \gamma/\sqrt{H} = (V - v)/\sqrt{H}$; $r = h/H$ — те же переменные, относительно которых в [1] записывается условие гиперболичности модели I. При этом функция $f(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим предельным переходам:

$$\lim_{r\to 0} f(\lambda, r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} f(\lambda, r) = \sqrt{\mu\bar{g}}/\lambda.$$

На рис. 4 область выпуклости (3.21) показана при $\lambda = 0{,}2$; $0{,}5$; $0{,}8$; $g = 10$. Эта область целиком содержится в одной из двух несвязных подобластей области гиперболичности модели I, отвечающей малым значениям скачка скорости γ, при которых течение является более устойчивым с физической точки зрения.

Таким образом, условие выпуклости (3.21) оказывается достаточно хорошо согласованным с условием гиперболичности модели I, и тем самым полная система законов сохранения I.4 является корректной.

В заключение отметим, что общим предельным случаем (3.15) корректных полных систем I.4 и II.1 является полная система модели III, для которой в [16] при помощи характеристического критерия устойчивости [9] доказана однозначность разрешимости задачи о распаде произвольного разрыва в области гиперболичности модели III. Отметим также, что полные системы I.4 и II.1 допускают естественные обобщения на случай как плановых потенциальных течений, так и многослойных течений «мелкой воды».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: SIAM, 1972.
3. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1993.
5. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 521–523.
6. **Шугрин С. М.** Об одном классе квазилинейных систем // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 2. С. 145–148.

7. **Friedrichs K. O., Lax P. D.** Systems of conservation equation with convexextension // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1971. V. 68, N 8. P. 1686–1688.

8. **Harten A., Hyman J. M., Lax P. D.** On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 297–322.

9. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws. II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10, N 4. P. 537–566.

10. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.

11. **Sever M.** Estimate of the time rate of entropy dissipation for systemsof conservation lows // J. Differential Equations. 1996. V. 130. P. 127–141.

12. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

13. **Yih C. S., Guba C. R.** Hydraulic jump in a fluid system of two layers // Tellus. 1955. V. 7, N 3. P. 358–366.

14. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.

15. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.

16. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной мелкой воды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 85–98.

Поступила в редакцию 23/IX 1997 г.