Посвящается Сергею Михайловичу ШУГРИНУ

УДК 530.1, 531.31

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВУХСКОРОСТНЫХ СРЕД

С. Л. Гаврилюк, Ю. В. Перепечко*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск;
настоящее место работы: Universite of Aix-Marseille III, 13397 Marseille
* Объединенный институт геологии, геофизики и минералогии СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложен обобщенный вариационный принцип Гамильтона механики двухскоростных сред и сформулированы уравнения движения гомогенного и гетерогенного двухскоростного континуумов. Доказано, что выпуклость внутренней энергии обеспечивает гиперболичность линеаризованных на покое одномерных уравнений движения таких сред. При этом внутренняя энергия является функцией не только плотностей фаз, но и модуля разности скоростей фаз. Для гетерогенных сред с несжимаемыми компонентами показано, что зависимость внутренней энергии от модуля относительной скорости обеспечивает в случае малых объемных концентраций гиперболичность уравнений движения при любой относительной скорости движения фаз.

Введение. В настоящее время известны по крайней мере три подхода к построению математических моделей двухскоростных сред. Самым распространенным является *метод осреднения*, используемый обычно для построения моделей движения гетерогенных двухскоростных сред. Гетерогенные среды характеризуются тем, что каждая фаза занимает лишь часть объема смеси, в отличие от гомогенных смесей, где каждая фаза занимает весь объем смеси равномерно с остальными компонентами. Применяя подходящий оператор осреднения к уравнениям сохранения массы, импульса и др., справедливым внутри каждой фазы, получают осредненные уравнения движения. Основная проблема, возникающая при таком подходе, состоит в замыкании получаемой системы: неизвестных в системе больше, чем уравнений. Для замыкания используются различные экспериментальные и теоретические гипотезы о структуре течения, механизме взаимодействия между фазами и др. [1–3] (см. также обзор [4]). Как было отмечено многими авторами [5, 6], соответствующие уравнения движения в бездиссипативном приближении при условии совпадения давлений в фазах оказываются *негиперболическими* даже при малой относительной разности скоростей фаз. Последнее означает некорректность задачи Коши для соответствующих нелинейных уравнений движения.

В [7–9] методом осреднения были получены гиперболические неравновесные по давлениям модели двухслойных течений жидкости. Для замыкания уравнений движения привлекался ряд гипотез, связывающих давление и скорость на поверхности раздела жидкостей с их средними значениями по слою [7], либо учитывался процесс перемешивания жидкости на границе раздела фаз за счет введения третьего слоя жидкости [9]. Содержательная двухскоростная модель пузырьковой жидкости с учетом колебаний пузырьков предложена в [10]. В приближении несжимаемой жидкости и малости концентрации пузырьков модель является гиперболической при небольшой относительной скорости пузырьков и дает устойчивые волновые моды. Интересные гиперболические модели имеются также в [11–14]. Их гиперболичность достигалась либо за счет замыкающих соотношений, обычно специфичных к виду течения, либо за счет дополнительных «искусственных» членов в уравнениях, посредством которых угадывался правильный механизм межфазного взаимодействия.

Второй метод, известный как *метод законов сохранения Ландау*, применялся изначально для построения моделей квантовых жидкостей — сверхтекучего гелия [15–17]. Суть его состоит в том, что требование выполнения законов сохранения массы, импульса, энергии и энтропии, дополненное принципом относительности Галилея, позволяет полностью определить уравнения движения двухскоростной среды. Недавно этот подход был применен для построения уравнений движения классических жидкостей — двухскоростной гидродинамики [18–22]. В частности, в [19] соответствующие уравнения движения двухжидкостной среды в бездиссипативном приближении являются гиперболическими и при условии совпадения давления в фазах.

И наконец, одним из мощных методов получения уравнений движения двухскоростных сред является *вариационный метод* [23–29]. Как правило, варьируемый функционал представляет собой действие по Гамильтону: лагранжиан системы есть разность между кинетической и потенциальной энергией системы. В действительности разделить полную энергию двухскоростного континуума на кинетическую и потенциальную невозможно. Формальное разбиение энергии на кинетическую и внутреннюю неоднозначно, но при любом определении внутренняя энергия является галилеевым скаляром, который может зависеть не только от термодинамических переменных, но и от модуля скорости относительного движения фаз $\mathbf{w}$. При этом принципиально меняется вариационный подход. Лагранжиан системы должен формулироваться как разность между кинетической энергией и термодинамическим потенциалом, связанным с внутренней энергией частичным преобразованием Лежандра по переменной $\mathbf{w}$.

Тот факт, что лагранжиан двухскоростной системы должен включать в себя дополнительные члены, зависящие от модуля относительной скорости, в некоторых частных случаях (движение жидкости с пузырьками газа) отмечался в [24, 26–28]. В [27, 28] доказана гиперболичность полученных уравнений при малой относительной скорости фаз.

Мы выводим уравнение движения двухскоростного континуума на основе обобщенного принципа Гамильтона, требуя от внутренней энергии лишь выпуклость по искомым переменным [30]. В частности, выпуклость внутренней энергии, означающая термодинамическую устойчивость среды, обеспечивает гиперболичность линеаризованных на нулевом гидродинамическом фоне уравнений движения двухскоростной среды.

1. Вариационный подход к описанию двухскоростных сред. Рассмотрим двухжидкостную среду, которая характеризуется скоростями составляющих ее компонент $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, плотностями ρ_1, ρ_2 и внутренней энергией U. Принципиальным отличием двухскоростной среды от односкоростной является зависимость внутренней энергии от скорости: внутренняя энергия U зависит от модуля галилеева инварианта — относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$. Наличие такой зависимости качественно меняет вариационный принцип.

Элементарный пример. Рассмотрим грузик на нелинейной пружинке. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}p(\dot{x}) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} = 0,$$

где $p(\dot{x})$ — импульс грузика; $F(x)$ — потенциал пружинки. Интеграл энергии и лагранжиан имеют вид

$$E = \dot{x}p(\dot{x}) - \int^{\dot{x}} p(y)\,dy + F(x), \qquad L(x,\dot{x}) = \int^{\dot{x}} p(y)\,dy - F(x).$$

Легко видеть, что они связаны между собой частичным преобразованием Лежандра по переменной $\dot{x}$:

$$E = \dot{x}L_{\dot{x}} - L.$$

Из последнего соотношения вытекает, что естественными переменными для энергии E являются не переменные x, $\dot{x}$, а переменные x, p: $E = E(x, p)$.

Вариационный принцип механики двухскоростной среды. Полную энергию двухскоростной системы примем в стандартном виде $E = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2/2 + \rho_2|\mathbf{u}_2|^2/2 + U$.

Энергия системы E обычно делится на кинетическую и внутреннюю. Это достигается переходом в движущуюся систему, в которой элементарный объем сплошной среды покоится. Полная энергия среды в этой системе и принимается за внутреннюю энергию среды U. Для двухскоростных сред системы координат, в которой можно исключить движение, не существует. Как следствие, применение стандартного определения внутренней энергии приводит к зависимости от галилеева инварианта — модуля разности скоростей компонент среды $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$.

Таким образом, внутренняя энергия U двухскоростной среды является функцией аддитивных независимых термодинамических параметров, в том числе относительного импульса $\mathbf{i}$ — галилеево инвариантной термодинамической переменной, сопряженной относительной скорости $\mathbf{w}$:

$$U = U(\rho_1, \rho_2, |\mathbf{i}|).$$

В принятом адиабатическом приближении зависимость от энтропии отсутствует.

Посредством преобразования Лежандра можно ввести термодинамический потенциал $W = W(\rho_1, \rho_2, |\mathbf{w}|)$:

$$W = U - (\mathbf{i}, \mathbf{w}), \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{i}}. \tag{1.1}$$

Зная термодинамический потенциал W как функцию ρ_1, ρ_2, $|\mathbf{w}|$, можно определить внутреннюю энергию системы

$$U = W + (\mathbf{i}, \mathbf{w}) = W - \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}, \mathbf{w}\right), \qquad \mathbf{i} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}. \tag{1.2}$$

Определения (1.1), (1.2) можно представить в виде

$$W = U - iw, \quad U = W + iw, \quad i = |\mathbf{i}|, \quad w = |\mathbf{w}|, \quad i = -\frac{\partial W}{\partial w}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial i}.$$

Как показывает пример системы грузик — пружинка, для формулировки аналога принципа наименьшего действия Гамильтона для двухскоростного континуума необходимо рассмотреть лагранжиан двухскоростной системы вида

$$\tilde{L} = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2/2 + \rho_2|\mathbf{u}_2|^2/2 - W(\rho_1, \rho_2, |\mathbf{w}|). \tag{1.3}$$

Лагранжиан (1.3) позволяет сформулировать вариационный принцип механики двухскоростной среды

$$\delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{R^n} \left(\frac{\rho_1|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\rho_2|\mathbf{u}_2|^2}{2} - W(\rho_1, \rho_2, |\mathbf{w}|)\right) d\mathbf{x}\, dt = 0. \tag{1.4}$$

Обобщенный вариационный принцип. В общем случае внутренняя энергия сложных сред U может зависеть от временных производных термодинамических переменных, модуля галилеева инварианта $\mathbf{w}$ и т. д. (см., например, [31], где рассматриваются примеры сред с зависимостью внутренней энергии от полной производной плотности по времени).

Вариационный принцип для таких сред должен формулироваться на основе функционала, представляющего собой разность кинетической энергии системы K и термодинамического потенциала W, связанного частичным преобразованием Лежандра с внутренней энергией системы U по переменным ζ, сопряженным временным производным:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{R^n} (K - W) d\mathbf{x}\, dt = 0, \qquad U = W - \frac{\partial W}{\partial \zeta}\zeta.$$

2. Вариационный подход к описанию двухскоростных гомогенных сред. Рассмотрим две перемешанные жидкости, движение которых характеризуется их скоростями $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, плотностями ρ_1, ρ_2 и внутренней энергией U. Слово «перемешанные» означает, что объемная концентрация вещества не является искомым параметром, т. е. каждая компонента занимает весь объем смеси равноправно с другими. Такие многофазные среды называются *гомогенными*.

Рассмотрим случай механической системы, когда энтропии сред не являются искомыми параметрами, и, кроме того, пренебрежем зависимостью энергии от производных термодинамических величин. Нас будут интересовать уравнения движения среды, где внутренняя энергия зависит от относительной скорости.

Вариационный принцип и законы сохранения. Принцип наименьшего действия Гамильтона для двухскоростного гомогенного континуума формулируется в виде (1.4)

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{R^n} \Big(\frac{1}{2}\,\rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\rho_2|\mathbf{u}_2|^2 - W(\rho_1,\rho_2,w)\Big)\,d\mathbf{x}\,dt = 0, \tag{2.1}$$

где потенциал $W(\rho_1,\rho_2,w)$ связан частичным преобразованием Лежандра (1.1), (1.2) с объемной внутренней энергией системы $U(\rho_1,\rho_2,i)$.

Добавим к (2.1) как ограничения уравнения сохранения массы в каждой фазе:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\mathbf{u}_1) = 0, \qquad \mathcal{M}_2 = \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\mathbf{u}_2) = 0. \tag{2.2}$$

Вводя множители Лагранжа $\varphi_1(t,\mathbf{x})$, $\varphi_2(t,\mathbf{x})$, рассмотрим лагранжиан нашей системы L, определенный с точностью до дивергентного слагаемого:

$$L = \rho_1\Big(\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}_1|^2 - \frac{d_1\varphi_1}{dt}\Big) + \rho_2\Big(\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{d_2\varphi_2}{dt}\Big) - W(\rho_1,\rho_2,w). \tag{2.3}$$

Здесь операторы d_i/dt определяются по формулам:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_i,\nabla). \tag{2.4}$$

Для простоты в дальнейшем используем декартовы координаты $\{x^k\}$, $k = 1,\ 2,\ 3$. По повторяющимся индексам будет вестись суммирование.

Для каждой фазы введем свои лагранжевы координаты $\{\xi^a\}$ и $\{\eta^b\}$ ($a,\ b = 1,\ 2,\ 3$):

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial t} + u_1^k\,\frac{\partial\xi^a}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial\eta^b}{\partial t} + u_2^k\,\frac{\partial\eta^b}{\partial x^k} = 0. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\xi_t^a = \frac{\partial\xi^a}{\partial t}, \quad \eta_t^b = \frac{\partial\eta^b}{\partial t}, \quad \xi_{,k}^a = \frac{\partial\xi^a}{\partial x^k}, \quad \eta_{,k}^b = \frac{\partial\eta^b}{\partial x^k}, \quad x_{,a(\xi)}^k = \frac{\partial x^k}{\partial\xi^a}, \quad x_{,b(\eta)}^k = \frac{\partial x^k}{\partial\eta^a}. \tag{2.6}$$

Когда это ясно из контекста, будем писать $x^k_{,a}$ или $x^k_{,b}$, опуская зависимость от ξ или η. Из (2.5), (2.6) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} &u_1^k = -\xi_t^a x_{,a(\xi)}^k, && \frac{\partial u_1^k}{\partial\xi_t^a} = -x_{,a(\xi)}^k, && \frac{\partial u_1^k}{\partial\xi_{,j}^a} = -u_1^j x_{,a(\xi)}^k, \\ &u_2^k = -\eta_t^b x_{,b(\eta)}^k, && \frac{\partial u_2^k}{\partial\eta_t^b} = x_{,b(\eta)}^k, && \frac{\partial u_2^k}{\partial\eta_{,j}^a} = -u_2^j x_{,b(\eta)}^k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Рассмотрим лагранжиан L, определяемый формулой (2.3), как функцию переменных ξ^a_t, $\xi^a_{,k}$, η^b_t, $\eta^b_{,k}$, φ_{1t}, $\varphi_{1,k}$, φ_{2t}, $\varphi_{2,k}$, ρ_1, ρ_2. Индекс t означает частную производную по времени $\partial/\partial t$.

Определим вариационные производные

$$L_a \equiv \frac{\delta L}{\delta \xi^a} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}}\right), \qquad L_b \equiv \frac{\delta L}{\delta \eta^b} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta^b_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}}\right),$$

$$L_{\varphi_i} \equiv \frac{\delta L}{\delta \varphi_i} = \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_i u^k_i), \qquad L_{\rho_i} \equiv \frac{\delta L}{\delta \rho_i} = \frac{1}{2}|\mathbf{u}_i|^2 - \frac{d_i\varphi_i}{dt} - \frac{\partial W}{\partial \rho_i}.$$

Приравнивая их к нулю и исключая множители Лагранжа, получим искомые уравнения движения.

Инвариантность лагранжиана относительно сдвигов по пространственным переменным влечет, согласно теореме Нётер [32], дивергентность выражения

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_m \equiv{}& \xi^a_{,m} L_a + \eta^b_{,m} L_b + \varphi_{1,m} L_{\varphi_1} + \varphi_{2,m} L_{\varphi_2} + \rho_{1,m} L_{\rho_1} + \rho_{2,m} L_{\rho_2} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\xi^a_{,m}\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t} - \eta^b_{,m}\frac{\partial L}{\partial \eta^b_t} - \varphi_{1,m}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} - \varphi_{2,m}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(-\xi^a_{,m}\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} - \eta^b_{,m}\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}} - \varphi_{1,m}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} - \varphi_{2,m}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}} + L\delta^k_m\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Инвариантность лагранжиана относительно сдвигов по времени влечет дивергентность выражения (знак минус взят для удобства):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \equiv{}& -\xi^a_t L_a - \eta^b_t L_b - \varphi_{1t} L_{\varphi_1} - \varphi_{2t} L_{\varphi_2} - \rho_{1t} L_{\rho_1} - \rho_{2t} L_{\rho_2} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\xi^a_t\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t} + \eta^b_t\frac{\partial L}{\partial \eta^b_t} + \varphi_{1t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} + \varphi_{2t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} - L\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\xi^a_t\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} + \eta^b_t\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}} + \varphi_{1t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} + \varphi_{2t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}}\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Дивергентность (2.8), (2.9) может быть проверена непосредственными выкладками.

Так как вариационные производные обращаются в нуль, уравнения (2.8), (2.9) представляют собой законы сохранения: (2.8) есть закон сохранения импульса $\mathbf{j} = \rho_1\mathbf{u}_1 + \rho_2\mathbf{u}_2$, (2.9) — закон сохранения энергии E. Найдем явный вид уравнений (2.8), (2.9) в терминах искомых переменных.

Из определения вариационных производных следует

$$\begin{aligned}
\rho_1 L_{\rho_1} + \rho_2 L_{\rho_2} ={}& \rho_1\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}_1|^2 - \frac{d_1\varphi_1}{dt}\right) + \rho_2\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{d_2\varphi_2}{dt}\right) - \\
&- \rho_1\frac{\partial W}{\partial \rho_1} - \rho_2\frac{\partial W}{\partial \rho_2} + W - W = L - \left(\rho_1\frac{\partial W}{\partial \rho_1} + \rho_2\frac{\partial W}{\partial \rho_2} - W\right).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что на экстремали выполнено равенство:

$$L = \rho_1\frac{\partial W}{\partial \rho_1} + \rho_2\frac{\partial W}{\partial \rho_2} - W. \tag{2.10}$$

Обозначим $w^k = u^k_2 - u^k_1$. Используя соотношения (2.7), имеем:

$$-\xi^a_{,m}\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t} = -\xi^a_{,m}\left\{\rho_1 u_{1k}(-x^k_{,a}) - \frac{\partial W}{\partial w^k}x^k_{,a} + \rho_1\varphi_{1,k}x^k_{,a}\right\} = \rho_1 u_{1m} + \frac{\partial W}{\partial w^m} - \rho_1\varphi_{1,m},$$

$$-\eta^b_{,m}\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_t} = \rho_2 u_{2m} - \frac{\partial W}{\partial w^m} - \rho_2\varphi_{2,m}, \quad -\varphi_{1,m}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} = \varphi_{1,m}\rho_1, \quad -\varphi_{2,m}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} = \varphi_{2,m}\rho_2,$$

$$-\xi^a_{,m}\,\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} = -\xi^a_{,m}\Big\{\rho_1 u_{1i}(-u_1^k x^i_{,a}) - \frac{\partial W}{\partial w^i}\,(u_1^k x^i_{,a}) - \rho_1\varphi_{1,i}(-u_1^k x^i_{,a})\Big\} =$$

$$= \rho_1 u_{1m} u_1^k + \frac{\partial W}{\partial w^m} u_1^k - \rho_1\varphi_{1,m} u_1^k,$$

$$-\eta^b_{,m}\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_k} = \rho_2 u_{2m} u_2^k - \frac{\partial W}{\partial w^m} u_2^k - \rho_2\varphi_{2,m} u_2^k,$$

$$-\varphi_{1,m}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} = \rho_1\varphi_{1,m} u_1^k, \qquad -\varphi_{2,m}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}} = \rho_2\varphi_{2,m} u_2^k.$$

Тогда из (2.8) вытекает уравнение для полного импульса среды:

$$\mathcal{J}_m = \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho_1 u_{1m} + \rho_2 u_{2m}) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\rho_1 u_{1m} u_1^k + \rho_2 u_{2m} u_2^k - \frac{\partial W}{\partial w^m}\,w^k + L\delta^k_m\Big) = 0.$$

Видно, что введенная нами функция Лагранжа L совпадает с термодинамическим определением давления в системе.

Используя соотношение (2.10), можем записать

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho_1\mathbf{u}_1 + \rho_2\mathbf{u}_2) +$$
$$+ \operatorname{div}\Big(\rho_1\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1 + \rho_2\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_2 - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}\otimes\mathbf{w} + \Big(\rho_1\,\frac{\partial W}{\partial \rho_1} + \rho_2\,\frac{\partial W}{\partial \rho_2} - W\Big)I\Big) = 0, \qquad (2.11)$$

где $\otimes$ — тензорное произведение; I — единичный тензор.

Аналогично

$$\xi^a_t\,\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t} = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{\partial W}{\partial w^k}\,u_1^k - \rho_1\varphi_{1,k}u_1^k, \qquad \varphi_{1t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} = -\rho_1\varphi_{1t},$$

$$\eta^b_t\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_t} = \rho_2|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{\partial W}{\partial w^k}\,u_2^k - \rho_2\varphi_{2,k}u_2^k, \qquad \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} = -\rho_2\varphi_{2t},$$

$$\xi^a_t\,\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2 u_1^k + \frac{\partial W}{\partial w^i}\,u_1^i u_1^k - \rho_1\varphi_{1,i}u_1^i u_1^k, \qquad \varphi_{1t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} = -\varphi_{1t}\rho_1 u_1^k,$$

$$\eta^b_t\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}} = \rho_2|\mathbf{u}_2|^2 u_2^k - \frac{\partial W}{\partial w^i}\,u_2^i u_2^k - \rho_2\varphi_{2,i}u_2^i u_2^k, \qquad \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}} = -\varphi_{2t}\rho_2 u_2^k.$$

Подставляя полученные выше формулы в (2.9) и используя определение L, окончательно имеем

$$\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\,\rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\,\rho_2|\mathbf{u}_2|^2 + W - \mathbf{w}\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}\Big) + \operatorname{div}\Big(\rho_1\mathbf{u}_1\Big(\frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_1}\Big) +$$
$$+ \rho_2\mathbf{u}_2\Big(\frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_2}\Big) - (\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1)\Big\langle\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}\Big\rangle\Big) = 0. \qquad (2.12)$$

Здесь операция $A\langle\mathbf{b}\rangle$ означает умножение тензора A на вектор $\mathbf{b}$.

Уравнения движения фаз получаются стандартным образом. Рассмотрим выражение

$$\xi^a_{,m}L_a \equiv -\,\xi^a_{,m}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t}\Big) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}}\Big)\Big) = 0.$$

Непосредственные вычисления приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1 u_{1m} + \frac{\partial W}{\partial w^m}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\left(\rho_1 u_{1m} + \frac{\partial W}{\partial w^m}\right)u_1^k\right) + \left(\rho_1 u_{1k} + \frac{\partial W}{\partial w^k}\right)\frac{\partial u_1^k}{\partial x^m} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{d_1\varphi_1}{dt}\right) = 0.$$

Так как из соотношения $L_{\rho_1} = 0$ вытекает, что

$$\frac{d_1\varphi_1}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{u}_1|^2 - \frac{\partial W}{\partial \rho_1},$$

получаем уравнение для $\mathbf{u}_1$

$$\rho_1 \frac{\partial u_{1m}}{\partial t} + \rho_1 u_1^k \frac{\partial u_{1m}}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial w^m}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial W}{\partial w^m}u_1^k\right) + \frac{\partial W}{\partial w^k}\frac{\partial u_1^k}{\partial x^m} + \rho_1 \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho_1}\right) = 0.$$

В векторном виде это уравнение имеет вид

$$\rho_1\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1\right) - \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{u}_1) - \nabla \mathbf{u}_1 \langle \mathbf{i} \rangle + \rho_1 \nabla\left(\frac{\partial W}{\partial \rho_1}\right) = 0. \tag{2.13}$$

Здесь

$$\mathbf{i} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}, \qquad \nabla \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}}\right)^*$$

($*$ означает сопряженное отображение).

Аналогично для второй фазы получаем

$$\rho_2 \frac{\partial u_{2m}}{\partial t} + \rho_2 u_2^k \frac{\partial u_{2m}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial w^m}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial W}{\partial w^m}u_2^k\right) - \frac{\partial W}{\partial w^k}\frac{\partial u_2^k}{\partial x^m} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho_2}\right) = 0,$$

или в векторном виде

$$\rho_2\left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2\right) + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \mathbf{u}_2 \langle \mathbf{i} \rangle + \rho_2 \nabla\left(\frac{\partial W}{\partial \rho_2}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Перепишем окончательно законы сохранения (2.2), (2.11), (2.12) в виде системы:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \mathbf{u}_1 + \rho_2 \mathbf{u}_2) + \operatorname{div}\left(\rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \rho_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}} \otimes \mathbf{w} + I\left(\rho_1 \frac{\partial W}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial W}{\partial \rho_2} - W\right)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\rho_2|\mathbf{u}_2|^2 + W - \mathbf{w}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}}\right) + \operatorname{div}\left(\rho_1 \mathbf{u}_1\left(\frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \rho_2 \mathbf{u}_2\left(\frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_2}\right) - (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1)\left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathbf{w}} \right\rangle\right) = 0.$$

Из (2.12), в частности, вытекает, что определение вариационного принципа в виде (1.4) дает правильное определение полной энергии системы

$$E = \frac{1}{2}\rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\rho_2|\mathbf{u}_2|^2 + U(\rho_1, \rho_2, i), \qquad U(\rho_1, \rho_2, i) = W - wi, \quad i = -\frac{\partial W}{\partial w}.$$

Предположим, что $U(\rho_1, \rho_2, i)$ удовлетворяет условию термодинамической устойчивости среды.

Условие S: *Функция $U(\rho_1, \rho_2, i)$ является выпуклой функцией своих переменных.*

Как следствие, $W(\rho_1, \rho_2, w)$ является выпуклой по переменным ρ_1, ρ_2 и вогнутой по переменной w.

Система уравнений для плоских волн. В одномерном случае система законов сохранения (2.2), (2.11), (2.12) замкнута, если задана внутренняя энергия среды. Исследуем тип системы. Обозначим $u_1^1 = u_1$, $u_2^1 = u_2$, $x^1 = x$, $w = u_2 - u_1$; индекс t соответствует $\partial/\partial t$, индекс x — $\partial/\partial x$.

Сделаем одну упрощающую гипотезу о виде внутренней энергии $U(\rho_1, \rho_2, i)$.

Условие А: *Функция $U(\rho_1, \rho_2, i)$ имеет вид*

$$U(\rho_1, \rho_2, i) = \varepsilon(\rho_1, \rho_2) + \frac{i^2}{2a} = \varepsilon(\rho_1, \rho_2) + \frac{aw^2}{2}$$

(a — *некоторая положительная постоянная*).

Из условия **А** вытекает

$$W = \varepsilon(\rho_1, \rho_2) - \frac{aw^2}{2}.$$

Тогда из (2.13), (2.14) имеем

$$\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} - a \frac{d_1 w}{dt} - 2awu_{1x} + \rho_1(\varepsilon_1)_x = 0; \qquad (2.15)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 u_2}{at} + a \frac{d_2 w}{dt} + 2awu_{2x} + \rho_2(\varepsilon_2)_x = 0, \qquad (2.16)$$

где $\varepsilon_i = \partial\varepsilon/\partial\rho_i$.

Таким образом, с учетом (2.15), (2.16) искомые уравнения для одномерных движений с плоскими волнами примут вид

$$\begin{gathered} \rho_{1t} + u_1\rho_{1x} + u_{1x}\rho_1 = 0, \qquad \rho_{2t} + u_2\rho_{2x} + u_{2x}\rho_2 = 0, \\ \rho_1(u_{1t} + u_1u_{1x}) - a(w_t + u_1w_x) - 2awu_{1x} + \rho_1(\varepsilon_{11}\rho_{1x} + \varepsilon_{12}\rho_{2x}) = 0, \\ \rho_2(u_{2t} + u_2u_{2x}) + a(w_t + u_2w_x) + 2awu_{2x} + \rho_2(\varepsilon_{12}\rho_{1x} + \varepsilon_{22}\rho_{2x}) = 0, \end{gathered} \qquad (2.17)$$

где $\varepsilon_{ij} = \partial^2\varepsilon/\partial\rho_i\partial\rho_j$.

Гиперболичность уравнений движения двухскоростных гомогенных сред. Система (2.17) может быть переписана в матричном виде:

$$A\mathbf{u}_t + B\mathbf{u}_x = 0,$$

где

$$\mathbf{u} = (\rho_1, \rho_2, u_1, u_2)^{\mathrm{T}}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 + a & -a \\ 0 & 0 & -a & \rho_2 + a \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \rho_2 \\ \rho_1\varepsilon_{11} & \rho_1\varepsilon_{12} & (\rho_1 + 3a)u_1 - 2au_2 & -au_1 \\ \rho_2\varepsilon_{12} & \rho_2\varepsilon_{22} & -au_2 & (\rho_2 + 3a)u_2 - 2au_1 \end{pmatrix}.$$

Легко вычислить, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\rho_2 + a)/\delta & a/\delta \\ 0 & 0 & a/\delta & (\rho_1 + a)/\delta \end{pmatrix}, \qquad C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \rho_2 \\ m_{11} & m_{12} & d_{11} & d_{12} \\ m_{21} & m_{22} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\delta = (\rho_1 + a)(\rho_2 + a) - a^2 > 0,$$

$$m_{11} = \frac{\rho_1(\rho_2 + a)}{\delta}\varepsilon_{11} + \frac{a\rho_2}{\delta}\varepsilon_{12}, \qquad m_{12} = \frac{\rho_1(\rho_2 + a)}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{a\rho_2}{\delta}\varepsilon_{22},$$

$$m_{21} = \frac{a\rho_1}{\delta}\varepsilon_{11} + \frac{\rho_2(\rho_1 + a)}{\delta}\varepsilon_{12}, \qquad m_{22} = \frac{a\rho_1}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{\rho_2(\rho_1 + a)}{\delta}\varepsilon_{22},$$

$$d_{11} = u_2 - \frac{(\rho_2 + a)(\rho_1 + 3a)w}{\delta}, \qquad d_{12} = \frac{a(\rho_2 + 3a)w}{\delta},$$

$$d_{21} = \frac{a(\rho_1 + 3a)w}{\delta}, \qquad d_{22} = u_1 + \frac{(\rho_1 + a)(\rho_2 + 3a)w}{\delta}.$$

Собственные числа матрицы C определяются из решения уравнения $\det|C - \lambda I| = 0$. Рассмотрим упрощенный вариант соответствующего полинома четвертой степени относительно переменной λ, получаемой при линеаризации системы в окрестности точки $u_1^0 = u_2^0$, ρ_1^0, ρ_2^0. Не уменьшая общности, считаем, что $u_1^0 = u_2^0 = 0$ (в дальнейшем индекс 0 опустим). Так как d_{ij} зануляются при линеаризации, то полином примет вид

$$\lambda^4 - \lambda^2(\rho_2 m_{22} + \rho_1 m_{11}) + \rho_1\rho_2(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) = 0. \tag{2.18}$$

Для вещественности всех корней уравнения (2.18) достаточно проверить, что

$$\rho_2 m_{22} + \rho_1 m_{11} > 0, \qquad m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} > 0,$$
$$(\rho_2 m_{22} + \rho_1 m_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) > 0.$$

Первое неравенство проверяется непосредственно:

$$\rho_2 m_{22} + \rho_1 m_{11} = \frac{a\rho_1\rho_2}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{{\rho_2}^2(\rho_1 + a)}{\delta}\varepsilon_{22} + \frac{a\rho_1\rho_2}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{{\rho_1}^2(\rho_2 + a)}{\delta}\varepsilon_{11} =$$
$$= \frac{\rho_1{\rho_2}^2\varepsilon_{22} + \rho_2{\rho_1}^2\varepsilon_{11}}{\delta} + \frac{a}{\delta}(\varepsilon\rho, \rho) > 0,$$

где через $(\varepsilon\rho, \rho)$ обозначена положительно определенная квадратичная форма

$$(\varepsilon\rho, \rho) = \varepsilon_{11}{\rho_1}^2 + 2\varepsilon_{12}\rho_1\rho_2 + \varepsilon_{22}{\rho_2}^2.$$

Второе неравенство также проверяется прямым вычислением:

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \left(\frac{\rho_1(\rho_2 + a)}{\delta}\varepsilon_{11} + \frac{a\rho_2}{\delta}\varepsilon_{12}\right)\left(\frac{a\rho_1}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{\rho_2(\rho_1 + a)}{\delta}\varepsilon_{22}\right) -$$
$$- \left(\frac{\rho_1(\rho_2 + a)}{\delta}\varepsilon_{12} + \frac{a\rho_2}{\delta}\varepsilon_{22}\right)\left(\frac{a\rho_1}{\delta}\varepsilon_{11} + \frac{\rho_2(\rho_1 + a)}{\delta}\varepsilon_{12}\right) =$$
$$= \left(\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + a)(\rho_2 + a)}{\delta^2} - \frac{a^2\rho_1\rho_2}{\delta^2}\right)\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \left(\frac{a^2\rho_1\rho_2}{\delta^2} - \frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + a)(\rho_2 + a)}{\delta^2}\right)\varepsilon_{12}^2 =$$
$$= \frac{\rho_1\rho_2}{\delta}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) > 0.$$

И наконец,

$$(\rho_2 m_{22} + \rho_1 m_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) =$$
$$= \left(\frac{\rho_1{\rho_2}^2\varepsilon_{22} + \rho_2{\rho_1}^2\varepsilon_{11}}{\delta} + \frac{a}{\delta}({\rho_1}^2\varepsilon_{11} + 2\rho_1\rho_2\varepsilon_{12} + {\rho_2}^2\varepsilon_{22})\right)^2 - \frac{4{\rho_1}^2{\rho_2}^2}{\delta}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) =$$

$$= \frac{{\rho_1}^2{\rho_2}^2}{\delta}\Big(\frac{a^2}{{\rho_1}^2{\rho_2}^2}(\varepsilon\rho,\rho)^2 + 2a\Big(\frac{(\varepsilon\rho,\rho)}{\rho_1\rho_2}(\rho_2\varepsilon_{22}+\rho_1\varepsilon_{11}) - 2(\rho_1+\rho_2)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)\Big) +$$
$$+ (\rho_2\varepsilon_{22}+\rho_1\varepsilon_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)\Big) \equiv \frac{{\rho_1}^2{\rho_2}^2}{\delta} f(a),$$

где через $f(a)$ обозначен полином второй степени относительно a:

$$f(a) = \frac{a^2(\varepsilon\rho,\rho)^2}{{\rho_1}^2{\rho_2}^2} + (\rho_2\varepsilon_{22}+\rho_1\varepsilon_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2) +$$
$$+ \frac{2a(\varepsilon\rho,\rho)}{\rho_1\rho_2}\Big(\rho_2\varepsilon_{22}+\rho_1\varepsilon_{11} - \frac{2(\rho_1+\rho_2)\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)}{(\varepsilon\rho,\rho)}\Big) =$$
$$= \Big(\frac{a(\varepsilon\rho,\rho)}{\rho_1\rho_2} + \rho_2\varepsilon_{22}+\rho_1\varepsilon_{11} - \frac{2(\rho_1+\rho_2)\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)}{(\varepsilon\rho,\rho)}\Big)^2 +$$
$$+ \frac{4(\rho_1+\rho_2)\rho_1\rho_2(\rho_1\varepsilon_{11}+\rho_2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)}{(\varepsilon\rho,\rho)} -$$
$$- \frac{4(\rho_1+\rho_2)^2{\rho_1}^2{\rho_2}^2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)^2}{(\varepsilon\rho,\rho)^2} - 4\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2).$$

Если функция $g(\rho_1\rho_2) = 4((\rho_1+\rho_2)(\rho_1\varepsilon_{11}+\rho_2\varepsilon_{22})(\varepsilon\rho,\rho) - (\varepsilon\rho,\rho)^2 - \rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)^2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2))\rho_1\rho_2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)/(\varepsilon\rho,\rho)^2$ неотрицательна при всех $\rho_1, \rho_2 > 0$, то $f(a)$ неотрицательна при всех $a \geqslant 0$. Последнее доказывается следующей выкладкой. Обозначим $z = \rho_1/\rho_2$. Тогда $-(\varepsilon_{11}z^2+2\varepsilon_{12}z+\varepsilon_{22})^2 - z(1+z)^2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2) + (1+z)(\varepsilon_{11}z+\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11}z^2+2\varepsilon_{12}z+\varepsilon_{22}) = z(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}z-\varepsilon_{12}z)^2 \geqslant 0$ при $z > 0$. Таким образом, $g(\rho_1,\rho_2) \geqslant 0$. Это означает гиперболичность нашей системы при всех $a \geqslant 0$.

3. Вариационный подход к описанию двухскоростных гетерогенных несжимаемых сред. Получим уравнения движения гетерогенной двухскоростной среды. Компоненты среды будем считать несжимаемыми. В принятом адиабатическом приближении зависимость от энтропии отсутствует.

Вариационный принцип и законы сохранения. Рассматриваемый случай несжимаемых подвижных сред, составляющих гетерогенную двухскоростную среду, имеет еще одну связь, отвечающую условию совместности деформирования двух компонент. Введем объемные концентрации компонент $\alpha_1 = \rho_1/\hat\rho_1$, $\alpha_2 = \rho_2/\hat\rho_2$, выразив парциальные плотности двух компонент через физические плотности $\hat\rho_1$, $\hat\rho_2$, которые в силу несжимаемости подвижных сред постоянны. Следует отметить, что изменение плотности ρ может происходить только за счет изменения соотношения компонент 1 и 2 в единице объема двухскоростной среды. Тогда из аддитивности массы следует дополнительная связь на объемные концентрации

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \tag{3.1}$$

При формулировке вариационного принципа наличие связи (3.1) учтем аналогично условиям (2.2), (2.3) с помощью множителя Лагранжа γ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{R^n} \Big(\frac{\rho_1|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\rho_2|\mathbf{u}_2|^2}{2} - W(\rho_1,\rho_2,|\mathbf{w}|) -$$
$$- \rho_1(\varphi_{1t} + u_1^k\varphi_{1,k}) - \rho_2(\varphi_{2t} + u_2^k\varphi_{2,k}) + \gamma(\alpha_1+\alpha_2-1)\Big)\, d\mathbf{x}\, dt = 0.$$

В дальнейшем удобнее работать с переменными ρ_1, ρ_2, а не с α_1, α_2. Окончательно лагранжиан принимает вид

$$L = \frac{\rho_1|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\rho_2|\mathbf{u}_2|^2}{2} - W(\rho_1, \rho_2, |\mathbf{w}|) - \rho_1(\varphi_{1t} + u_1^k\varphi_{1,k}) - \rho_2(\varphi_{2t} + u_2^k\varphi_{2,k}) + \gamma\left(\frac{\rho_1}{\hat\rho_1} + \frac{\rho_2}{\hat\rho_2} - 1\right). \tag{3.2}$$

Переходя в (3.2) к лагранжевым переменным ξ^a, η^b, введенным соотношениями (2.5), находим, что лагранжиан L является функцией переменных ρ_1, ρ_2, ξ^a_t, $\xi^a_{,k}$, η^b_t, $\eta^b_{,k}$, φ_{1t}, $\varphi_{1,k}$, φ_{2t}, $\varphi_{2,k}$, γ.

Варьирование по лагранжевым множителям $\varphi_1, \varphi_2, \gamma$ дает накладываемые на систему связи (2.2) и (3.1) соответственно

$$L_{\varphi_1} \equiv \frac{\delta L}{\delta\varphi_1} = \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\mathbf{u}_1), \quad L_{\varphi_2} \equiv \frac{\delta L}{\delta\varphi_2} = \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\mathbf{u}_2), \quad L_\gamma \equiv \frac{\delta L}{\delta\gamma} = \alpha_1 + \alpha_2 - 1.$$

Вариации по парциальным плотностям ρ_1 и ρ_2 имеют вид

$$L_{\rho_1} \equiv \frac{\delta L}{\delta\rho_1} = \frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} - \frac{\partial W}{\partial\rho_1} - \varphi_{1t} - u_1^k\varphi_{1,k} + \frac{\gamma}{\hat\rho_1}, \qquad L_{\rho_2} \equiv \frac{\delta L}{\delta\rho_2} = \frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} - \frac{\partial W}{\partial\rho_2} - \varphi_{2t} - u_2^k\varphi_{2,k} + \frac{\gamma}{\hat\rho_2}$$

и позволяют определить полные производные множителей Лагранжа

$$\frac{d_1\varphi_1}{dt} = \varphi_{1t} + u_1^k\varphi_{1,k} = \frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} - \frac{\partial W}{\partial\rho_1} + \frac{\gamma}{\hat\rho_1}; \tag{3.3}$$

$$\frac{d_2\varphi_2}{dt} = \varphi_{2t} + u_2^k\varphi_{2,k} = \frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} - \frac{\partial W}{\partial\rho_2} + \frac{\gamma}{\hat\rho_2}. \tag{3.4}$$

Используя функцию Лагранжа (3.2), можно ввести давление p, соответствующее термодинамическому определению давления. В самом деле, складывая соотношения (3.3) и (3.4), умноженные на ρ_1 и ρ_2 соответственно, имеем

$$p \equiv L = -\gamma - W + \rho_1\frac{\partial W}{\partial\rho_1} + \rho_2\frac{\partial W}{\partial\rho_2}, \tag{3.5}$$

где γ определяет поправку к давлению, отвечающую условию совместности компонент.

Для получения закона сохранения импульса построим выражение, аналогичное (2.8). Оно характеризует однородность пространства и имеет вид закона сохранения:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_k = \rho_{1,k}L_{\rho_1} + \rho_{2,k}L_{\rho_2} + \varphi_{1,k}L_{\varphi_1} + \varphi_{2,k}L_{\varphi_2} + \xi^a_{,k}L_a + \eta^b_{,k}L_b + \gamma_{,k}L_\gamma &= \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\xi^a_{,k}\frac{\partial L}{\partial\xi^a_t} - \eta^b_{,k}\frac{\partial L}{\partial\eta^b_t} - \varphi_{1,k}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{1t}} - \varphi_{2,k}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{2t}}\right) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial x^m}\left(-\xi^a_{,k}\frac{\partial L}{\partial\xi^a_{,m}} - \eta^b_{,k}\frac{\partial L}{\partial\eta^b_{,m}} - \varphi_{1,k}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{1,m}} - \varphi_{2,k}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{2,m}} + L\delta^m_k\right)&.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Частные производные, входящие в (3.6), находятся с учетом соотношений (2.5)

$$-\xi^a_{,k}\frac{\partial L}{\partial\xi^a_t} = \xi^a_{,k}x^m_{,a}\left(\rho_1u_{1m} + \frac{\partial W}{\partial w^m} - \rho_1\varphi_{1,m}\right) = \rho_1u_{1k} + \frac{\partial W}{\partial w^k} - \rho_1\varphi_{1,k},$$

$$-\xi^a_{,k}\frac{\partial L}{\partial\xi^a_{,m}} = \xi^a_{,k}x^n_{,a}u_1^m\left(\rho_1u_{1n} + \frac{\partial W}{\partial w^n} - \rho_1\varphi_{1,n}\right) = \rho_1u_{1k}u_1^m + \frac{\partial W}{\partial w^k}u_1^m - \rho_1\varphi_{1,k}u_1^m.$$

Аналогично

$$-\eta^b_{,k}\frac{\partial L}{\partial\eta^b_t} = \rho_2u_{2k} - \frac{\partial W}{\partial w^k} - \rho_2\varphi_{2,k}, \qquad -\varphi_{1,k}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{1t}} = \varphi_{1,k}\rho_1,$$

$$-\eta^b_{,k}\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,m}} = \rho_2 u_{2k} u_2^m - \frac{\partial W}{\partial w^k}\,u_2^m - \rho_2\varphi_{2,k}u_2^m, \qquad -\varphi_{2,k}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} = \varphi_{2,k}\rho_2,$$

$$-\varphi_{1,k}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,m}} = \rho_1\varphi_{1,k}u_1^m, \qquad -\varphi_{2,k}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,m}} = \rho_2\varphi_{2,k}u_2^m.$$

В результате закон сохранения импульса (3.6) принимает вид

$$\frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^m}\Big(\rho_1 u_{1k} u_1^m + \rho_2 u_{2k} u_2^m - \frac{\partial W}{\partial w^k}\,w^m + L\delta_k^m\Big) = 0. \tag{3.7}$$

Закону сохранения энергии, отражающему однородность пространства, соответствует выражение $-\mathcal{E} = \rho_{1t}L_{\rho_1} + \rho_{2t}L_{\rho_2} + \varphi_{1t}L_{\varphi_1} + \varphi_{2t}L_{\varphi_2} + \xi_t^a L_a + \eta_t^b L_b + \gamma_t L_\gamma$, также имеющее дивергентный вид:

$$\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\xi_t^a\,\frac{\partial L}{\partial \xi_t^a} + \eta_t^b\,\frac{\partial L}{\partial \eta_t^b} + \varphi_{1t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} + \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} - L\Big) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\xi_t^a\,\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} + \eta_t^b\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}} + \varphi_{1t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} + \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}}\Big). \tag{3.8}$$

Вычисление частных производных в (3.8) позволяет получить явный вид закона сохранения энергии. Имеем

$$\xi_t^a\,\frac{\partial L}{\partial \xi_t^a} = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2 + \frac{\partial W}{\partial w^k}\,u_1^k - \rho_1\varphi_{1,k}u_1^k, \qquad \varphi_{1t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1t}} = -\varphi_{1t}\rho_1,$$

$$\eta_t^b\,\frac{\partial L}{\partial \eta_t^b} = \rho_2|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{\partial W}{\partial w^k}\,u_2^k - \rho_2\varphi_{2,k}u_2^k, \qquad \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2t}} = -\varphi_{2t}\rho_2,$$

$$\xi_t^a\,\frac{\partial L}{\partial \xi^a_{,k}} = \rho_1|\mathbf{u}_1|^2u_1^k + \frac{\partial W}{\partial w^m}\,u_1^m u_1^k - \rho_1\varphi_{1,m}u_1^m u_1^k, \qquad \varphi_{1t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,k}} = -\rho_1\varphi_{1t}u_1^k,$$

$$\eta_t^b\,\frac{\partial L}{\partial \eta^b_{,k}} = \rho_2|\mathbf{u}_2|^2u_2^k - \frac{\partial W}{\partial w^m}\,u_2^m u_2^k - \rho_2\varphi_{2,m}u_2^m u_2^k, \qquad \varphi_{2t}\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_{2,k}} = -\rho_2\varphi_{2t}u_2^k.$$

Откуда

$$\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(U + \frac{\rho_1|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\rho_2|\mathbf{u}_2|^2}{2}\Big) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\rho_1 u_1^k\Big(\frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_1}\Big) +$$
$$+\rho_2 u_2^k\Big(\frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_2}\Big) + \frac{\partial W}{\partial w^m}\,(u_1^m u_1^k - u_2^m u_2^k) - \gamma(\alpha_1 u_1^k + \alpha_2 u_2^k)\Big) = 0.$$

Выразив γ через известные термодинамические функции (3.5), получаем закон сохранения энергии двухскоростной среды с несжимаемыми компонентами:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\rho_1 u_1^k\Big(\frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_1}\Big) + \rho_2 u_2^k\Big(\frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial \rho_2}\Big) +$$
$$+\frac{\partial W}{\partial w^m}\,(u_1^m u_1^k - u_2^m u_2^k) + \Big(p + W - \rho_1\,\frac{\partial W}{\partial \rho_1} - \rho_2\,\frac{\partial W}{\partial \rho_2}\Big)(\alpha_1 u_1^k + \alpha_2 u_2^k)\Big) = 0. \tag{3.9}$$

Система законов сохранения двухскоростной гетерогенной несжимаемой среды (2.2), (3.7), (3.9) в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\mathbf{u}_1) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\mathbf{u}_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1\mathbf{u}_1+\rho_2\mathbf{u}_2)+\operatorname{div}\Big(\rho_1\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1+\rho_2\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_2-\frac{\partial W}{\partial\mathbf{w}}\otimes\mathbf{w}+Ip\Big)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho_1|\mathbf{u}_1|^2+\frac{1}{2}\rho_2|\mathbf{u}_2|^2+W-\mathbf{w}\frac{\partial W}{\partial\mathbf{w}}\Big)+\operatorname{div}\Big(\rho_1\mathbf{u}_1\Big(\frac{|\mathbf{u}_1|^2}{2}+\frac{\partial W}{\partial\rho_1}\Big)+\rho_2\mathbf{u}_2\Big(\frac{|\mathbf{u}_2|^2}{2}+\frac{\partial W}{\partial\rho_2}\Big)-$$
$$-(\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1)\Big(\frac{\partial W}{\partial\mathbf{w}}\Big)-\Big(p+W-\rho_1\frac{\partial W}{\partial\rho_1}-\rho_2\frac{\partial W}{\partial\rho_2}\Big)(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2)\Big)=0.$$

Система уравнений для плоских волн. Для исследования вопроса об устойчивости описываемой среды рассмотрим распространение плоских волн в одномерном приближении. В качестве упрощающего условия примем, что внутренняя энергия зависит от относительной скорости компонент квадратично (условие **A**) $U=\varepsilon(\rho_1,\rho_2)+aw^2/2$, $W=\varepsilon(\rho_1,\rho_2)-aw^2/2$ (a — некоторая положительная постоянная).

Для несжимаемых сред ρ_1 и ρ_2 не являются независимыми функциями $\rho_1=\hat\rho_1\alpha$, $\rho_2=\hat\rho_2(1-\alpha)$, где $\alpha\equiv\alpha_1$, $\alpha_2=1-\alpha$. Как следствие, термодинамическая система является двухпараметрической

$$dU=Zd\alpha+aw\,dw,\qquad Z=Z(\alpha)=\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_1}\Big)\hat\rho_1-\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_2}\Big)\hat\rho_2. \tag{3.10}$$

В дальнейшем ограничимся одномерным случаем системы (2.2), (3.7), (3.9). В рамках сделанных предположений законы сохранения масс (2.2) в силу геометрического соотношения (3.1) приводятся к виду

$$\alpha_t+(\alpha u_1)_x=0; \tag{3.11}$$

$$(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)_x=0. \tag{3.12}$$

Из уравнения (3.12) следует, что значение выражения $\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$ не зависит от x. Считая, что источники массы на бесконечности отсутствуют, положим

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2=0. \tag{3.13}$$

Тогда уравнение (3.11) и закон сохранения энергии образуют независимую подсистему

$$\alpha_t+(\alpha u_1)_x=0,$$
$$U_t+\Big(\rho_1\frac{u_1^2}{2}\Big)_t+\Big(\rho_2\frac{u_2^2}{2}\Big)_t+\Big(\rho_1u_1\Big(\frac{u_1^2}{2}+\frac{\partial W}{\partial\rho_1}\Big)+\rho_2u_2\Big(\frac{u_2^2}{2}+\frac{\partial W}{\partial\rho_2}\Big)+aw(u_2^2-u_1^2)\Big)_x=0$$

с дополнительным ограничением (3.13).

Из условия (3.13) следует

$$u_1=-(1-\alpha)w,\qquad u_2=\alpha w,\qquad w=u_2-u_1. \tag{3.14}$$

Используя (3.14), приходим к системе двух уравнений относительно переменных α, w:

$$\alpha_t-(\alpha(1-\alpha)w)_x=0; \tag{3.15}$$

$$Z\alpha_t+aww_t+\Big(\hat\rho_1\alpha(1-\alpha)^2\frac{w^2}{2}+\hat\rho_2\alpha^2(1-\alpha)\frac{w^2}{2}\Big)_t-\Big(a(1-2\alpha)w^3\Big)_x-$$
$$-\Big(\hat\rho_1\alpha(1-\alpha)^3\frac{w^3}{2}-\hat\rho_2\alpha^3(1-\alpha)\frac{w^3}{2}+\alpha(1-\alpha)\,w\,Z\Big)_x=0 \tag{3.16}$$

(функция Z введена в (3.10)).

Система (3.15), (3.16) эквивалентна уравнениям:

$$\alpha_t-\alpha(1-\alpha)w_x-(1-2\alpha)\,w\,\alpha_x=0; \tag{3.17}$$

$$(\hat\rho_1(1-\alpha)+\hat\rho_2\alpha+\tilde a)\,w_t+(\hat\rho_2-\hat\rho_1)w\,\alpha_t+(-\hat\rho_1(1-\alpha)^2+\hat\rho_2\alpha^2-\\ -3\tilde a(1-2\alpha))w\,w_x+(-Z_\alpha+(\hat\rho_1(1-\alpha)+\hat\rho_2\alpha+2\tilde a)w^2)\,\alpha_x=0, \qquad (3.18)$$

где $\tilde a = a/\alpha(1-\alpha)$, $Z_\alpha=\partial Z/\partial\alpha$. Разрешая уравнения (3.17), (3.18) относительно временных производных, окончательно получаем

$$\alpha_t-\alpha(1-\alpha)w_x-(1-2\alpha)w\,\alpha_x=0; \qquad (3.19)$$

$$w_t-\frac{Z_\alpha}{\Delta}\,\alpha_x-\frac{1}{\Delta}\,(\hat\rho_1(1-\alpha)-\hat\rho_2\alpha+3\tilde a(1-2\alpha))\,w\,w_x+\\ +\frac{1}{\Delta}\,(\hat\rho_1\alpha+\hat\rho_2(1-\alpha)+2\tilde a)\,w^2\,\alpha_x=0, \qquad (3.20)$$

где $\Delta=\hat\rho_1(1-\alpha)+\hat\rho_2\alpha+a/\alpha(1-\alpha)$. Отметим, что $\Delta>0$ при всех значениях $1\geqslant\alpha\geqslant 0$ и $a>0$.

Гиперболичность уравнений движения двухскоростных гетерогенных сред. Система (3.19), (3.20) может быть переписана в матричном виде:

$$\mathbf{u}_t-A\mathbf{u}_x=0,\qquad \mathbf{u}=(\alpha,w)^{\mathrm T},\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \qquad (3.21)$$

где

$$a_{11}=(1-2\alpha)w,\qquad a_{21}=\frac{1}{\Delta}\,Z_\alpha-\frac{1}{\Delta}\,(\hat\rho_1\alpha+\hat\rho_2(1-\alpha)+2\tilde a)\,w^2,$$

$$a_{12}=\alpha(1-\alpha),\qquad a_{22}=\frac{1}{\Delta}\,(\hat\rho_1(1-\alpha)-\hat\rho_2\alpha+3\tilde a(1-2\alpha))\,w.$$

Собственные числа матрицы A определяются из уравнения $\det|A-\lambda I|=0$:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda-\Big(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}\Big)=0. \qquad (3.22)$$

Для вещественности корней (3.22) необходимо, чтобы дискриминант

$$D=(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}$$

был положительным. Выделим в D зависящие от относительной скорости слагаемые

$$D=4\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\Delta}\,Z_\alpha+4\,\frac{w^2}{\Delta^2}\,\tilde D;$$
$$\tilde D=\alpha(1-\alpha)\Big(\tilde a^2\,\frac{1-6\alpha(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}-3\tilde a\hat\rho_1\alpha-3\tilde a\hat\rho_2(1-\alpha)-\hat\rho_1\hat\rho_2\Big). \qquad (3.23)$$

Из (3.23) следует, что при отсутствии относительной скорости система (3.21) является гиперболической. Действительно, условие гиперболичности сводится к условию положительности выражения

$$\Big(\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\Big)=\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}\Big)=\varepsilon_{11}\hat\rho_1^2-2\varepsilon_{12}\hat\rho_1\hat\rho_2+\varepsilon_{22}\hat\rho_2^2>0,$$

что соответствует условию термодинамической устойчивости вещества.

В общем случае условие гиперболичности системы (3.21) имеет вид

$$\Big(\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\Big)>-\frac{w^2}{\Delta}\,\frac{\tilde D}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Если $\tilde{D} > 0$, то дискриминант (3.23) заведомо положителен. Рассмотрим выражение $\alpha^2(1-\alpha)^2\tilde{D}$. Условие положительности $\tilde{D}$ эквивалентно положительности полинома второй степени относительно a $h(a) = pa^2 - qa - r > 0$, где $p = 1 - 6\alpha(1-\alpha)$, $q = 3\alpha^2(1-\alpha)^2(\hat{\rho}_1\alpha + \hat{\rho}_2(1-\alpha)) > 0$, $r = \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\alpha^3(1-\alpha)^3 > 0$.

При каждом фиксированном $a > 0$, очевидно, существует область объемных концентраций α (в малой окрестности значений $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$), когда $h(a)$ положительна, и, следовательно, система (3.21) гиперболическая. Когда α принадлежит интервалу $[1/2 - 1/(2\sqrt{3}), 1/2 + 1/(2\sqrt{3})]$, то функция $h(a)$ заведомо отрицательна ($p < 0$) и модель перестает быть гиперболической при большой разности скоростей.

Заключение. Предложен обобщенный вариационный принцип Гамильтона механики двухскоростных сред. Функция Лагранжа строится как разность кинетической энергии элемента среды и термодинамического потенциала, сопряженного внутренней энергии по гидродинамическим переменным. Данное определение лагранжиана является общим для сред с внутренней энергией, зависящей от термодинамических переменных, имеющих смысл временных производных.

На основе обобщенного вариационного принципа Гамильтона сформулированы уравнения движения гомогенного и гетерогенного двухскоростных континуумов. Получены дивергентные законы сохранения полного импульса и полной энергии среды.

Доказано, что выпуклость внутренней энергии обеспечивает гиперболичность линеаризованных на покое одномерных уравнений движения с плоскими волнами. При этом внутренняя энергия является функцией не только плотностей фаз, но и модуля разности скоростей фаз.

Доказано, что зависимость внутренней энергии от модуля относительной скорости обеспечивает гиперболичность уравнений гетерогенных сред с несжимаемыми компонентами для малых объемных концентраций фаз при любой относительной скорости движения фаз.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01641а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сплошных сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 184–195.
2. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
3. **Ishii M.** Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. P.: Eyrolles, 1975.
4. **Drew D. A.** Mathematical modeling of two-phase flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 261–291.
5. **Крайко А. Н., Стернин Л. Е.** К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 418–429.
6. **Stuhmiller J. H.** The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations // Intern. J. Multiphase Flow. 1977. V. 3. P. 551–560.
7. **Stewart H. B., Wendroff B.** Two-phase flow: models and methods // J. Comput. Physics. 1984. V. 56. P. 363–409.
8. **Ransom V. H., Hicks D. L.** Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow // J. Comput. Physics. 1984. V. 53. P. 124–151.
9. **Liapidevskii V. Yu.** Hyperbolic two-phase flow model based on conservation laws // XI Intern. Symp. Nonlinear Acoustics. Pt I. Novosibirsk, 1987. P. 66–70.