

УДК 534

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЯХ РОТОРА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОВОДЯЩУЮ ЖИДКОСТЬ, В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. В. Дерендяев, И. Н. Солдатов

Нижегородский государственный университет, 603091 Нижний Новгород
Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, 603024 Нижний Новгород

Рассматривается задача об устойчивости в малом режима стационарного вращения ротора с цилиндрической полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой проводящей жидкостью, находящегося в магнитном поле. Определены реакции торцевых пограничных слоев и результирующая сила, с которой жидкость действует на ротор, совершающий круговую прецессию малого радиуса. Построено D -разбиение на области с различной степенью неустойчивости плоскости параметров вязкоупругих закреплений оси ротора. С учетом нелинейности реакций опор изучен режим стационарного вращения вблизи границы области устойчивости в пространстве параметров. Показано, что при переходе через границу области устойчивости происходит бифуркация режима стационарного вращения, вследствие чего возникает периодическое движение типа круговой прецессии. Рождение периодического движения от режима стационарного вращения может быть докритическим или закритическим.

Ключевые слова: автоколебания, магнитное поле, устойчивость движения, проводящая жидкость.

Введение. Роторные системы, содержащие жидкость, получают все более широкое применение, в частности при разделении растворимых веществ. Неустойчивости режима стационарного вращения ротора, частично заполненного жидкостью, обусловлены в первую очередь резонансным возбуждением волн в жидкости [1–3]. Поскольку, как правило, жидкости в роторе обладают степенью проводимости, представляется возможным использовать для демпфирования волновых резонансов проводящей жидкости магнитное поле и как следствие получить дополнительное средство стабилизации режима стационарного вращения роторной системы.

Необходимо сделать следующее замечание. По-видимому, наиболее просто реализуется однородное постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси вращения ротора. Достаточно распространенными являются лавалевские закрепления осей ротора, когда угловые перемещения оси ротора пренебрежимо малы. Для закреплений такого типа обычно принимается, что частицы жидкости и ротора движутся в плоскостях, перпендикулярных оси стационарного вращения. Однако при плоскопараллельном движении проводящей жидкости в магнитном поле, коллинеарном оси вращения, результирующая пондеромоторная сила равна нулю и магнитное поле не оказывает влияния на устойчивость ротора [4]. Следовательно, в математической модели, учитывающей влияние магнитного поля, должно быть принято во внимание, что по крайней мере вблизи торцов движение жидкости существенно отличается от плоскопараллельного.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03-01-00478, 03-02-16924).

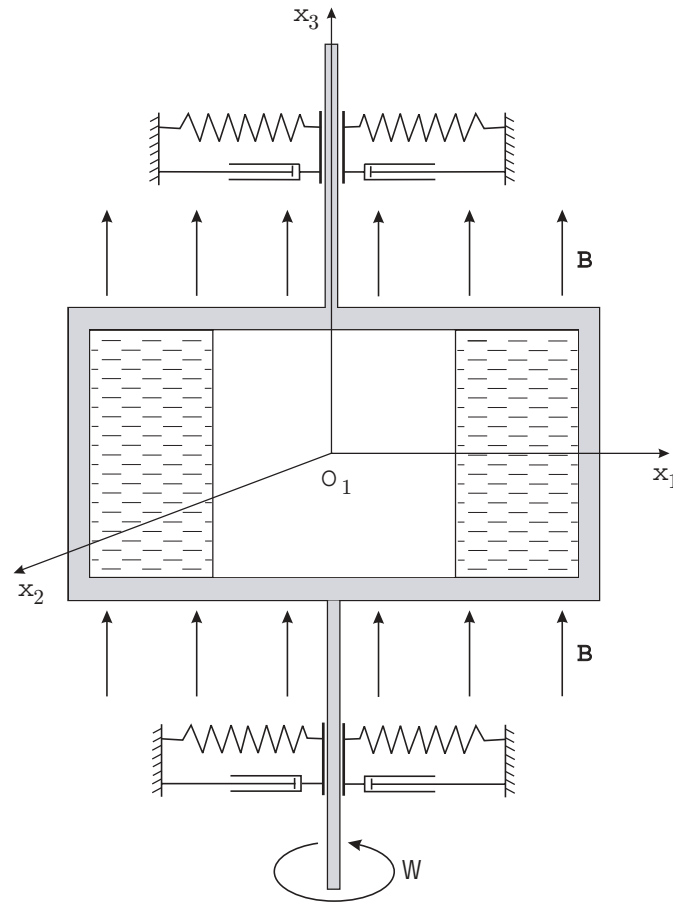


Рис. 1

В данной работе для исследования устойчивости режима стационарного вращения ротора используется вариант метода D -разбиения [5], не предполагающий знание характеристического уравнения. Построено разбиение плоскости параметров вязкоупругого закрепления оси ротора на области с различной степенью неустойчивости.

1. Уравнения и граничные условия. Пусть ротор (рис. 1), имеющий длинную цилиндрическую полость, частично заполнен вязкой несжимаемой проводящей жидкостью. Внешнее магнитное поле постоянно, однородно и направлено вдоль оси вращения ротора. Точки ротора могут перемещаться только в плоскостях, перпендикулярных оси стационарного вращения. Абсолютная угловая скорость вращения поддерживается постоянной и равной Ω .

Введем неподвижную систему координат $O_1x_1x_2x_3$ с осью O_1x_3 , совпадающей с осью стационарного вращения. Ось ротора находится в осесимметричном вязкоупругом закреплении, вообще говоря, нелинейном. Геометрия конструкции такова, что можно пренебречь угловыми перемещениями ротора и считать, что точки ротора движутся в плоскостях, перпендикулярных оси стационарного вращения. Будем пренебрегать также упругостью непроводящих стенок ротора.

Уравнения движения ротора удобно записать в комплексных переменных:

$$M\ddot{z} = F + f, \quad \dot{\theta} = \Omega,$$

$$z = x_1^0 + ix_2^0, \quad F = F_1 + iF_2, \quad i^2 = -1, \quad F_k = - \iint_S \sigma_{kj} n_j ds, \quad (1)$$

$$\sigma_{kj} = -p\delta_{kj} + \mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right), \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2,$$

$$f = -(K + K_\alpha |z|^\alpha)z - (H + H_\beta |z|^\beta)\dot{z}.$$

Здесь $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ — числовые параметры; M — масса цилиндра; x_1^0, x_2^0 — координаты точки пересечения оси ротора с плоскостью $O_1x_1x_2$; F_k — компоненты гидродинамической силы; σ_{kj} — компоненты тензора напряжений; μ — динамическая вязкость жидкости; f — сила реакции опор оси ротора; K, H и K_α, H_β — коэффициенты линейной и нелинейной упругости и вязкости закреплений оси ротора соответственно.

Для скоростей вращения и размеров роторов, применяемых в технике, магнитное число Рейнольдса можно считать малым и использовать безындукционное приближение. С учетом этого будем использовать следующие уравнения движения вязкой несжимаемой проводящей жидкости в полости ротора:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\sigma}{\rho} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \mathbf{B}), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

(ρ — плотность жидкости; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; σ — коэффициент проводимости), дополненные уравнениями для электрического поля \mathbf{E}

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0. \quad (3)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}|_s &= \mathbf{v}_s, & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \Phi)|_{\Phi=0} &= 0, & \Phi(x_1, x_2, x_3, t) &= 0, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{n})|_s &= -([\mathbf{v}_s, \mathbf{B}], \mathbf{n}), & (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \nabla \Phi)|_{\Phi=0} &= 0, & & \\ \sigma_{kj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_{\Phi=0} &= -p_* \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к стенке ротора s ; $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ — уравнение свободной поверхности; $\mathbf{v}_s = (\dot{x}_1^0, \dot{x}_2^0, 0)$; p_* — давление на свободной поверхности.

2. Изменение устойчивости и круговая прецессия. В [2] предложен метод, позволяющий исследовать устойчивость стационарного вращения ротора, обладающего цилиндрической симметрией, с полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, угловая скорость которого поддерживается постоянной, а ось находится в осесимметричном вязкоупругом закреплении, в линейном приближении. Этот метод исследования устойчивости обобщен в [3]. После линеаризации вблизи режима стационарного вращения уравнения движения (1)–(4) и граничные условия допускают решения, пропорциональные $\exp(\lambda t)$ (λ — характеристическое число). Режим стационарного вращения устойчив, если все значения λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчив, если хотя бы одно из значений λ имеет положительную действительную часть. При непрерывной зависимости λ от параметров задачи изменение степени неустойчивости в системе происходит, когда пара характеристических чисел проходит через мнимую ось. Следуя [2], можно показать, что мнимые характеристические числа существуют тогда и только тогда, когда система допускает решение типа круговой прецессии. Следовательно, значения параметров, при которых происходит изменение степени неустойчивости в системе, могут быть найдены из условия существования круговой прецессии. Таким образом, сначала должна быть рассмотрена магнитогидродинамическая задача о движении проводящей жидкости, когда ротор совершает круговую прецессию, и найдена сила, с которой жидкость действует на вращающийся цилиндр. Далее на основе полученных выражений для силы из линеаризованных уравнений поступательного движения ротора (1) находятся условия, при

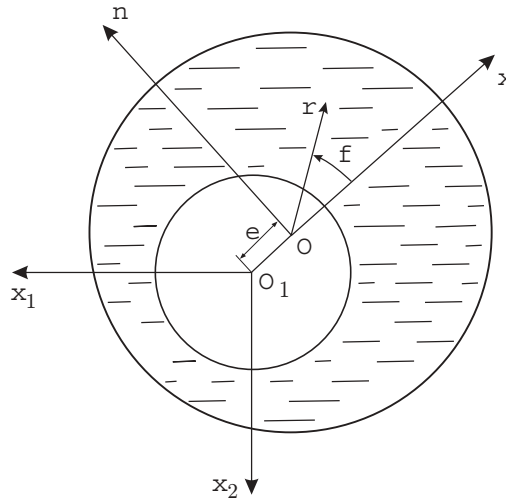


Рис. 2

которых возможна круговая прецессия. Эти условия определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи.

3. Плоская задача и задача о пограничном слое. Пусть ротор совершает круговую прецессию малого радиуса ε с частотой ω . Введем подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ таким образом, чтобы начало координат совпадало с центром поперечного сечения цилиндрической полости ротора O , а ось $O\xi$ была направлена вдоль линии, соединяющей центр прецессии O_1 и точку O (рис. 2). Ось $O\zeta$ направим параллельно оси Ox_3 . Введем также цилиндрическую систему координат $r\varphi\zeta$, связанную с системой отсчета $O\xi\eta\zeta$. В режиме стационарного вращения жидкость вращается вместе с ротором как единое целое:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \equiv \omega_0 r \mathbf{e}_\varphi, \quad p = p_0 \equiv \rho \Omega (r^2 - b^2) / 2 + p_*, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \equiv -[\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]$$

($\omega_0 = \Omega - \omega$).

В случае круговой прецессии разложим величины \mathbf{v} , p , Φ , \mathbf{E} по степеням малого параметра ε вблизи режима стационарного вращения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2 + \dots, & p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \varepsilon \mathbf{E}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{E}_2 + \dots, & \Phi &= r - b - \varepsilon h(\varphi) + \dots \end{aligned}$$

В выбранной неинерциальной системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ движение жидкости при круговой прецессии описывается функциями, не зависящими от времени [6], и в первом порядке по ε описывается линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} \text{rot} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0] &= -2[\Omega, \mathbf{v}_1] - \frac{\nabla p_1}{\rho} + \omega^2 \mathbf{e}_\xi + \frac{\sigma}{\rho} [\mathbf{E}_1, \mathbf{B}] - \frac{\sigma B^2}{\rho} \mathbf{v}_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 + \frac{\sigma [\mathbf{B}, \mathbf{v}_1]}{\rho} \mathbf{B}, \\ \text{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \quad \text{rot} \mathbf{E}_1 = 0, \quad \text{div} \mathbf{E}_1 = -(\mathbf{B}, \text{rot} \mathbf{v}_1). \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае решение системы уравнений (5) с соответствующими граничными условиями можно представить в виде суммы двух слагаемых: решения задачи о плоскопараллельном движении жидкости $\mathbf{v}_1^p, p_1^p, \mathbf{E}_1^p$ и решений задачи о пограничном слое $\mathbf{v}_1^b, p_1^b, \mathbf{E}_1^b$, учитывающих влияние торцов цилиндрической полости. Иначе говоря, можно считать, что за исключением малых областей вблизи торцов движение частиц жидкости происходит в плоскостях, параллельных плоскости $O\xi\eta$. Это движение описывается уравнениями (5), в которых компоненту скорости вдоль оси $O\zeta$ и производные по ζ нужно положить равными нулю, а из граничных условий (4) оставить только условия прилипания жидкости и

непротекания электрического тока через вертикальные стенки цилиндра, а также кинематические и динамические условия на свободной цилиндрической поверхности жидкости

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^p|_{r=a} &= 0, & \omega_0 \frac{\partial h}{\partial \varphi}|_{r=b} &= u_1^p|_{r=b}, \\ E_{1r}^p|_{r=a} &= 0, & E_{1r}^p + v_1^p B|_{r=b} &= 0, \\ -p_1^p - \rho \Omega^2 r h + 2\mu \frac{\partial u_1^p}{\partial r}|_{r=b} &= 0, & \frac{\partial v_1^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1^p}{\partial \varphi} - \frac{v_1^p}{r}|_{r=b} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь u_1^p, v_1^p — радиальная и азимутальная компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_1^p = (u_1^p, v_1^p, 0)$; $r = b + \varepsilon h(\varphi)$ (уравнение свободной поверхности); E_{1r}^p — компонента вектора \mathbf{E}_1^p .

Решение чисто гидродинамической плоской задачи найдено в работе [2]. Нетрудно показать, что магнитное поле не влияет на поле скоростей \mathbf{v}_1^p и решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^p &= -[\mathbf{v}_1^p, \mathbf{B}], \\ u_1^p &= \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} + \frac{i}{r} Z_1(kr) \right] e^{i\varphi} + \text{к.с.}, & v_1^p &= \left[ic_1 - \frac{ic_2}{r^2} - kZ_0(kr) + \frac{1}{r} Z_1(kr) \right] e^{i\varphi} + \text{к.с.}, \\ \frac{p_1^p}{\rho} &= \left[i(2\Omega - \omega_0)c_1 r + i(2\Omega + \omega) \frac{c_2}{r} + \frac{\omega^2 r}{2} - 2\Omega Z_1(kr) \right] e^{i\varphi} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где $Z_n(kr) = c_3 H_n^{(2)}(kr) + c_4 H_n^{(1)}(kr)$; $H_n^{(1),(2)}(kr)$ — функция Ганкеля n -го порядка; $k = x(i - \omega_0/|\omega_0|)$; $x = \sqrt{|\omega_0|/(2\nu)}$; к.с. — выражение, комплексно-сопряженное предыдущему выражению.

Вблизи торцов образуются вязкие пограничные слои, толщина которых равна $\sqrt{\nu/\Omega}$. Используя теорию пограничного слоя, выведем систему уравнений, описывающих движение жидкости вблизи торцов. Заметим, что в торцевых пограничных слоях компоненты $\text{rot } \mathbf{v}_1^b$ имеют разный порядок: нормальная к торцу цилиндра компонента ротора много меньше двух других. Это означает, что $\text{div } \mathbf{E}_1^b$ приближенно можно считать равной нулю. Тогда из однородных граничных условий и условия $\text{rot } \mathbf{E}_1^b = 0$ следует равенство нулю \mathbf{E}_1^b в любой точке. В этом случае имеем следующие уравнения для u_1^b и v_1^b :

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial u_1^b}{\partial \varphi} &= 2\Omega v_1^b + \nu \frac{\partial^2 u_1^b}{\partial \zeta^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u_1^b, \\ \omega_0 \frac{\partial v_1^b}{\partial \varphi} &= -2\Omega u_1^b + \nu \frac{\partial^2 v_1^b}{\partial \zeta^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} v_1^b \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1^b|_{\zeta=0} &= -u_1^p, & v_1^b|_{\zeta=0} &= -v_1^p, \\ u_1^b|_{\zeta \rightarrow \infty} &= 0, & v_1^b|_{\zeta \rightarrow \infty} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приведены условия только для нижнего торца ($\zeta = 0$), условия на другом торце записываются аналогично. В правые части граничных условий (7) входит первая гармоника по φ , другие гармоники отсутствуют. Отсюда следует, что решение задачи (6), (7) можно записать в виде

$$u_1^b = \hat{u}(r, \zeta) e^{i\varphi} + \text{к.с.}, \quad v_1^b = \hat{v}(r, \zeta) e^{i\varphi} + \text{к.с.}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что уравнениям (6) удовлетворяют функции

$$\begin{aligned}\hat{u}(r, \zeta) &= A_1(r) e^{-\lambda_1 \eta} + A_2(r) e^{-\lambda_2 \eta} + A_3(r) e^{\lambda_1 \eta} + A_4(r) e^{\lambda_2 \eta}, \\ \hat{v}(r, \zeta) &= -iA_1(r) e^{-\lambda_1 \eta} + iA_2(r) e^{-\lambda_2 \eta} - iA_3(r) e^{\lambda_1 \eta} + iA_4(r) e^{\lambda_2 \eta},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \left(\frac{\sigma^2 B^4}{\rho^2 \nu^2} + \frac{(\omega_0 + 2\Omega(-1)^{n+1})^2}{\nu^2} \right)^{1/4} e^{i\Theta_n} = \frac{1}{a} (\text{Ha}^4 + (1 - \tau + 2(-1)^{n+1})^2 E_*^{-2})^{1/4} e^{i\Theta_n}, \\ \Theta_n &= \frac{1}{2} \text{arctg} \left[\frac{\rho(\omega_0 + 2\Omega(-1)^{n+1})}{\sigma B^2} \right] = \frac{1}{2} \text{arctg} \left[\frac{1 - \tau + 2(-1)^{n+1}}{\text{Ha}^2 E} \right], \quad n = 1, 2,\end{aligned}$$

$\text{Ha} = Ba\sqrt{\sigma/(\rho\nu)}$ — безразмерное число Гартмана, характеризующее соотношение между магнитными и вязкими силами; $E_* = \nu/(\Omega a)^2$ — безразмерное число Экмана; $\tau = \omega/\Omega$.

Из граничных условий находятся функции $A_n(r)$:

$$A_1 = -\left[\frac{c_2}{r^2} + \frac{i}{r} Z_1(kr) - \frac{ik}{2} Z_0(kr) \right], \quad A_2 = -\left[c_1 + \frac{ik}{2} Z_0(kr) \right], \quad A_3 = A_4 = 0.$$

Соответствующее решение для пограничного слоя на верхнем торце аналогично. Коэффициенты c_n определяются из граничных условий, которые можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}c_1 + \frac{c_2}{a^2} + i \frac{c_3}{a} H_1^{(2)}(ka) + i \frac{c_4}{a} H_1^{(1)}(ka) &= 0, \\ c_1 - \frac{c_2}{a^2} + i \frac{c_3}{a} [kaH_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(ka)] + i \frac{c_4}{a} [kaH_0^{(1)}(ka) - H_1^{(1)}(ka)] &= 0, \\ 4 \frac{c_2}{b^2} - i \frac{c_3}{a} \left[2kaH_0^{(2)}(kb) + (k^2b^2 - 4) \frac{a}{b} H_1^{(2)}(kb) \right] - \\ &\quad - i \frac{c_4}{a} \left[2kaH_0^{(1)}(kb) + (k^2b^2 - 4) \frac{a}{b} H_1^{(1)}(kb) \right] = 0, \\ -\frac{i\tau^2}{1-\tau} c_1 + i \left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{1-\tau} - \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2} \right] \frac{c_2}{b^2} + \\ &\quad + \left[-\frac{2(1-\tau)}{kb} H_0^{(2)}(kb) + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2} \right) H_1^{(2)}(kb) \right] b^{-1} c_3 + \\ &\quad + \left[-\frac{2(1-\tau)}{kb} H_0^{(1)}(kb) + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2} \right) H_1^{(1)}(kb) \right] b^{-1} c_4 = -\frac{1}{2} \tau^2 \Omega.\end{aligned}\tag{8}$$

Алгебраическая система линейных уравнений относительно c_n (8) является плохо обусловленной, поэтому перейдем к величинам $\bar{c}_1 = c_1 \Omega^{-1}$, $\bar{c}_2 = c_2 a^{-2} \Omega^{-1}$, $\bar{c}_3 = c_3 a^{-1} \Omega^{-1} H_0^{(2)}(ka)$, $\bar{c}_4 = c_4 a^{-1} \Omega^{-1} H_0^{(1)}(kb)$. Далее в этом разделе черта над символами c_n опущена. Система (8) принимает вид

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + ic_3 h_{21} + ic_4 g_{20} &= 0, \\ c_1 - c_2 + ic_3 (ka - h_{21}) + ic_4 (ka g_{10} - g_{20}) &= 0, \\ 4c_2 \delta^{-2} - ic_3 [2kbh_{01} + (k^2b^2 - 4) \delta^{-1} h_{11}] - ic_4 [2kb + (k^2b^2 - 4) \delta^{-1} g_{11}] &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\tau^2}{1-\tau}c_1 + i\left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{1-\tau} - \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2}\right]c_2\delta^{-2} + \\
& + \left[-\frac{2(1-\tau)}{kb}h_{01} + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2}\right)h_{11}\right]\delta^{-1}c_3 + \\
& + \left[-\frac{2(1-\tau)}{kb} + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + \frac{4(1-\tau)}{k^2b^2}\right)g_{11}\right]\delta^{-1}c_4 = -\frac{1}{2}\tau^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
h_{01} &= H_0^{(2)}(kb)/H_0^{(2)}(ka), & h_{21} &= H_1^{(2)}(ka)/H_0^{(2)}(ka), & h_{11} &= H_1^{(2)}(kb)/H_0^{(2)}(ka), \\
g_{20} &= H_1^{(1)}(ka)/H_0^{(1)}(kb), & g_{10} &= H_0^{(1)}(ka)/H_0^{(1)}(kb), & g_{11} &= H_1^{(1)}(kb)/H_0^{(1)}(kb),
\end{aligned}$$

$\delta = b/a$ — отношение толщины прилегающего к стенке слоя жидкости при стационарном вращении к радиусу полости.

4. Гидродинамические силы. На верхний торец цилиндра со стороны жидкости действует сила

$$\begin{aligned}
F_\xi^b &= -\int_0^{2\pi} \int_b^a (\sigma_{\zeta r} \cos \varphi - \sigma_{\zeta \varphi} \sin \varphi) r d\varphi dr = \\
& = -2\pi\mu \operatorname{Re} \{ \lambda_2 [c_1(a^2 - b^2) + iaZ_1(ka) - ibZ_1(kb)] \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^b &= -\int_0^{2\pi} \int_b^a (\sigma_{\zeta r} \sin \varphi + \sigma_{\zeta \varphi} \cos \varphi) r d\varphi dr = \\
& = -2\pi\mu \operatorname{Im} \{ \lambda_2 [c_1(a^2 - b^2) + iaZ_1(ka) - ibZ_1(kb)] \}.
\end{aligned}$$

Вычислим гидродинамическую силу, действующую на боковую стенку цилиндрической полости:

$$F_\xi^p = -\int_0^d \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin \varphi) a d\varphi dz, \quad F_\eta^p = -\int_0^d \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \sin \varphi + \sigma_{r\varphi} \cos \varphi) a d\varphi dz$$

(d — высота цилиндра). В силу граничных условий $u = 0$, $v = 0$ на стенке $r = a$ и условия несжимаемости $\partial u / \partial r = 0$ при $r = a$ выражения для напряжений

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

принимают простой вид

$$\sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial r}.$$

После некоторых преобразований получаем

$$F_\xi^p = 2\pi a^2 \rho \varepsilon \operatorname{Re} [\omega^2 / 2 + 2i(\Omega - \omega)c_2], \quad F_\eta^p = -4\pi a^2 \rho \varepsilon (\Omega - \omega) \operatorname{Re} c_2.$$

Зависимость суммарной гидродинамической силы с компонентами $F_\xi = F_\xi^p + 2F_\xi^b$, $F_\eta = F_\eta^p + 2F_\eta^b$ от безразмерной частоты τ имеет четко выраженный резонансный характер, что связано с возбуждением волн в жидкости.

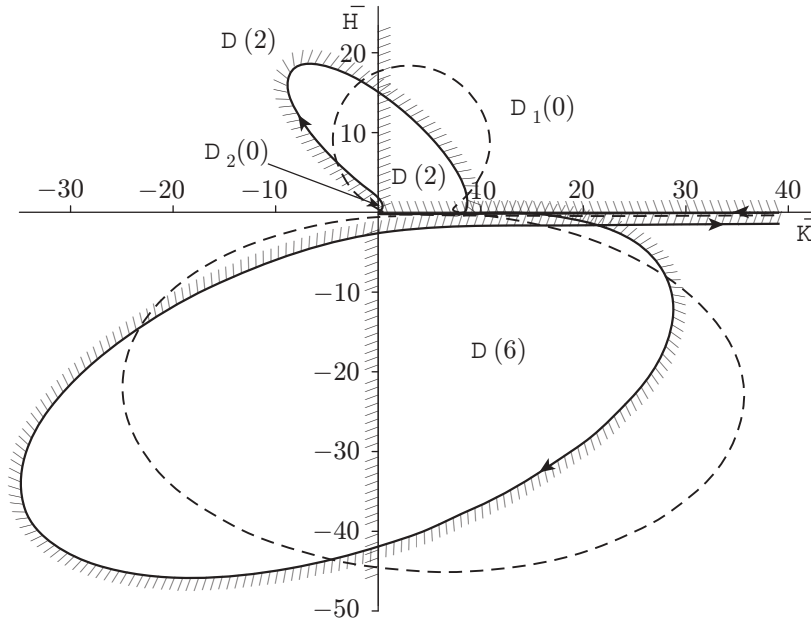


Рис. 3

5. Построение областей с различной степенью неустойчивости. Используя предложенный в работе [4] метод построения областей с различной степенью неустойчивости режима стационарного вращения в плоскости параметров закрепления оси цилиндра, найдем значения параметров K и H , при которых возможна круговая прецессия. Для этого выражение для суммарной гидродинамической силы подставим в уравнение движения цилиндра (1). После деления на $m\varepsilon\Omega^2$ с учетом

$$F_1 = \text{Re} [(F_\xi + iF_\eta) e^{i\omega t}], \quad F_2 = \text{Im} [(F_\xi + iF_\eta) e^{i\omega t}] \quad (9)$$

получим соотношения, связывающие ω и параметры задачи в случае круговой прецессии:

$$-M\tau^2/m + \bar{K} = \bar{F}_\xi\tau^2, \quad \bar{H}\tau = \bar{F}_\eta\tau^2, \quad (10)$$

где $m = \pi\rho(a^2 - b^2)d$ — масса жидкости, частично заполняющей полость ротора; $\bar{K} = K/(m\Omega)$; $\bar{H} = H/(m\Omega)$; $\bar{F}_\xi = F_\xi/(m\omega^2)$, $\bar{F}_\eta = F_\eta/(m\omega^2)$ — безразмерные компоненты силы, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\bar{F}_\xi = \frac{1}{1 - \delta^2} \text{Re} \left\{ 1 + 4i \frac{1 - \tau}{\tau^2} \bar{c}_2 - \frac{4E_*\lambda_2 a}{\tau^2 \bar{\omega}} [(1 - \delta^2)\bar{c}_1 + ic_3(h_{21} - \delta h_{11}) + ic_4(g_{20} - \delta g_{11})] \right\},$$

$$\bar{F}_\eta = \frac{4}{1 - \delta^2} \frac{1}{\tau^2} \text{Im} \left\{ -i(1 - \tau)\bar{c}_2 - \frac{4E_*\lambda_2 a}{\bar{\omega}} [(1 - \delta^2)\bar{c}_1 + ic_3(h_{21} - \delta h_{11}) + ic_4(g_{20} - \delta g_{11})] \right\},$$

$\bar{\omega} = d/a$ — отношение высоты полости ротора к ее радиусу.

На рис. 3, 4 представлены D -разбиения плоскости параметров $\bar{K} = K/(m\Omega)$, $\bar{H} = H/(m\Omega)$ на области с различной степенью неустойчивости $D(n)$ (n — степень неустойчивости) при $\text{Na} = 1,4 \cdot 10^4$ и $E_* = 10^{-4}$; $5 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Остальные параметры в обоих случаях одинаковы: $M/m = 1,4$; $\delta = 0,92$; $\bar{\omega} = 2$. Детали построения бифуркационных кривых (так называемых D -кривых), разбивающих плоскость (\bar{K}, \bar{H}) на области с различной степенью неустойчивости, приведены в работе [2]. Штриховка на D -кривых выполнена общепринятым способом: переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости на две единицы. Стрелкой указано направление возрастания параметра τ . Для сравнения

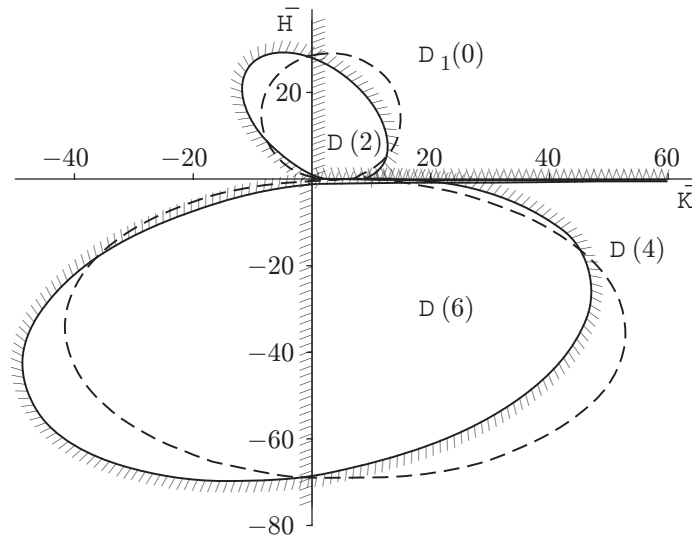


Рис. 4

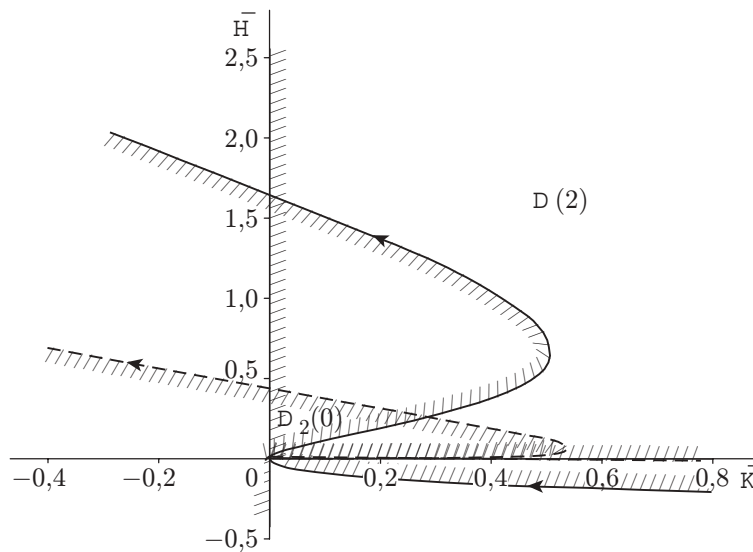


Рис. 5

штриховыми кривыми показаны D -разбиения для случаев, когда магнитное поле отсутствует ($H_a = 0$). На штриховые кривые штриховка не нанесена. Помимо области устойчивости $D_1(0)$, соответствующей большим значениям коэффициентов демпфирования и жесткости, существует область устойчивости $D_2(0)$ вблизи нулевых значений \bar{K} , \bar{H} . Именно эта область наиболее интересна с практической точки зрения. Область $D_2(0)$ (см. рис. 3) в увеличенном масштабе представлена на рис. 5 ($E_* = 10^{-4}$; $M/m = 1,4$; $\delta = 0,92$; $\bar{\omega} = 2$). Из рис. 3–5 следует, что достаточно сильное магнитное поле приводит к изменениям формы D -кривой, среди которых отметим заметное расширение области устойчивости $D_2(0)$ в направлении оси ординат (оси \bar{H}) с незначительным сжатием вдоль оси абсцисс (оси \bar{K}) и некоторую деформацию со сдвигом влево всей кривой D .

Результирующая поперечная сила возникает в торцевых слоях, поэтому изменение E_* (толщина слоя приближенно равна $aE_*^{1/2}$) приводит к изменению магнитогидродинамических сил, действующих на ротор. Увеличение числа Экмана E_* приводит к уменьшению влияния магнитного поля (ср. рис. 4 и рис. 5).

6. Поведение режима стационарного вращения вблизи границы области устойчивости. Малые изменения параметров могут привести к тому, что роторная система выйдет на границу области устойчивости, причем при сколь угодно малом нарушении “опасной” границы (см. [7]) система перейдет в новое состояние, которое не может быть получено близким к исходному достаточно малым нарушением границы. Изучение характера границ является весьма важным при исследовании устойчивости. Покажем, что в рассматриваемой модели ротора, угловая скорость которого поддерживается постоянной, с нелинейными вязкоупругими закреплениями оси при выходе из области устойчивости происходит бифуркация Андронова — Хопфа (см. [8–11]).

Для того чтобы установить, возможна ли при переходе через границу бифуркация Андронова — Хопфа (т. е. рождение периодического движения от режима стационарного вращения), необходимо удержать в уравнениях главные нелинейные члены. Ограничимся случаем, когда в выражении для реакции опор $\alpha = \beta = 1$. Будем искать периодическое решение в виде круговой прецессии:

$$z = \varepsilon \exp(i\omega t). \quad (11)$$

Магнитогидродинамические уравнения второго приближения по ε содержат в правых частях квадрат первой гармоники по φ , а граничные условия нулевые. Это означает, что решение уравнений второго приближения содержит только вторую или (и) нулевую гармонику по φ . Следовательно, в разложении гидродинамической силы $F_i = \iint \sigma_{ij} n_j ds$ по степеням ε не содержится члена с ε^2 . Это обстоятельство позволяет при рассмотрении нелинейной задачи учитывать только нелинейную реакцию закрепления без нахождения решения магнитогидродинамической задачи второго приближения. Подставляя (11) и F_ξ , F_η в (1), получим условия существования периодического решения

$$-M\omega^2 + K + K_1\varepsilon = F_\xi/\varepsilon, \quad (H + H_1|\omega|\varepsilon)\omega = F_\eta/\varepsilon. \quad (12)$$

Система конечных уравнений (12) относительно ε при $\varepsilon = 0$ совпадает с уравнениями (10), из которых определялись границы областей с различной степенью неустойчивости. Таким образом, при значениях параметров, принадлежащих D -кривой, система (10) имеет вещественное решение с $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$. Если это решение является простым корнем уравнений (10), то при сколь угодно малых отклонениях от критических значений параметров можно получить по непрерывности близкое решение с вещественными $\varepsilon \neq 0$, $\omega \neq 0$. Появлению решения с $\varepsilon > 0$ соответствует рождение периодического движения (в виде круговой прецессии) от стационарного вращения ($\varepsilon = 0$), т. е. бифуркация Андронова — Хопфа. Таким образом, решение системы уравнений (12) вблизи границ области $D_2(0)$ можно искать методом возмущений, который приводит к следующей системе уравнений для ε и $\delta\tau$:

$$\begin{aligned} -\left(2\frac{M}{m} + 2\bar{F}_\xi + \frac{\partial\bar{F}_\xi}{\partial\tau}\tau\right)\tau\delta\tau + \bar{K}_1\varepsilon &= -\delta\bar{K}, \\ -\left(-\bar{F}_\eta + \frac{\partial\bar{F}_\eta}{\partial\tau}\tau\right)\delta\tau + \bar{H}_1|\tau|\varepsilon &= -\delta\bar{H} \end{aligned}$$

$$(\bar{K}_1 = K_1a/(m\Omega^2); \bar{H}_1 = H_1a/m).$$

Малые приращения $\delta\bar{K}$ и $\delta\bar{H}$ выбираются таким образом, чтобы точка $(\bar{K} + \delta\bar{K}, \bar{H} + \delta\bar{H})$ лежала на нормали к границе, восстановленной из точки (\bar{K}, \bar{H}) . Если при выходе параметров из области устойчивости через какой-либо участок ее границы происходит рождение периодического движения, то такую бифуркацию называют закритической. Возбуждение автоколебаний при переходе через такой участок происходит мягко, и поэтому подобные участки границы принято называть “безопасными”. В окрестности “опасных”

участков периодическое движение в виде круговой прецессии малого радиуса существует в области устойчивости режима стационарного вращения. Это означает, что при приближении к такому участку из области устойчивости система становится неустойчивой по отношению к возмущениям малой, но конечной величины и происходит жесткое возбуждение автоколебаний.

На характер границ существенное влияние оказывает вид упругой нелинейности, т. е. знак коэффициента \bar{K}_1 . При “прогрессирующей” жесткости $\bar{K}_1 > 0$ и вязкости $\bar{H}_1 > 0$ для указанных выше значений остальных параметров граница области $D_2(0)$ является “опасной”. (В расчетах значения \bar{K}_1 менялись в пределах от 0,01 до 1, а значения \bar{H}_1 — в пределах от 10^{-3} до 1.) При “регрессирующей” жесткости $\bar{K}_1 < 0$ ($\bar{H}_1 > 0$) граница области устойчивости $D_2(0)$ “безопасна”. Магнитное поле практически не оказывает влияния на характер границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
2. **Дерендяев Н. В., Сандалов В. М.** Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 4. С. 578–586.
3. **Дерендяев Н. В.** Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1073–1076.
4. **Дерендяев Н. В., Солдатов И. Н.** О влиянии магнитного поля на плоскопараллельное движение проводящей жидкости // Прикладная механика и технологии машиностроения. Н. Новгород: Интелсервис, 1997. Ч. 3. С. 34–39.
5. **Неймарк Ю. И.** Устойчивость линеаризованных систем. Л.: Ленингр. воен.-возд. акад., 1949.
6. **Дерендяев Н. В., Солдатов И. Н.** Стационарность движения проводящей жидкости в магнитном поле в системе отсчета Резаля при конической прецессии ротора // Прикладная механика и технологии машиностроения. Н. Новгород: Интелсервис, 1998. Ч. 1. С. 46–50.
7. **Баутин Н. Н., Шильников Л. П.** Дополнение 1. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений (“опасные” и “безопасные” границы) // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 294–316.
8. **Андронов А. А., Леонтонович Е. А.** Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Андронов А. А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 188–216.
9. **Андронов А. А., Любина А. Г.** Применение теории Пуанкаре о “точках бифуркации” и “смене устойчивости” к простейшим автоколебательным системам // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1935. Т. 5, вып. 3/4. С. 296–309.
10. **Hopf E.** Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems // Ber. Math.-Phys. 1942. Bd 94. S. 3–22.
11. **Дерендяев Н. В.** Бифуркация Андронова — Хопфа в динамике роторной системы, содержащей жидкость // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 798–801.

Поступила в редакцию 11/IV 2003 г.