УДК 539.3

КОНТАКТ ТРАНСТРОПНЫХ ТЕЛ В ТЕОРИИ ГЕРЦА

Д. А. Пожарский

Донской государственный технический университет, 344000 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: pozharda@rambler.ru

В рамках анизотропной теории упругости изучается трехмерная контактная задача о взаимодействии двух массивных транстропных тел, размеры которых существенно превышают размеры области контакта. При этом плоскости изотропии контактирующих упругих тел взаимно перпендикулярны. Найдены точные и численные решения задачи. Проведены расчеты для различных трансверсально-изотропных материалов.

Ключевые слова: анизотропия, трансверсально-изотропное тело, контакт.

DOI: 10.15372/PMTF20180313

Введение. Анизотропные, в частности транстропные, материалы широко применяются в различных областях промышленности [1, 2]. Ранее были получены функции Грина в квадратурах для полупространства из транстропного материала, в законе Гука которого содержится пять независимых параметров упругости, в случае когда плоскости изотропии перпендикулярны его границе [3], и для транстропного пространства с трещиной, в случае когда плоскости изотропии ортогональны плоскости трещины [4]. В работах [5, 6] показано, что с использованием методов теории обобщенных функций можно построить функции Грина, не содержащие квадратуры и являющиеся ядрами интегральных уравнений соответствующих контактных задач и задач о разрезах, что принципиально важно при использовании численных методов [3–6]. С помощью указанного метода [5, 6] построены функции Грина, не содержащие квадратуры, для случая произвольной анизотропии (21 независимый параметр упругости) [7, 8].

Постановка задачи. Рассмотрим нормальный контакт (без учета сил трения) двух транстропных упругих тел, размеры которых значительно превышают размеры области контакта. Согласно теории Герца нормальные упругие перемещения поверхностей этих тел с достаточной степенью точности можно заменить перемещениями границ двух упругих полупространств [9, 10]. Одно из тел (подложку) будем считать транстропным полупространством $x \geqslant 0$, граница которого перпендикулярна плоскостям изотропии $z = \mathrm{const}$. В это полупространство на величину δ внедряется упругий транстропный штамп (второе полупространство), плоскости изотропии которого $x = \mathrm{const}$ параллельны площадке контакта, а форма основания в области контакта описывается функцией $f(y, z)$ (см. рисунок). Вне области контакта Ω поверхности обоих тел свободны от напряжений.

Для материала подложки закон Гука имеет вид [1, 3]

$$\sigma_x = A_{11}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66})\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\,\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 9.8082.2017/БЧ).

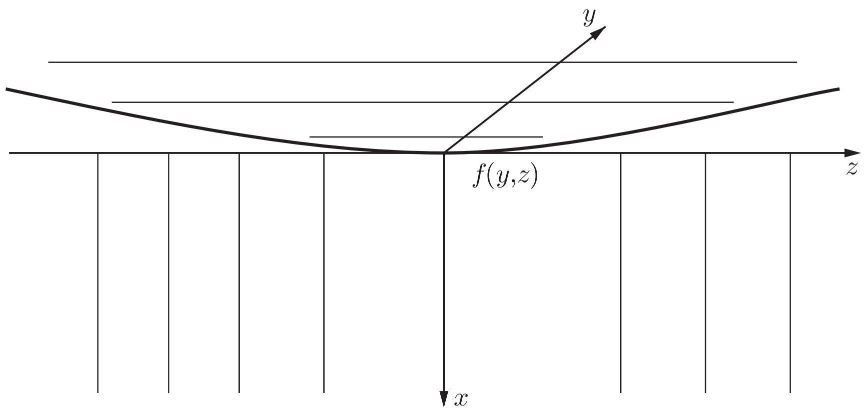

Схема контактной задачи для тел из транстропного материала

$$\sigma_y = (A_{11} - 2A_{66})\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11}\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\,\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_z = A_{13}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13}\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \tau_{xy} = A_{66}\,\frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66}\,\frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\tau_{yz} = A_{44}\,\frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44}\,\frac{\partial u_z}{\partial y}, \qquad \tau_{xz} = A_{44}\,\frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44}\,\frac{\partial u_z}{\partial x},$$

где A_{mn} — упругие постоянные материала подложки. Чтобы получить закон Гука для материала штампа, в этих формулах следует выполнить циклическую подстановку $x \to z$, $z \to y$, $y \to x$, заменить A_{ij} на A^*_{ij}, а напряжения и перемещения — на те же величины со звездочкой.

Уравнения равновесия в напряжениях для подложки имеют вид [1, 3]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Поскольку система этих уравнений инвариантна относительно указанной циклической замены координат, для штампа в ней следует заменить напряжения на ту же величину со звездочкой. Внося законы Гука для обоих тел в соответствующие системы уравнений равновесия в напряжениях, получаем различные системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях (с постоянными коэффициентами), для нахождения общего решения которых применяются двукратные интегральные преобразования Фурье. Характеристические уравнения этих систем не зависят от ориентации плоскостей изотропии и совпадают при равенстве упругих параметров двух тел. Граничные условия смешанной контактной задачи имеют вид

$$x = 0\colon \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau^*_{xy} = \tau^*_{xz} = 0, \qquad \sigma_x = \sigma^*_x = 0, \quad (y,z) \notin \Omega;$$
$$u_x - u^*_x = \delta - f(y,z), \qquad (y,z) \in \Omega. \tag{1}$$

Граничное условие (1) связывает нормальные упругие перемещения подложки $u_x(0,y,z)$ и штампа $u^*_x(0,y,z)$ и соответствует контакту двух тел. Кроме того, на бесконечности напряжения в обоих телах стремятся к нулю. При заданных параметрах упругости A_{ij}, A^*_{ij}, величине δ и функции $f(y,z)$ требуется определить контактные давления $\sigma_x(0,y,z) = \sigma^*_x(0,y,z) = -q(y,z)$, $(y,z) \in \Omega$ и область контакта Ω (если она не задана). Затем может быть найдена интегральная характеристика

$$P = \iint\limits_{\Omega} q(y,z)\,dy\,dz.$$

Для сведения контактной задачи к интегральным уравнениям сначала отдельно решаются две несмешанные вспомогательные краевые задачи, в которых граничное условие (1) заменяется на условие

$$\sigma_x(0, y, z) = -q(y, z)$$

или

$$\sigma_x^*(0, y, z) = -q(y, z), \qquad (y, z) \in \Omega.$$

Соответствующие решения вспомогательных задач (функции Грина) ранее были получены для транстропных полупространств, плоскости изотропии которых параллельны [1] или перпендикулярны [3] границе. Используя вспомогательные решения и подставляя их в условие контакта (1), получаем интегральное уравнение

$$\iint\limits_{\Omega} q(y_0, z_0) K(y - y_0, z - z_0)\, dy_0\, dz_0 = \delta - f(y, z), \qquad (y, z) \in \Omega; \tag{2}$$

$$K(y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi, \eta) \exp(-iz\xi - iy\eta)\, d\xi\, d\eta; \tag{3}$$

$$K_1(\xi, \eta) = \frac{(m_1 - m_2)\gamma_3^2}{A_{66}} \frac{\xi^2 \zeta_1 \zeta_2}{D} + \frac{1}{\theta^* \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \tag{4}$$

$$D = m_1 h_2^2 \zeta_1 - m_2 h_1^2 \zeta_2 - 4(m_1 - m_2)\eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \qquad \zeta_n = \sqrt{\gamma_n^2 \xi^2 + \eta^2} \quad (n = 1, 2, 3); \tag{5}$$

$$m_l = \frac{A_{11}\gamma_l^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \qquad h_l = (m_l + 1)\gamma_3^2 \xi^2 + 2\eta^2 \quad (l = 1, 2), \qquad \gamma_3 = \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{66}}}; \tag{6}$$

$$\theta^* = \frac{A_{11}^* A_{33}^* - (A_{13}^*)^2}{(\gamma_1^* + \gamma_2^*) A_{11}^*} \qquad (\gamma_1^* + \gamma_2^* > 0). \tag{7}$$

Здесь величины γ_1, γ_2 удовлетворяют биквадратному характеристическому уравнению

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0, \tag{8}$$

а величины γ_1^*, γ_2^* находятся из уравнения, получаемого из (8) при замене A_{ij} на A_{ij}^*.

Без ограничения общности далее будем считать, что материалы тел одинаковые, т. е. $A_{ij}^* = A_{ij}$.

Точные решения. Интегральное уравнение (2) имеет точное решение в том случае, если его правая часть является полиномом степени n относительно y, z, а область Ω представляет собой эллипс:

$$z^2 a^{-2} + y^2 b^{-2} \leqslant 1.$$

Точное решение следует искать в виде

$$q(y, z) = \frac{Q_n(y, z)}{\sqrt{1 - z^2 a^{-2} - y^2 b^{-2}}}, \tag{9}$$

где $Q_n(y, z)$ — полином той же степени n с неопределенными коэффициентами, которые определяются после подстановки (9) в (2), взятия известных квадратур [3, 10] и приравнивания членов при одинаковых степенях переменных. При $n \geqslant 2$ могут быть найдены решения, ограниченные на $\partial\Omega$.

При $f(y,z) = 0$ в случае плоского штампа, когда полуоси эллипса заданы, точное решение записывается в виде

$$q(y,z) = \frac{q_0}{\sqrt{1 - z^2a^{-2} - y^2b^{-2}}}, \qquad q_0 = \frac{4A_{66}\delta}{ae}, \qquad e = \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{r(\varphi)}\,d\varphi,$$

$$g(\varphi) = \frac{(m_1 - m_2)\gamma_3^2\cos^2\varphi}{D^*}\,\zeta_1^*\zeta_2^* + \frac{1}{\theta}, \quad r(\varphi) = \sqrt{\varepsilon^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\theta^*}{A_{66}}, \tag{10}$$

$$D^* = m_1(h_2^*)^2\zeta_1^* - m_2(h_1^*)^2\zeta_2^* - 4(m_1 - m_2)\sin^2\varphi\,\zeta_1^*\zeta_2^*\zeta_3^*,$$

$$\zeta_n^* = \sqrt{\gamma_n^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \quad (n = 1, 2, 3), \qquad h_l^* = (m_l + 1)\gamma_3^2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi \quad (l = 1, 2).$$

Для штампа в форме эллиптического параболоида (длины полуосей эллипса контакта неизвестны)

$$f(y,z) = z^2(2R_1)^{-1} + y^2(2R_2)^{-1} \tag{11}$$

ограниченное на $\partial\Omega$ точное решение имеет вид

$$q(y,z) = q_1\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad q_1 = \frac{8A_{66}\delta}{ae}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{c}{d}, \quad b^2 = \frac{2R_1\delta}{\varepsilon^2 + R_1R_2^{-1}}; \tag{12}$$

$$c = \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)\cos^2\varphi}{r^3(\varphi)}\,d\varphi, \qquad d = \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)\sin^2\varphi}{r^3(\varphi)}\,d\varphi, \qquad P = \frac{2}{3}\,\pi abq_1. \tag{13}$$

Сначала из третьей формулы (12) вычисляется отношение длин полуосей эллипса ε, затем из четвертой формулы (12) определяются сами длины полуосей. Далее из второй формулы (12) и последней формулы (13) можно найти остальные параметры.

Пять размерных параметров упругости A_{ij} для ряда транстропных материалов приведены в [1. С. 22–23]. На основе этих параметров можно вычислить четыре независимых безразмерных параметра анизотропии γ_1, γ_2, γ_3, m_1 (пятый безразмерный параметр зависимый: $m_1m_2 = 1$ (см. формулы (6), (8))), а также безразмерную контактную жесткость θ (см. формулы (7), (10)).

Численное решение. Пусть штамп не имеет острых кромок, тогда $q(y,z) = 0$, $(y,z) \in \partial\Omega$. В этом случае для получения численного решения интегрального уравнения (2) используем метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа уравнения Гаммерштейна [11, 12]. Этот метод позволяет одновременно определить область контакта, контактное давление в этой области и нормальное перемещение упругого материала вне области контакта.

Введем обозначения

$$M = (y,z), \qquad N = (y_0, z_0)$$

и предположим, что вся область контакта содержится в квадрате

$$S = \{|y| \leqslant a_0,\ |z| \leqslant a_0\}.$$

Уравнение (2) дополним условием неотрицательности контактного давления в области контакта, условиями отсутствия контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S \setminus \Omega$ и запишем их в виде системы

$$\begin{aligned} &\int\limits_S K_0(N,M)q(N)\,dN = d(M), \qquad q(M) \geqslant 0, \qquad M \in \Omega, \\ &\int\limits_S K_0(N,M)q(N)\,dN > d(M), \qquad q(M) = 0, \qquad M \in S \setminus \Omega, \end{aligned} \tag{14}$$

где $d(M) = \delta - f(M)$,

$$K_0(N,M) = K(y - y_0, z - z_0). \tag{15}$$

Пусть параметры упругости таковы, что $K(y,z) > 0$ при $y \neq 0$, $z \neq 0$. С помощью теории обобщенных функций [5, 12] с учетом формулы (3) и свойств функций (4), (5) ядро (15) можно представить в форме, не содержащей квадратуры:

$$\begin{gathered} K(y,z) = \frac{(m_1 - m_2)\gamma_3^2}{2\pi A_{66}}\,\frac{y^2\zeta_1^0\zeta_2^0}{D_0} + \frac{1}{2\pi\theta^*\sqrt{y^2+z^2}}, \\ D_0 = m_1(h_2^0)^2\zeta_1^0 - m_2(h_1^0)^2\zeta_2^0 - 4(m_1-m_2)z^2\zeta_1^0\zeta_2^0\zeta_3^0, \\ \zeta_n^0 = \sqrt{\gamma_n^2 y^2 + z^2} \quad (n = 1,2,3), \qquad h_l^0 = (m_l+1)\gamma_3^2 y^2 + 2z^2 \quad (l = 1,2), \end{gathered} \tag{16}$$

что особенно важно при использовании численных методов (вследствие необходимости регуляризации ядра в особых точках).

Введем нелинейные операторы

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \qquad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}. \tag{17}$$

Известно, что любую функцию можно представить в виде суммы операторов (17). Идея метода заключается в представлении искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M),$$

что обеспечивает выполнение интегрального неравенства (14) при решении нелинейного операторного уравнения типа уравнения Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \qquad \Theta p \equiv p^- + K_* p^+ - d, \tag{18}$$

где $p = p(M)$; $p^\pm = p^\pm(M)$; $d = d(M)$; $K_* p^+ = \int\limits_S K_0(N,M)p^+(N)\,dN$.

Эквивалентность системы (14) и уравнения (18) устанавливается в следующей теореме.

Теорема. *Если функция* $p = p(M)$ *является решением уравнения* (18), *то* $q = p^+(M)$ *и* $\Omega = \{M\colon p \geqslant 0\}$ *есть решение системы* (14). *Наоборот, если функция* $q = q(M)$, $M \in \Omega$ *удовлетворяет системе* (14), *то функция* $p = p(M) = d + q - K_* q$, $M \in \Omega$ *есть решение уравнения* (18).

Доказательства данной теоремы, а также теорем о существовании и единственности решения уравнения (18) являются доказательствами соответствующих теорем для изотропного материала [11]. При этом предполагается, что интегральный оператор, порожденный ядром уравнения (18), обладает свойствами строгой положительности и полной непрерывности.

Значения ε и интегральной характеристики

Материал	ε	P	P_0	P_1	P_2
Al_2O_3	1,001	1,32	1,33	0,522	0,897
Co	0,977	1,64	1,65	0,648	1,11
Mg	0,996	1,39	1,40	0,548	0,942
SiC	1,012	1,10	1,10	0,432	0,743
Ti	0,964	1,76	1,76	0,692	1,19
CdS	0,991	1,62	1,62	0,636	1,09
GaS	1,066	0,358	0,36	0,142	0,244
GaSe	1,059	0,547	0,55	0,216	0,372
ZnO	0,994	1,53	1,53	0,602	1,04
Zn	1,063	0,838	0,845	0,333	0,572
InSe	1,105	0,942	0,95	0,374	0,645
Углеволокно	0,800	3,65	3,69	1,470	2,51
Графит	1,015	0,015	0,0151	0,005 95	0,0102
Сапфир	1,004	1,23	1,23	0,485	0,833
Древесина (ель Дугласа)	0,983	1,87	1,87	0,735	1,26
Керамика PZT-4	1,015	1,30	1,31	0,513	0,881
Композит (60 % волокон)	0,879	2,89	2,91	1,140	1,97
Бедренная кость человека	0,979	1,95	1,96	0,769	1,32
Сырая бычья бедренная кость	0,970	1,90	1,91	0,749	1,29
Эпоксидное стекло	0,960	1,95	1,96	0,768	1,32
Эпоксидный графит	0,870	2,96	2,97	1,170	2,02
Гнейс влажный	1,039	1,06	1,06	0,417	0,718
Бетон, состаренный в результате химической обработки	0,965	1,72	1,73	0,679	1,17
Бетон, состаренный в результате циклического нагрева и охлаждения	0,955	1,61	1,62	0,636	1,09

При численном решении уравнения (18) применим модифицированный метод Ньютона, основанный на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p - (F'p_n)^{-1}\Theta p_n, \qquad p_n = p_n(M), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad p_0 = d. \tag{19}$$

Здесь F — дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор Θ по равномерной метрике.

Квадрат S покроем равномерной сеткой из m узлов с шагом h по осям y и z. При расчете значений ядра (16) в этих узлах его особенности сглаживались по формулам

$$(y - y_0)^2 \to (y - y_0)^2 + \delta_*/2, \quad (z - z_0)^2 \to (z - z_0)^2 + \delta_*/2, \quad \delta_* = h^2/16.$$

Такая регуляризация обеспечивает сходимость метода, при этом полученное решение хорошо согласуется с точным решением (11)–(13).

Введем безразмерные переменные (штрихи далее опускаем)

$$y' = \frac{y}{a_0}, \quad z' = \frac{z}{a_0}, \quad \delta' = \frac{\delta}{a_0}, \quad R_1' = \frac{R_1}{a_0}, \quad R_2' = \frac{R_2}{a_0},$$

$$q'(y', z') = \frac{q(y, z)}{A_{66}}, \quad P' = \frac{P}{A_{66}a_0^2}.$$

В таблице для случая штампа в форме кругового параболоида ($2R_1 = 2R_2 = \delta = 1$) приведены значения параметра эллипса контакта ε (10) и интегральной характеристики P, рассчитанные для различных транстропных материалов по точному решению (12), (13). Использовались известные размерные значения упругих постоянных [1]. Соответствующие значения, полученные методом нелинейных граничных интегральных уравнений, обозначены P_0 (см. таблицу) и отличаются от P не более чем на 1 % (выбиралась сетка размером 13×13). При этом скорость сходимости итераций (19) существенно зависит от материала: наибольшее число итераций требуется для графита.

Из точного решения (12), (13) следует, что при вдавливании кругового параболоида возникает эллиптическая область контакта, которая при $\varepsilon < 1$ вытянута вдоль оси y, при $\varepsilon > 1$ — вдоль оси z (см. таблицу). Это явление можно объяснить следующим образом. Пусть на границе подложки (в полупространстве $x \geqslant 0$) вместо штампа в начале координат действует нормальная сосредоточенная сила. Результаты сравнения нормальных перемещений равноудаленных от начала координат точек $u_1 = u_x(0,1,0)$ и $u_2 = u_x(0,0,1)$ (см. формулы (1.12) в [5]) показывают, что для тех материалов, для которых $u_1 < u_2$, область контакта вытягивается вдоль оси y, для материалов, для которых $u_1 > u_2$, — вдоль оси z.

При вдавливании эллиптического (некругового) транстропного штампа может возникать круговая область контакта.

Рассмотрим случай, когда основание штампа в окрестности области контакта является круговым конусом угла раствора 2β:

$$f(y,z) = \operatorname{ctg}\beta\sqrt{y^2+z^2}.$$

Для этого случая при $\delta = 1$ в таблице приведены значения P_1 ($\beta = 30°$) и P_2 ($\beta = 45°$). При уменьшении угла раствора конуса площадь области контакта и значение интегральной характеристики уменьшаются, несмотря на то что значение давления в точке первоначального контакта увеличивается.

Заключение. В работе показано, что численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений может применяться в тех случаях, когда форма штампа в области контакта не описывается полиномиальной функцией, и позволяет учесть трансверсальную изотропию материалов штампа и подложки в рамках теории Герца, когда их плоскости изотропии взаимно перпендикулярны. Точные решения задачи можно получить при полиномиальной форме штампа и эллиптической области контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ding H.** Elasticity of transversely isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. Dordrecht: Springer, 2006.
2. **Pan E.** Static Green's functions in anisotropic media / E. Pan, W. Chen. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2015.
3. **Fabrikant V. I.** Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2011. V. 64, N 2. P. 151–170.
4. **Fabrikant V. I.** Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // Europ. J. Mech. A. Solids. 2011. V. 30. P. 902–912.
5. **Давтян Д. Б., Пожарский Д. А.** Действие полосового штампа на трансверсально-изотропное полупространство // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 783–794.
6. **Артамонова Е. А., Пожарский Д. А.** О полосовом разрезе в трансверсально-изотропном упругом теле // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 5. С. 768–777.
7. **Fabrikant V. I.** Relationship between contact and crack problems for generally anisotropic bodies // Intern. J. Engng Sci. 2016. V. 102. P. 27–35.
8. **Fabrikant V. I.** Relationship between green's functions of tangential contact and crack problems for generally anisotropic bodies // Z. angew. Math. Mech. 2016. Bd 96, N 12. S. 1423–1433.

9. **Александров В. М.** Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. М.: Машиностроение, 1986.
10. **Alexandrov V. M.** Three-dimensional contact problems / V. M. Alexandrov, D. A. Pozharskii. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001.
11. **Галанов Б. А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
12. **Пожарский Д. А.** Контактная задача для трансверсально-изотропного полупространства с неизвестной зоной контакта // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 2. С. 158–161.

Поступила в редакцию 1/II 2017 г.,
в окончательном варианте — 14/VI 2017 г.