ПМТФ, № 6, 1971

УДК 538.4

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПУЛЬСИРУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Д. А. Бут

(Москва)

В последние годы создаются относительно крупные магнитогидродинамические (МГД) установки, в которых магнитное число Рейнольдса (R_m) конечно и магнитное поле заметно деформируется проводящими потоками. При исследовании устройств с $R_m \sim 1$ возникают задачи о переходных процессах в МГД потоках, помещенных в пульсирующее магнитное поле и характеризуемых существенным МГД взаимодействием. Для их решения представляется естественным развитие метода характеристик.

В общем случае метод характеристик неприменим для анализа нестационарных МГД течений с конечными R_m, так как исходная система уравнений не является гиперболической. Однако, если ввести некоторые допустимые в ряде случаев ограничения, можно построить модели квазиодномерных нестационарных МГД течений с гиперболическими квазилинейными исходными системами уравнений первого порядка, для которых удается сформулировать данные Коши на граничной кривой пространственного или характеристического типа [1].

Ниже решаются два типа задач подобного рода для проводящих потоков в пульсирующем поперечном магнитном поле. Первый тип охватывает сверхзвуковые течения газа в каналах, второй относится к движению свободных струй несжимаемой жидкости. Параметр МГД взаимодействия и величина R_m предполагаются существенными. При определенных ограничениях на геометрию моделей и при условии потенциального характера электрического поля в каналах задачи сводятся к задаче Гурса, которая для каждого случая решается на ЭЦВМ методом конечных разностей вдоль характеристических интервалов.

1. **Течение проводящего газа в узком прямоугольном канале.** Идеальный совершенный газ, обладающий конечной проводимостью σ, движется со сверхзвуковой скоростью $\mathbf{u}$ $(u, 0, 0,)$ в поперечном магнитном поле $\mathbf{B}$ $(0, B, 0)$ по каналу с изоляционными стенками $y = \pm y_0/2 = \text{const}$ и идеально секционированными электродными стенками $z = \pm z_0 / 2 = \text{const}$. Единичной площади электродных стенок соответствует замкнутая внешняя цепь с активным сопротивлением R и индуктивностью L, расположенная за выходом из канала. Благодаря эффекту Фарадея в канале течет электрический ток плотностью $\mathbf{j}$ $(0, 0, j)$. Все токоотводы ориентированы по положительному направлению x, а к стенкам $\pm y_0 / 2$ снаружи примыкает магнитопровод с высокой магнитной проницаемостью, замыкающийся между входной $(x = 0)$ и выходной $(x = l)$ плоскостями канала. При такой геометрии токоотводов и магнитопровода каждый элементарный ток в точке x' наводит собственное магнитное поле только в области $x > x'$ [2], и, таким образом, возмущения магнитной индукции не распространяются вверх по потоку. Подобные условия с некоторым приближением выполняются и для узких каналов без стали, если токоотводы направлены по скорости потока, и протекающий в них ток дает основной вклад в индуцированное магнитное поле.

Концевые эффекты предполагаются подавленными, например, за счет установки продольных изоляционных перегородок на входе и выходе канала. Величины R, L, σ являются произвольными гладкими функциями R (x, t), L (x), σ (x, t) соответственно. Внешнее магнитное поле не зависит от x и меняется во времени как $B_e = B_m \sin \omega t$. Электроды на входе разомкнуты — $R(0, t) \to \infty$, так что $j(0, t) \equiv 0$, и параметры на входе остаются невозмущенными. Предполагается, что основной вклад в электрическое поле $\mathbf{E}(0, 0, -E)$ создается падением напряжения на R и L, а вихревое электрическое поле за счет $\partial B / \partial t$ мало. Порядок максимальной амплитуды вихревой составляющей $\mathbf{E}$ на периферии канала равен $\omega B_m z_0 / 2(1 + z_0 / l)$. Если принять uB_m за характерную амплитуду потенциального электрического поля, то пренебрежение вихревыми токами в канале будет оправдано при $\omega z_0 / 2u(1 + z_0 / l) \ll 1$ и достаточно больших L.

Исходными уравнениями задачи будут уравнения неразрывности, движения, энергии, состояния, первое уравнение Максвелла и закон Кирхгофа для цепи электродов единичной площади

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \qquad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = -jB$$

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + u\frac{\partial e}{\partial x}\right) + p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\frac{p}{\rho T} = \mathrm{const}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 j, \qquad L\frac{\partial j}{\partial t} + j\left(R + \frac{z_0}{\sigma}\right) = uB$$

Здесь e — внутренняя энергия газа, T — температура; остальные обозначения общепринятые.

Перейдем к безразмерным величинам, относя p, ρ, u, σ к их значениям на входе $p_0, \rho_0, u_0, \sigma_0$, магнитную индукцию к B_m, плотность тока к $\sigma_0 u_0 B_m$, L к $\mu_0 z_0 l^2$, R к z_0 / σ_0, x к l, t к l / u_0.

Введем также критерии подобия: магнитное число Рейнольдса $R_m = \mu_0 \sigma_0 u_0 l$, параметр магнитогидродинамического взаимодействия $S = \sigma_0 B_m^2 l / \rho_0 u_0$, число Маха $M = u / \sqrt{\gamma p / \rho}$, где γ — показатель адиабаты, число Эйлера $E = p_0 / \rho_0 u_0^2$. Тогда получим систему пяти уравнений относительно неизвестных u, p, ρ, j, B

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial p}{\partial x} = -SjB \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + (\gamma - 1)p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{S}{E}(\gamma - 1)\frac{j^2}{\sigma} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = R_m j \tag{1.4}$$

$$R_m L\frac{\partial j}{\partial t} + (R + \sigma^{-1})j = uB \tag{1.5}$$

Дополним эту систему уравнениями для полных дифференциалов неизвестных

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}\partial t + \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad dp = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

и т. д.

Следуя методу, изложенному в [3], выразим каждую производную $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial p / \partial t$, $\partial p / \partial x$, ... и т. д. через коэффициенты и свободные члены полученной системы десяти уравнений по правилу Крамера, а затем приравняем нулю одновременно числитель и знаменатель каждой производной. Тогда корни знаменателя дадут характеристические направления dx / dt, а корни числителя — условия совместимости на характеристиках. Таким образом приходим к характеристической нормальной форме [1] исходной системы, которая эквивалентна пяти обыкновенным дифференциальным уравнениям, действующим вдоль характеристик

$$E\,\frac{dp}{dt}+A\rho\,\frac{du}{dt}=Sj\left[(\gamma-1)\,\frac{j}{\sigma}-AB\right]\quad \text{вдоль}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rm I}=u+A \qquad (1.6)$$

$$E\,\frac{dp}{dt}-A\rho\,\frac{du}{dt}=Sj\left[(\gamma-1)\,\frac{j}{\sigma}+AB\right]\quad \text{вдоль}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rm II}=u-A \qquad (1.7)$$

$$E\,\frac{dp}{dt}-A^2\,\frac{d\rho}{dt}=(\gamma-1)\,S\,\frac{j^2}{\sigma}\quad \text{вдоль}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rm III}=u \qquad (1.8)$$

$$\frac{dB}{dx}=R_m j\quad \text{вдоль}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rm IV}=\infty \qquad (1.9)$$

$$R_m L\,\frac{dj}{dt}=uB-j\,(R+\sigma^{-1})\quad \text{вдоль}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rm V}=0\qquad \left(A=\frac{u}{M}\right) \qquad (1.10)$$

Все характеристические направления $dx\,/\,dt$ в рассматриваемой задаче действительные, и, следовательно, исходная система (1.1) — (1.5) гиперболическая. Этот вывод естествен с физической точки зрения, так как в построенной модели все возмущения распространяются только вниз по потоку.

Характеристическая система (1.6) — (1.10) может быть получена также с помощью собственных значений и левых собственных векторов матрицы исходной системы (1.1)—(1.5), если предварительно перейти к новым переменным $\eta=t+x$, $\tau=t-x$.

Будем считать, что при $t<0$ течение в канале было установившимся и $B_e=0$, а в момент $t=0$ B_e начинает изменяться как $\sin\omega t$. Тогда можно сформулировать начальные условия задачи на граничной кривой в xt-плоскости, состоящей из положительных полуосей x и t. Действительно, при $t=0$ МГД взаимодействия нет, и все параметры вдоль x известны из предшествующего стационарного режима. Далее, при $x=0$ имеем $j\equiv 0$, и параметры на входе остаются неизменными, так как по условию все возмущения не распространяются вверх по потоку.

Поскольку все характеристики имеют неотрицательный наклон $dt\,/\,dx$, выбранная граничная кривая позволит построить однозначное решение задачи в области влияния (полуполосе $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t<\infty$) при условии гладкости коэффициентов исходной системы [1].

Ввиду того что оси x и t являются характеристиками, приходим, таким образом, к задаче Гурса. Ее особенность заключается в том, что начальные данные не могут задаваться произвольно на граничной кривой, а должны удовлетворять соответствующим характеристическим уравнениям, в данном случае — уравнениям (1.9) и (1.10), а также условиям согласования в точке (0, 0). Легко видеть, что эти ограничения выполняются. Уравнение (1.9) удовлетворяется тождественно, а уравнение (1.10) требует, чтобы

$$uB\,|_{x=0}=\underset{\substack{R\to\infty\\ j\to 0}}{j\,(R+\sigma^{-1})}\,|_{x=0}=\sin\omega t$$

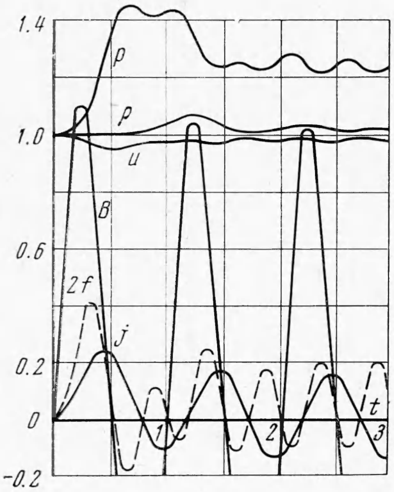
т. е. индуцируемая э.д.с. при холостом ходе уравновешивается падением напряжения от нулевого тока на бесконечном внешнем сопротивлении, что физически очевидно.

Следует отметить, что введенное ограничение $R\,(0,\,t)\to\infty$ не сильное, так как при произвольном непрерывном распределении $R\,(x,\,t)$ можно сместить расчетное начало оси x несколько вверх по потоку, где электродов и тока нет, и аппроксимировать $R\,(x,\,t)$ с нужной особенностью в рамках одномерного приближения.

При расчетах принимались следующие начальные условия:

$$u\,(0,\,t)=u\,(x,\,0)=p\,(0,\,t)=p\,(x,\,0)=\rho\,(0,\,t)=\rho\,(x,\,0)=1$$
$$B\,(0,\,t)=\sin 2\pi t,\; B\,(x,\,0)=j\,(0,\,t)=j\,(x,\,0)=0$$

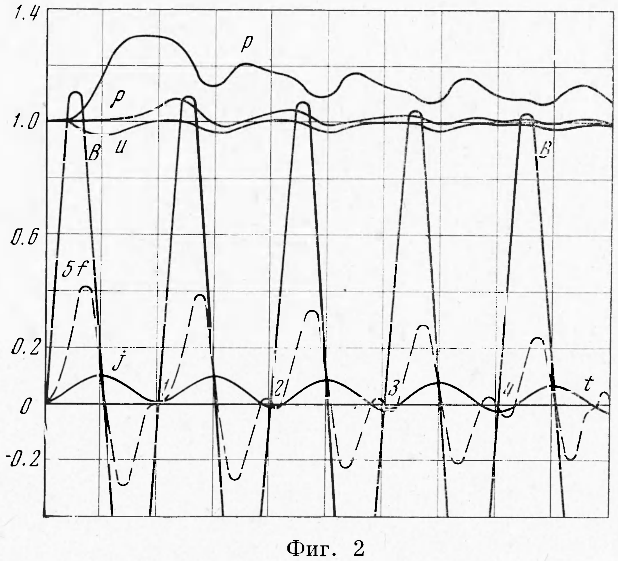
Система (1.6) — (1.10) решалась на ЭЦВМ методом конечных разностей вдоль характеристических интервалов [4]. Использовалась базисная сетка, образованная характеристиками IV и V, с размерами ячейки $\Delta x = \Delta t = 10^{-2}$ и $\Delta x = \Delta t = 10^{-3}$. Остальные характеристики проводились через точку с неизвестными параметрами путем линейного интерполирования данных на предыдущем шаге. Дробление сетки приводило лишь к незначительной корректировке результатов в пределах 5%. Конечные результаты проверялись выборочно непосредственной подстановкой в исходную систему (1.1) — (1.5), записанную в форме конечных разностей на интервалах $\Delta x = \Delta t = 0.05$. Погрешность составляла $\sim 3\%$ наибольших по модулю членов уравнений вплоть до $t \cong 3$.



Фиг. 1

На фиг. 1 приведено распределение параметров по t для $x = 0.89$ при $\sigma = 1$, $L = R = x^{-1/5}$, $M_0 = 5$, $E = 0.024$, $R_m = S = 1$, а на фиг. 2 — при тех же условиях, но $R_m = S = 3$. Помимо основных параметров там же построена кривая электромагнитной силы $f = jB$ ($f > 0$ условно соответствует тормозящей, а $f < 0$ — ускоряющей силе).

Видно, что при включении внешнего синусоидального поля вначале происходит заметный заброс $j(t)$ и $B(t)$ в верхнюю полуплоскость, а затем они стремятся к некоторым установившимся значениям. Характерно, что $j(t)$ качественно меняется так же, как и в обычном переходном процессе при включении активно-индуктивной цепи на синусоидальное напряжение (см., например, [5]). При увеличении σ_0 и, соответственно, R_m и S ток несколько возрастает (возрастает базис $\sigma_0 u_0 B_m$), однако осредненная сила f в рассматриваемых случаях при этом уменьшается за счет бóльших по



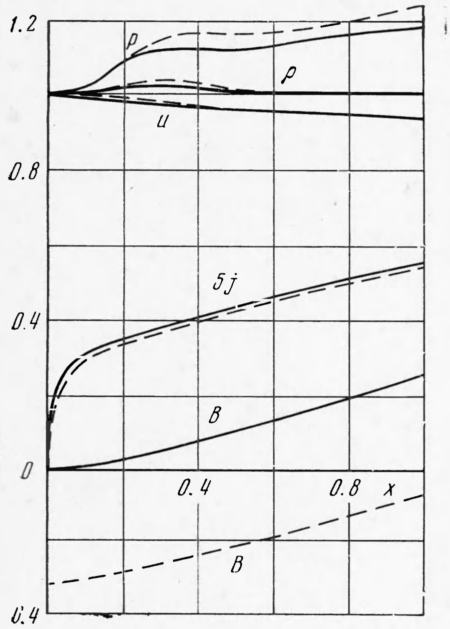
Фиг. 2

модулю отрицательных мгновенных значений $f(t)$, связанных с более индуктивным характером цепей. Этим можно объяснить меньший первичный всплеск $p(t)$ при бóльших R_m и S. Как следует из фиг. 1 и фиг. 2, увеличение R_m и S также затягивает переходный процесс, поскольку постоянная времени цепей возрастает. Смещение кривой $B(t)$ вверх по сравнению с $B_e(t) = \sin 2\pi t$ объясняется влиянием индуцированного магнитного поля.

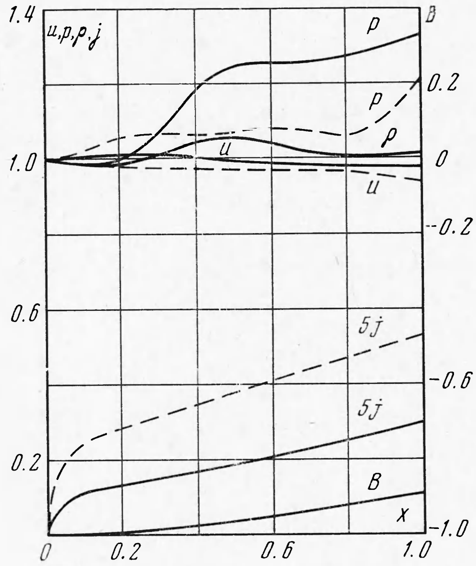
Можно предполагать, что при малых L и существенных S достаточно резкие всплески давления на фиг. 1,2 приведут к разрывным решениям, не охватываемым проведенным анализом.

Колебания температуры газа определяются отношением p/ρ.

На фиг. 3,4 приведены кривые распределения параметров по x для $R_m = S = 3$ и различных моментов времени (на фиг. 3 сплошные кривые для $t = 0.5$, пунктирные — для $t = 0.55$, на фиг. 4 сплошные кривые для $t = 0.75$, пунктирные — для $t = 1.5$). Плотность тока и индукция возрастают по x, а кривые $p(x)$ и $\rho\ (x)$ вместе с кривыми $p\ (t)$ и $\rho\ (t)$ на фиг. 1,2 подтверждают вывод об образовании волн сжатия в канале.



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Движение свободной струи несжимаемой невязкой проводящей жидкости. Струя движется со скоростью $\mathbf{u}\ (u,\ 0,\ 0)$ и касается узкими сторонами секционированных по x электродов $z = \pm z_0/2 = \text{const}$, каждая пара которых подключена к внешней цепи с активным сопротивлением R' и индуктивностью L'. В области $y > y_0/2$, $y < -y_0/2$, находится стальной магнитопровод $(\mu \to \infty)$, с помощью которого создается магнитное поле $\mathbf{B}\ (0,\ B,\ 0)$. Геометрия магнитопровода и токоотводов такая же, как в предыдущей задаче. Струя движется в узком зазоре y_0 между стальными стенками, не касаясь их, т. е. $\delta < y_0$, где δ — толщина струи по y. В струе течет ток $\mathbf{j}\ (0,\ 0,\ j)$ и создается электрическое поле $\mathbf{E}\ (0,\ 0,\ -E)$ благодаря падению напряжения во внешних цепях, которое много больше поля из-за электромагнитной индукции в канале. Концевые эффекты устранены продольными перегородками или продлением магнитного поля за пределы канала. Функции $R'\ (x,\ t)$, $L'\ (x)$ — заданные гладкие функции при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$; $R'\ (0,\ t) \to \infty$. Внешнее магнитное поле B_e меняется во времени как $B_m \sin \omega t$. Гравитационные и объемные динамические силы действуют по оси x и их ускорение $q\ (t)$ задано. Проводимость струи $\sigma = \text{const}$.

Динамика переходного процесса для электромагнитных параметров в одномерном приближении характеризуется уравнением Кирхгофа для цепи одной электродной пары

$$uBz_0 = I\left(\frac{z_0}{\sigma\Delta\, x\delta} + R'\right) + L'\ \frac{\partial I}{\partial t}$$

где Δx — продольный размер электрода, $I = j\delta\Delta x$ — ток электродной пары.

С учетом уравнения неразрывности $u\delta \cong \mathrm{const}$ имеем

$$uBz_0 = j\left(\frac{z_0}{\sigma} + R'\Delta x\delta\right) + L'\Delta x\delta\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \frac{j}{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{2.1}$$

Уравнение движения струи записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{jB}{\rho} + q$$

Третьим исходным уравнением будет уравнение Максвелла

$$\partial B\, /\, \partial x = \mu_0 j \tag{2.2}$$

Запись последнего соотношения зависит от способа осреднения B по поперечному сечению. Форма (2.2) соответствует осреднению B по сечению собственно струи. Если же осреднять B по всему зазору y_0, то следует писать

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\frac{\delta}{y_0}j \tag{2.3}$$

В дальнейшем используется форма (2.2), хотя для применяемого метода введение (2.3) вместо (2.2) не усложняет задачи.

Будем в дальнейшем относить x к длине канала l, t к $l\,/\,u_0$, B к B_m, j к $\sigma u_0 B_m$, R' к $z_0/\sigma\Delta x\delta_0$, L' к $\mu_0 z_0 l^2/\Delta x\delta_0$, q к $u_0^2\,/\,l$ и введем параметры

$$R_m = \mu_0\sigma u_0 l, \quad S = \frac{\sigma B_m^2 l}{\rho u_0}$$

где ρ — плотность жидкости, u_0 и δ_0 — скорость и толщина струи на входе.

Тогда исходная система примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -SjB + q \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + j\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L'R'_m}\left[u^2B - j(u+R')\right] - \frac{Sj^2B}{u} + \frac{qj}{u} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = R_m j \tag{2.6}$$

Если использовать уравнение (2.3) вместо (2.2), то последнее уравнение запишется так:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = R_m'\frac{j}{u} \qquad R_m' = R_m\frac{\delta_0}{y_0}$$

Система (2.4) — (2.6), как и в предыдущей задаче, приводится к нормальной характеристической форме

$$\frac{du}{dt} = q - SjB \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathrm{I}} = u \tag{2.7}$$

$$\frac{dj}{dt} - \frac{j}{u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{R_m L'}\left[u^2B - j(u+R')\right] \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathrm{II}} = 0 \tag{2.8}$$

$$dB/dx = R_m j \quad \text{вдоль} \quad (dx/dt)_{\mathrm{III}} = \infty \tag{2.9}$$

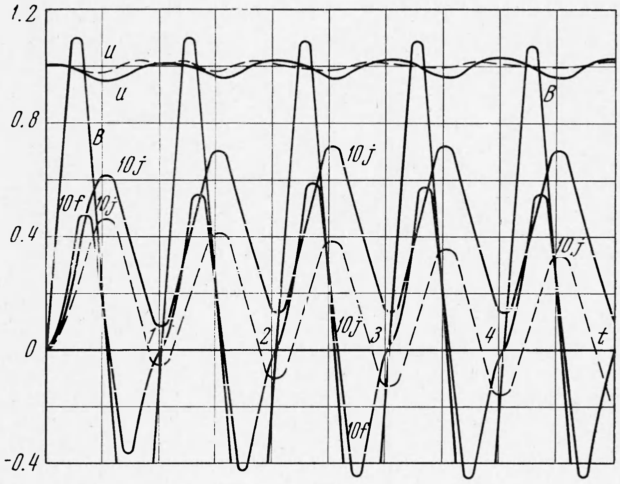
Если $B_e \equiv 0$ при $t < 0$ и $B_e = \sin\omega t$ при $t \gg 0$, то, как и раньше, начальные условия могут быть заданы на положительных полуосях x и t, которые являются характеристиками II и III, и задача сводится к задаче Гурса.

Принимаем

$$u(0, t) = u(x, 0) = 1, \quad j(0, t) = j(x, 0) = 0$$
$$B(x, 0) = B_e(0) = 0, \quad B(0, t) = B_e = \sin 2\pi t \tag{2.10}$$

Условия (2.10) удовлетворяют соответствующим дополнительным ограничениям характеристической задачи и согласуются в точке (0,0).

Для решения нормальной формы (2.7) — (2.9) с начальными условиями (2.10) применялся тот же метод, что и в первой задаче. Использовалась сетка в xt-плоскости с размерами ячейки $\Delta x = \Delta t = 10^{-2}$ (интервалы вдоль II и III характеристик). Принималось $q = 0$, $R_m = S = 5$, $R' = L' = x^{-1/6}$. Выборочная подстановка результатов для $t \lesssim 2$ в исходную систему (2.4) — (2.6) давала погрешность $\lesssim 3\%$ наибольших по модулю членов.



Фиг. 5

На фиг. 5 показано изменение параметров по t для $x = 0.89$ (сплошные линии) и $x = 0.29$ (пунктирные линии) при $R_m = S = 5$. Как и в первой задаче, скорость с некоторым запаздыванием «следит» за колебаниями электромагнитной силы $f = jB$, причем наблюдается более заметное ускорение жидкости силой f, направленной вниз по потоку. Колебания u приводят к обратному изменению δ и, соответственно, внутреннего сопротивления между каждой парой электродов, что существенно сказывается на переходном процессе для электромагнитных параметров. Этим, в частности, можно объяснить и характер кривой $j(t)$ для $x = 0.89$, у которой среднее значение сначала возрастает до $t \approx 3$ и лишь затем начинает стремиться к оси t. В начальной части струи ($x = 0.29$) колебания u значительно слабее, и характер $j(t)$ такой же, как и в известных переходных процессах при включении индуктивностей на переменное напряжение [5] (см. пунктирные кривые на фиг. 5).

Отметим, что в обеих задачах рассмотренный метод допускает включение при $t = 0$ магнитной индукции с произвольной начальной фазой, т. е. $B_e = \sin(\omega t + \varphi_0)$. Действительно, $j(x, 0)$ не может измениться скачком из-за индуктивностей в цепях, и начальные условия на полуоси $x > 0$ определяются предшествующим стационарным режимом при условии, что роль двумерных вихревых токов при включении поля с $\varphi_0 \neq 0$ незначительна.

Проведенный анализ охватывает также случай для обоих типов течений, постоянно помещенных в пульсирующее магнитное поле, когда при $t < 0$ электроды были разомкнуты и $j(x, t) \equiv 0$ во всем канале, а при $t \geqslant 0$ происходило замыкание внешних цепей с произвольно меняющимися параметрами.

Поступила 6 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
2. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
3. Shapiro A. H. The Dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, vol. 1—2. Ronald Press Co., N. Y., 1953—1954.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
5. Круг К. А., Даревский А. И., Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Ломоносов В. Ю., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы электротехники. М., Госэнергоиздат, 1952.