

4. Иоффе Р.Л., Панченко Б.И. К исследованию влияния чисел лопастей рабочих колес гидродинамических машин на их виброакустические характеристики // Изв. АН СССР. Машиноведение. — 1972. — № 2.
5. Рубинов В.Я., Покровский Б.В. Влияние чисел лопаток рабочего колеса и направляющего аппарата на виброакустические характеристики центробежного насоса // Тр. ВНИИгидромаш. — 1975. — Вып. 46.
6. Боровский Б.И., Чучеров А.И., Хитрик В.Л. Влияние соотношения чисел лопаток рабочего колеса и соплового аппарата на виброактивность осевых и радиальных турбин // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1987. — № 4.
7. Боровский Б.И., Хитрик В.Л. Выбор соотношения чисел лопаток рабочего колеса и соплового аппарата парциальных турбин, обеспечивающего снижение их виброакустической активности // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1990. — № 2.
8. Измайлов Р.А., Курзин В.Б., Окулов Е.Л. Явление акустического резонанса при аэродинамическом взаимодействии решеток в дозвуковом потоке газа // ПМТФ. — 1987. — № 1.
9. Tyler J.M., Sofrin T.G. Axial flow compressor noise studies // SAE Transactions. — 1962. — V. 70. — P. 309—332.
10. Курзин В.Б. Об акустическом резонансе в турбомашинах // Пробл. прочности. — 1974. — № 8.
11. Столяров Е.П. Возбуждение звука малыми возмущениями энтропии и завихренности в пространственно неоднородных течениях сжимаемого идеального газа // Акустика турбулентных потоков. — М.: Наука, 1983.
12. Сухинин С.В. Обоснование модели колебаний газа, обтекающего решетку пластин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1982. — Вып. 56.

*г. Сергиев Посад  
Московской области*

*Поступила 22/IX 1993 г.*

УДК 533.697:532.0301

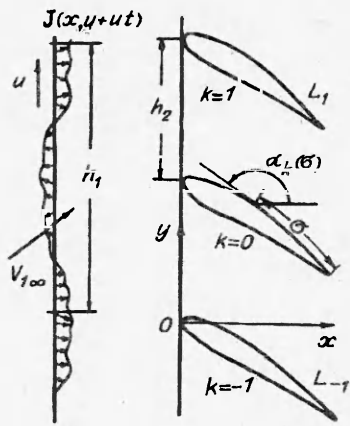
*В.А. Юдин*

## РЕШЕТКА ПРОФИЛЕЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ЗАВИХРЕННОМ ПОТОКЕ

1. Введение. Неравномерный поток жидкости, проходя через лопаточный венец турбомшины, претерпевает изменения. Вопрос о том, насколько они сильны и как влияют на гидродинамические характеристики венца, к настоящему времени слабо изучен. Теоретические исследования в этом направлении велись в основном на плоской модели обтекания в предположении малой неравномерности и слабой нагруженности профилей. В такой постановке задачи, известной под названием «решетка в порыве», возмущение, вносимое профилями в поток, является чисто потенциальным и в силу его экспоненциально быстрого убывания неравномерность потока перед и за решеткой остается практически неизменной. В последние годы благодаря наличию мощных ЭВМ стали проводить расчет на основе полных уравнений Эйлера или Навье — Стокса и получать картину течения за решеткой [1, 2]. Пока это единичные результаты, которые ввиду сложности модели не позволяют проводить исследование зависимости структуры течения от основных параметров решетки.

В данной работе, так же как и в задаче о «решетке в порыве», неравномерность предполагается малой, но снимается ограничение на нагруженность профилей. Они могут быть произвольной формы, а задача линеаризуется на стационарном потоке, соответствующем обтеканию решетки постоянным на бесконечности потоком.

© В.А. Юдин, 1994



Р и с. 1

2. Постановка задачи. В плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  рассмотрим решетку профилей, обтекаемую потоком идеальной несжимаемой жидкости. Профили в решетке предполагаем произвольной формы, гладкими либо имеющими острую выходную кромку. Считаем, что на бесконечности перед решеткой поток представим в виде  $V = V_{1\infty} + J$ , где  $V_{1\infty} = \text{const}$ , а  $J = J(x, y + ut) = J(x, y + ut + h_1)$  — малая неравномерность, в общем случае вихревая ( $\text{rot} J \neq 0$ ), распространяющаяся в направлении оси  $y$  в виде периодической бегущей волны со скоростью  $u$  (рис. 1). Период неравномерности  $h_1$  и шаг решетки  $h_2$  считаем произвольными, удовлетворяющими условию  $H = N_1 h_1 = N_2 h_2$  ( $H$  — общий период,  $N_1, N_2$  — целые числа). Не-

стационарными вихревыми следами, сходящими с профилей вследствие изменения циркуляции на них, пренебрегаем (квазистационарная постановка задачи). Кроме того, будем предполагать, что около решетки отсутствует возвратное течение, а поток завихренности на бесконечности перед ней равен нулю:

$$(2.1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_y^{y+h_1} \Omega_{\infty}(x, \eta) V_{1\infty x} d\eta = 0, \quad V_{1\infty x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} V_{0x}, \quad \Omega_{\infty} = \frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}.$$

Представим комплексную скорость жидкости в виде  $\bar{V}(z, t) = \bar{V}_0(z) + \bar{v}(z, t)$ ,  $|\bar{v}| \ll |\bar{V}_0|$ , где  $\bar{V}_0$  — комплексная скорость обтекания решетки постоянным на бесконечности потоком  $\bar{V}_{1\infty}$ , а  $\bar{v}$  — искомый малый добавок. Разложим далее  $\bar{v}$  на вихревую  $\bar{v}_1$  и потенциальную  $\bar{v}_2$  составляющие:  $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ . Комплексная скорость  $\bar{v}_1$  индуцируется заданной на бесконечности перед решеткой вихревой неравномерностью  $J$  и выражается формулой Био — Савара:

$$(2.2) \quad \bar{v}_1(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Omega(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{z - \xi}, \quad \xi = \xi + i\eta, \quad \Omega = \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y}$$

( $S$  — внешность решетки).

В силу предположений об отсутствии возвратного течения и равенства нулю потока завихренности на бесконечности перед решеткой справедлива оценка [3]

$$(2.3) \quad |\bar{v}_1| < 0,5H(\max |\Omega_{\infty} V_{1\infty x}| / u + 0,5 \max |\Omega_{\infty}|),$$

обеспечивающая малость неравномерности  $\bar{v}_1$  во всей области течения по известной информации о ее малости на бесконечности перед решеткой. Неравенство (2.3) позволяет использовать линейризованное уравнение Гельмгольца

$$(2.4) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} V_{0x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} V_{0y}, \quad \bar{V}_0 = V_{0x} - iV_{0y},$$

которое при известной завихренности  $\Omega_{\infty}$  на бесконечности перед решеткой позволяет найти ее во всей области течения  $S$ .

Комплексная скорость  $\bar{v}_2(z, t)$  в силу ее определения является аналитической функцией по  $z$  в области течения  $S$  и удовлетворяет: условию непротекания на профилях  $v_{2n}(z, t) = -v_{1n}(z, t)$  ( $z \in L_k, L_k$  — контур  $k$ -го профиля в решетке,  $k = 0, \pm 1, \dots, n$  — нормаль к нему (следует из того,

что  $\bar{V}_n(z, t) = V_{0n}(z, t) = 0$ ), периодичности потока в направлении оси  $y$   $\bar{v}_2(z, t) = \bar{v}_2(z + iH, t)$ , условию равенства нулю на бесконечности и равенства нулю скорости жидкости в фиксированных точках выходных кромок гладких профилей либо условию Жуковского о конечности скорости в острых выходных кромках этих профилей.

Формулу для расчета давления на исходном профиле решетки получим, исходя из уравнений Эйлера, записанных в форме Ламба:

$$(2.5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) - V \times \text{rot} V = - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Интегрируя (2.5) вдоль исходного профиля и учитывая условие  $V_n = 0$ , имеем

$$(2.6) \quad p(\sigma, t) = - \frac{1}{2} \rho V^2(\sigma, t) + p(0, t) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\sigma V(\sigma, t) dt,$$

где  $\sigma$  — дуговая координата исходного профиля, отсчитываемая от выходной кромки ( $V(0, t) = 0$ ). Выражения для суммарной гидродинамической силы и момента получаются из (2.6) интегрированием давления по контуру исходного профиля.

**3. Метод решения.** Для решения задачи (2.2), (2.4) разложим завихренность  $\Omega$  и скорость  $\bar{v}_1$  в ряды Фурье по времени ( $i \neq j$ ):

$$(3.1) \quad \Omega(z, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \Omega_r(z) \exp(-jr\omega_1 t),$$

$$\bar{v}_1(z, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{v}_{1r}(z) \exp(-jr\omega_1 t), \quad \omega_1 = 2\pi u/h_1.$$

Подставляя (3.1) в (2.1), с использованием соотношения

$$\Omega(z + imh_2, t) = \Omega(z, t + mh_2/u)$$

и равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \zeta - ikH} = \frac{\pi}{H} \text{cth} \frac{\pi}{H} (z - \zeta)$$

получаем

$$(3.2) \quad \bar{v}_{1r}(z) = \frac{1}{2Hi} \int \int_{S_0} \Omega_r(\xi) \sum_{m=0}^{N_2-1} \exp(-jrm\psi) \text{cth} \frac{\pi}{H} (z - \zeta - imh_2) d\xi d\eta.$$

Здесь  $\psi = 2\pi N_1/N_2$ ;  $S_0$  — область межлопаточного канала исходного профиля решетки (рис. 2). Ввиду экспоненциального убывания функций  $(\bar{V}_0 - \bar{V}_{1,\infty})$  и  $\bar{v}_2$  при удалении от фронта решетки можно приближенно считать при расчете интеграла (3.2), что уже на некотором конечном расстоянии  $|x_0|$  от фронта решетки вверх по потоку  $\bar{v}_1(x, t) \approx \bar{J}(x, y + ut)$ ,  $\Omega(z, t) \approx \Omega_\infty(z, t)$  при  $x < x_0$ . Вместе с требованием (2.1) это позволяет заменить интегрирование по бесконечной области  $S_0$  на интегрирование по полубесконечной области  $S_x = S_0 \cup \{x > x_0\}$ .

Обозначим далее через  $\eta_0 = \eta_0(\xi, \eta)$  ординату точки пересечения линии тока скорости  $V_0$ , проходящей через точку  $(\xi, \eta)$ , с осью  $x = x_0$ , а через  $t_0 = t_0(\xi, \eta)$  — время, в течение которого жидкая частица, двигаясь со скоростью  $V_0$ , переместится из точки  $(x_0, \eta_0)$  в точку  $(\xi, \eta)$ :

$$(3.3) \quad t_0(\xi, \zeta) = \int_{L_{\eta_0, \xi, \eta}} \frac{ds}{V_0(s)}$$

( $L_{\eta_0, \xi, \eta}$  — участок линии тока до точки  $(\xi, \eta)$ ). Тогда, согласно уравнению (2.4),  $\Omega(\xi, \eta, t) = \Omega(x_0, \eta_0, t - t_0)$  и получим формулу

$$(3.4) \quad v_{\nu}(z) = \frac{\Omega_{r_0}}{2\pi i} \int_{S_{x_0}} \exp(jr\omega_1(t_0 - \eta_0/u)) \sum_{m=0}^{N_2-1} \exp(-jrm\psi) \times \\ \times \operatorname{cth} \frac{\pi}{H} (z - \zeta - imh_2) d\xi d\eta,$$

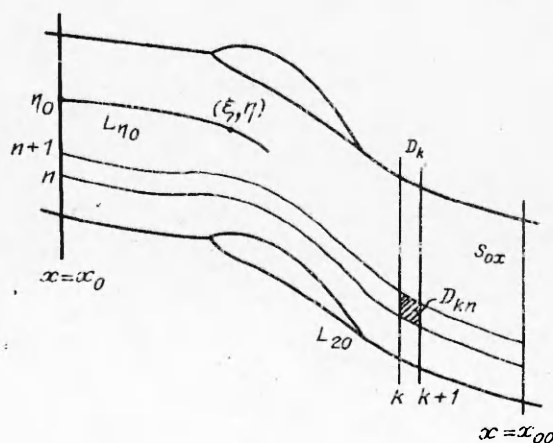
где  $\Omega_{r_0}$  — коэффициент ряда Фурье

$$(3.5) \quad \Omega(x_0, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \Omega_{r_0} \exp(-jr\omega_1(t - y/u)).$$

Формулы (3.3)–(3.5) позволяют рассчитать вихревую составляющую скорости  $v_1$  по известному основному потоку  $\bar{V}_0$  и заданной неравномерности  $\bar{J}$  набегающего потока. Задача нахождения потенциальной составляющей скорости  $v_2$  при известной функции  $v_1$  идентична рассмотренной в [4].

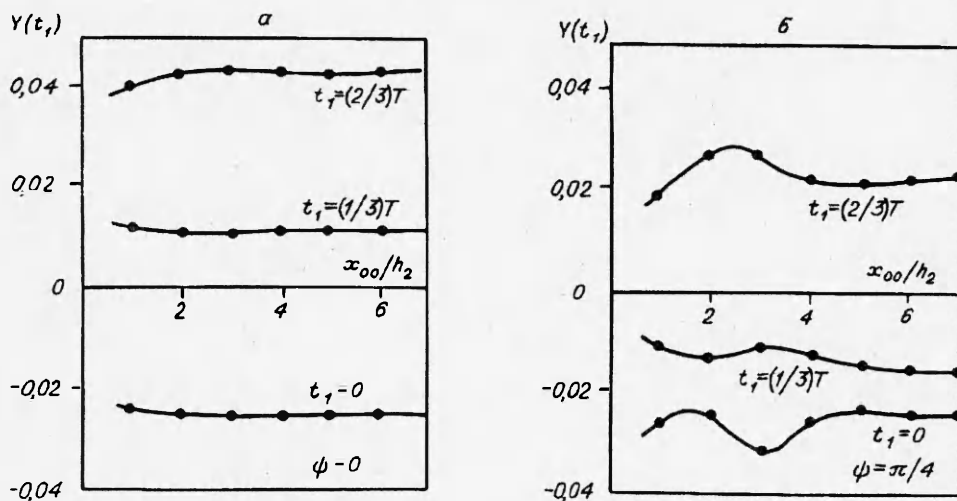
4. Сходимость алгоритма, примеры расчета. При расчете на ЭВМ интеграла (3.4) полубесконечная область  $S_{x_0}$  была обрезана справа, т.е. расчет велся до  $x = x_{00}$  (рис. 2). Для проверки сходимости алгоритма по этому параметру проведены расчеты для  $x_{00}/h_2 = 1, 2, 3, \dots, 10$ . На рис. 3 в качестве примера приведены значения окружной составляющей силы  $Y(t_1)$  для трех фиксированных моментов времени:  $t_1 = 0; T/3; 2T/3$  ( $T = h_1/u$  — период по времени). При  $\psi = 2\pi$  (один профиль в периоде) совпадение сил и моментов с точностью до трех знаков после запятой во всех проведенных расчетах наступало уже при  $x_{00}/h_2 > 3$  (рис. 3, а). При  $\psi = \pi/4$  (четыре профиля в периоде) для обеспечения той же точности расчет требуется вести уже до значений  $x_{00}/h_2 = 5 \div 6$  (рис. 3, б). Этот результат согласуется с известными теоретическими и экспериментальными данными с тем, что влияние неравномерности потока по мере удаления от фронта решетки сказывается тем дальше, чем меньше сдвиг фаз  $\psi$  между соседними профилями.

Вторым параметром, определяющим точность расчета, является число ячеек разбиения расчетной области  $S_{x_0}$  (густота сетки). В расчетном алгоритме густота сетки зада-



Р и с. 2

валась числом  $N$  точек разбиения входного сечения  $x = x_0$ . В этих точках  $(x_0, \eta_{0n})$ ,  $n = 1, \dots, N$ , вычислялись значения функций тока  $\psi_{0n}$  стационарного течения  $\bar{V}_0$ . Элементарные расчетные ячейки  $D_{kn}$  получались пересечением области между двумя соседними линиями тока  $\psi_{0n}$  и  $\psi_{0n+1}$  с вертикальным отрезком  $D_k$ . Ячейки  $D_{kn}$  строились тем меньше, чем они ближе к профилям решетки (см. рис. 2).



Р и с. 3

На рис. 4 представлены значения силы  $Y(t_i)$  ( $t_i = 0, T/3, 2T/3$ ), рассчитанной для  $N = 20, 25, 30, \dots, 60$ . Расчеты указывают на достаточно медленную сходимость алгоритма по густоте сетки. Они проводились на ПЭВМ IBM AT-286, что затрудняло получение результатов для  $N > 60$  (для  $N = 60$  общее число ячеек 10 000). Отметим для сравнения, что в большинстве работ [1, 2] для расчета двумерных течений в решетчатой области число ячеек на один-два порядка больше. Удовлетворительная точность расчета уже для числа ячеек  $\sim 10\,000$  обусловлена линейностью решаемой задачи. В алгоритме существенно используется тот факт, что значение завихренности сохраняется вдоль струйки тока стационарного течения. Так как эти струйки тока можно вычислить достаточно точно заранее, то, по существу, решается одномерная задача для каждой такой струйки. Число этих струек как раз и равно  $N$ .

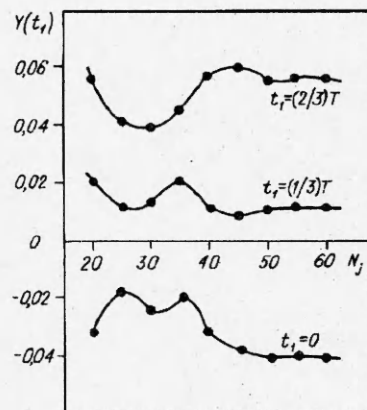
На рис. 5 в качестве теста приведены результаты расчета предельного случая решетки пластин, обтекаемых под малым углом атаки (в момент времени  $t = 0$ ). Как и следовало ожидать, в этом случае эволюция вихревых следов, задаваемых функцией  $J$ , оказалась малой, а результаты расчета нестационарных сил близки к расчетным для того же варианта по модели, не учитывающей эволюцию [4]. В табл. 1 указаны результаты сравнения как отдельных гармоник (первых четырех)  $Y_{n1}, Y_{n2}$  окружной составляющей силы

$$Y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{n1} \cos \omega t + Y_{n2} \sin \omega t),$$

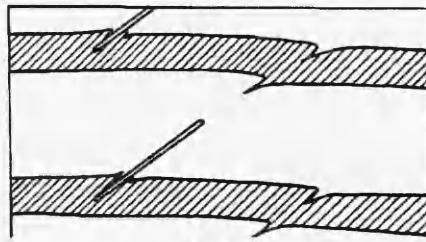
$$\omega = 2\pi/h,$$

так и величины  $\lambda_y = (\max(Y(t)) - \min(Y(t)))/Y_0$ , характеризующей суммарный уровень возбуждающих сил. Небольшое отличие результатов объясняется тем, что программа составлена для расчета телесных профилей. Поэтому и пластину необходимо было моделировать телесным профилем, что приводит к небольшой деформации вихревых следов.

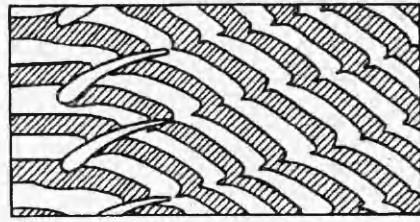
На рис. 6 показана эволюция следов при прохождении их через типичную компрес-



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

Т а б л и ц а 1

$\lambda_y$	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$Y_{31}$	$Y_{32}$	$Y_{41}$	$Y_{42}$
-------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

*Без учета эволюции следов*

4,16	-0,0083	-0,0036	0,0614	-0,0459	-0,0094	-0,0617	0,0037	0,0074
------	---------	---------	--------	---------	---------	---------	--------	--------

*С учетом эволюции следов*

4,11	-0,0076	-0,004	0,0589	-0,0428	-0,0117	-0,0708	0,0081	0,0059
------	---------	--------	--------	---------	---------	---------	--------	--------

Т а б л и ц а 2

$\lambda_y$	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$Y_{31}$	$Y_{32}$	$Y_{41}$	$Y_{42}$
-------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

*Без учета эволюции следов*

0,238	-0,0511	-0,178	-0,0093	-0,0674	0,099	-0,141	0,003	-0,1159
-------	---------	--------	---------	---------	-------	--------	-------	---------

*С учетом эволюции следов*

0,283	-0,0827	-0,129	0,014	0,0076	0,262	0,136	-0,011	0,0068
-------	---------	--------	-------	--------	-------	-------	--------	--------

сорную решетку. Соответствующее сравнение с результатами [5] приведено в табл. 2. Вихревые следы при прохождении через решетку претерпевают значительные изменения, и это приводит (см. табл. 2) к существенному изменению амплитудных значений отдельных гармоник возбуждающих сил. Вместе с тем суммарный уровень возбуждающих сил  $\lambda_y$  меняется слабо. Качественно похожий результат получился, когда компрессорная решетка была заменена на решетку кругов (сильно нагруженная решетка). В этом случае эволюция следов оказалась еще значительнее, относительный вклад отдельных гармоник возбуждающих сил изменился сильнее, однако параметр  $\lambda_y$  по-прежнему изменился слабо. Причина, видимо, в том, что эволюция следов приводит к существенному перераспределению отдельных гармоник в самом следе, сохраняя в целом интегральную характеристику провала скорости в нем.

Работа выполнена в рамках проекта № 93—013—16653 Российского фонда фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gibeing H.J., Buggeln R.C., Chen S.Y. An implicit Navier — Stokes analysis of turbine rotor-stator interaction. — N.Y., 1988. — (Paper / AIAA; N 88—3090).
2. Gundy-Burlet K.L., Rai M.M. Two-dimensional computations of multi-stage compressor flows using a zonal approach. — N.Y., 1989. — (Paper / AIAA; N 89—2452).

3. Курзин В.Б. Течение идеальной жидкости, индуцируемое периодической системой вихревых следов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1988. — Вып. 87.
4. Рябченко В.П., Юдин В.А. Определение гидродинамических реакций решетки профилей, движущейся в неравномерном потоке // Аэроупругость лопаток турбомашин / Тр. ЦИАМ. — 1989. — № 1266.

г. Новосибирск

Поступила 28/VI 1993 г.,  
в окончательном варианте — 16/IX 1993 г.

УДК 532.529.5

В.Г. Каримов, В.Ш. Шагапов

### ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ СОПЛО

Предмет настоящей работы составляет течение жидкости в сопле при наличии выделения растворенного газа. Течение вскипающей жидкости в каналах рассматривалось в [1, 2]. В [3] теоретически и экспериментально исследовано течение жидкости в сопле при введении в поток одиночных газовых пузырьков.

1. Рассмотрим течение жидкости, насыщенной газом при некотором давлении  $p_s$  в канале переменного сечения. Из-за снижения давления до  $p \leq p_s$  в потоке за счет динамических процессов может происходить вскипание жидкости (образование парогазовой фазы). При построении математической модели в квазиодномерном приближении приняты следующие допущения. Образование газовой фазы происходит только из-за выделения растворенного газа, сопровождаемого диффузионными процессами (жидкость считаем холодной и тем самым парциальным давлением паров жидкости в газовой среде будем пренебрегать). Выделение растворенного газа происходит на примесных частицах с исходной концентрацией  $n_0$ . Кроме того, скорости фаз также равны, и силами трения потока о стенки канала пренебрегаем. Температура системы постоянна и равна  $T_0$ .

При отмеченных допущениях в зоне двухфазного течения уравнения сохранения масс для жидкой фазы (параметры снабжены нижним индексом) ( $i = l$ ) и газовой фазы ( $i = g$ ) имеют вид [1, 2]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i F}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u F}{\partial z} = -n J F, \quad \frac{\partial \rho_g F}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u F}{\partial z} = n J F$$

$$(\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i \quad (i = l, g), \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n),$$

где  $F = F(z)$  — площадь поперечного сечения канала;  $u$  — скорость;  $\rho_i^0$  и  $\rho_i$  — истинная и средняя плотность фаз;  $\alpha_i$  — объемное содержание;  $a$  и  $n$  — радиус пузырьков и их число в единице объема;  $J$  — интенсивность образования газовой фазы, приходящаяся на одно включение. Складывая уравнения (1.1), получим уравнение сохранения массы для двухфазной смеси в целом:

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial z} = 0 \quad (\rho = \rho_l + \rho_g).$$

Кроме того, необходимо записать уравнения масс для растворенного в жидкости газа и жидкости (растворителя). Параметры, относящиеся к жидкости (растворителю) и растворенному газу, снабжены вторым нижним индексом  $j = l, g$ . Тогда уравнения масс для компонентов запишем как

© В.Г. Каримов, В.Ш. Шагапов, 1994