

УДК 519.6

Решение системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей: новый взгляд на метод Крамера

С.К. Кыдыралиев¹, С.Н. Скляр¹, А.Б. Урдалетова²

¹Американский университет в Центральной Азии, ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Кыргызстан

²Кыргызско-Турецкий университет "Манас", просп. Мира, 56, Бишкек, 720044, Кыргызстан

E-mails: kydyraliev_s@auca.kg (Кыдыралиев С.К.), sklyar_s@auca.kg (Скляр С.Н.), anarkulurdaletova@manas.edu.kg (Урдалетова А.Б.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 14, 2021.

Кыдыралиев С.К., Скляр С.Н., Урдалетова А.Б. Решение системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей: новый взгляд на метод Крамера // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 289–298.

Для численного решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей в работе предлагается рекурсивный вариант метода Крамера. Предлагаемая методика не требует дополнительных ограничений на матрицу системы, подобных тем, которые формулируются для метода прогонки. Приводятся результаты численных экспериментов, в рамках которых на большом наборе тестовых задач проводится сравнительный анализ эффективности предлагаемой методики и соответствующих алгоритмов.

DOI: 10.15372/SJNM20210305

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, метод Крамера, рекурсивный алгоритм, диагональное преобладание, метод прогонки.

Kydyraliev S.K., Sklyar S.N., Urdaletova A.B. Solving of a system of linear algebraic equations with a three-diagonal matrix: a new look at the Cramer method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 289–298.

For the numerical solution of a system of linear algebraic equations with a three-diagonal matrix, a recursive version of the Cramer method is proposed. This method does not require additional restrictions on the system matrix, similar to those formulated for the sweep method. The results of numerical experiments are presented on a large set of test problems, a comparative analysis of the effectiveness of the proposed methodology and the corresponding algorithms is given.

Keywords: system of linear algebraic equations with a three-diagonal matrix, Cramer method, recursive algorithm, diagonal dominance, sweep method.

1. Введение

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — одна из основных задач вычислительной алгебры [1, 2]. СЛАУ используются в математических моделях либо непосредственно, например, как в модели межотраслевого баланса Леонтьева, либо возникают как этап при численном решении задач для дифференциальных уравнений

и систем, описывающих физические процессы [3]. В частности, СЛАУ с трехдиагональной матрицей большой размерности появляются в результате аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка трехточечными разностными схемами, а также при реализации разностных схем для эволюционных уравнений в частных производных [4]. В последнем случае СЛАУ решается на каждом слое по времени, т. е. многократно.

Рассмотрим следующую СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = f_n. \end{cases} \quad (1)$$

Одним из классически известных экономичных методов решения систем вида (1) является метод прогонки, различные варианты этого метода описаны, например, в монографии [5]. Как известно, прогонка — это реализация метода Гаусса для системы вида (1), причем самым простым и часто используемым является метод монотонной прогонки. Однако естественных условий однозначной разрешимости системы (1) (отличие от нуля определителя системы) зачастую не достаточно для корректности и устойчивости этого метода. В качестве достаточных условий корректности и устойчивости монотонной прогонки обычно используют следующие [5]:

$$\begin{aligned} 1) & \quad b_1 \neq 0, \quad b_n \neq 0, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ 2) & \quad |b_1| \geq |c_1|, \quad |b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad |b_n| \geq |a_n|, \end{aligned} \quad (2)$$

причем во второй группе условий из (2) хотя бы одно неравенство предполагается строгим. Эти неравенства обычно называют “условиями диагонального преобладания”. В случае, когда система (1) возникает как часть более сложной задачи, например модели гидродинамики водоема [6], и ее коэффициенты насчитываются в процессе реализации этой модели, проверка условий типа (2) оказывается невозможной. В этом случае требуется более универсальный метод решения системы (1). Более универсальным является, например, метод немонотонной прогонки (или метод Гаусса с выбором главного элемента по строке [5]), он решает систему (1) в более общих, чем (2) предположениях, однако использует достаточно сложную логику. Несмотря на вышеизложенные недостатки метода Гаусса, он является одним из наиболее экономичных: число арифметических операций, необходимых для его реализации в случае полной матрицы, пропорционально n^3 , а для прогонки — пропорционально n [4].

Наиболее универсальным для решения систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей является метод Крамера [7]: он требует выполнения только одного условия — отличия от нуля определителя этой системы. Однако метод Крамера не считается экономичным: число арифметических операций, необходимых для его реализации, пропорционально величине $n!$ [4], поэтому этот метод обычно не используется в вычислительной практике. В данной работе показано, что благодаря ленточной структуре матрицы системы (1), метод Крамера может быть реализован рекурсивно, при этом, сохраняя свою универсальность, он становится экономичным, подобно методу прогонки.

2. Рекурсивный алгоритм для решения системы (1)

Введем обозначения для следующих определителей ($k = 1, 2, \dots, n-1$):

$$D_k = \begin{bmatrix} b_k & c_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad D_n = b_n, \quad D_{n+1} = 1;$$

$$F_k = \begin{bmatrix} f_k & c_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} & 0 & \dots & \dots \\ f_{k+2} & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ f_n & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad F_n = f_n.$$

Несложно проверить, что для этих определителей справедливы рекуррентные соотношения ($k = 1, 2, \dots, n-1$):

$$D_k = b_k D_{k+1} - c_k a_{k+1} D_{k+2}, \quad (3)$$

$$F_k = f_k D_{k+1} - c_k F_{k+1}. \quad (4)$$

Следующее простое утверждение лежит в основе предлагаемого метода:

Теорема. Если $D_1 \neq 0$, то для любого k величины c_k и D_{k+1} одновременно в ноль не обращаются.

Доказательство. Пусть (от противного) $c_k = D_{k+1} = 0$ для некоторого k . Тогда из (3) следует, что $D_k = 0$, а значит, в силу (3), индуктивно заключаем: $D_{k-1} = 0$, $D_{k-2} = 0, \dots, D_1 = 0$; последнее соотношение противоречит предположению $D_1 \neq 0$, и наше утверждение доказано. $\square$

Условие $D_1 \neq 0$ означает, что система уравнений имеет единственное решение. Именно это условие мы будем в дальнейшем считать выполненным. Кратко опишем предлагаемый метод, как и метод прогонки (метод Гаусса) он состоит из двух этапов (ходов). Прямой ход предлагаемого метода основан на рекуррентном вычислении определителей D_k и F_k по формулам (3) и (4), с учетом соответствующих начальных условий. Обратный ход, в силу теоремы, можно реализовать при помощи различных вариантов условного оператора, например, такого: пусть найдены величины $y_1, y_2, \dots, y_k$; если $D_{k+1} \neq 0$, то используем формулу Крамера для того, чтобы найти y_{k+1} как решение “усеченной системы” (уравнения системы (1), начиная с $k+1$ -го):

$$y_{k+1} = \frac{F_{k+1} - a_{k+1} D_{k+2} y_k}{D_{k+1}}, \quad (5)$$

если же $D_{k+1} = 0$, то определяем неизвестное y_{k+1} из соответствующего уравнения в (1):

$$y_{k+1} = \frac{f_k - a_k y_{k-1} - b_k y_k}{c_k} \quad (6)$$

(в этом случае $c_k \neq 0$).

Таким образом, в соответствии с формулами (3)–(6) получим алгоритм, реализующий предлагаемый метод решения системы (1) (Iterative Cramer’s Algorithm). Для однозначной трактовки команд мы представим его в виде паскалеподобного псевдокода:

ИС-алгоритм.

```

▼ INPUT ( $n; \{a_k\}_{k=2}^n; \{b_k\}_{k=1}^n; \{c_k\}_{k=1}^{n-1}; \{f_k\}_{k=1}^n$ );
begin
 $D_{n+1} = 1; D_n = b_n; F_n = f_n;$ 
for  $k = 1$  to  $n-1$  do
  begin
     $D_{n-k} = b_{n-k}D_{n-k+1} - c_{n-k}a_{n-k+1}D_{n-k+2};$ 
     $F_{n-k} = f_{n-k}D_{n-k+1} - c_{n-k}F_{n-k+1};$ 
  end
 $y_1 = F_1/D_1;$ 
if  $abs(c_1) < abs(D_2)$  then  $y_2 = (F_2 - a_2D_3y_1)/D_2$ 
  else  $y_2 = (f_1 - b_1y_1)/c_1;$ 
for  $k=2$  to  $n-1$  do
  if  $abs(c_k) < abs(D_{k+1})$  then  $y_{k+1} = (F_{k+1} - a_{k+1}D_{k+2}y_k)/D_{k+1}$ 
    else  $y_{k+1} = (f_k - a_ky_{k-1} - b_ky_k)/c_k;$ 
end
OUTPUT ( $\{y_k\}_{k=1}^n$ )▲

```

Как показали численные эксперименты (таблицы 2, 3 и 7), ИС-алгоритм не всегда приводит к желаемому результату: для систем с большим числом уравнений он может накапливать погрешности при рекуррентном вычислении определителей по формулам (3) и (4). Чтобы избежать этого дефекта мы модифицировали алгоритм путем введения в него нормирующих множителей. Умножим k -е уравнение системы (1) на отличный от нуля множитель λ_k , тем самым, изменив коэффициенты и правые части системы, но не изменив ее решения. Применим для решения полученной системы вышеописанный ИС-алгоритм, при этом положим

$$\lambda_k = \frac{1}{|D_{k+1}| + |c_k|}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \lambda_n = 1.$$

Такой выбор нормирующих множителей корректен в силу доказанной нами теоремы. В то же время вопрос об оптимальном выборе нормирующих множителей в предлагаемом методе пока остается открытым и требует дальнейших исследований. В терминах исходной системы (1) новый алгоритм (назовем его модифицированным ИС-алгоритмом) будет выглядеть следующим образом.

МИС-алгоритм. ▼ INPUT ($n; \{a_k\}_{k=2}^n; \{b_k\}_{k=1}^n; \{c_k\}_{k=1}^{n-1}; \{f_k\}_{k=1}^n$);

```

begin
 $D_{n+1} = 1; D_n = b_n; F_n = f_n; \lambda_n = 1;$ 
for  $k = 1$  to  $n-1$  do
  begin
     $\lambda_{n-k} = 1/(|D_{n-k+1}| + |c_{n-k}|);$ 
     $D_{n-k} = (b_{n-k}D_{n-k+1} - c_{n-k}\lambda_{n-k+1}a_{n-k+1}D_{n-k+2})\lambda_{n-k};$ 
     $F_{n-k} = (f_{n-k}D_{n-k+1} - c_{n-k}F_{n-k+1})\lambda_{n-k};$ 
  end
 $y_1 = F_1/D_1;$ 
if  $abs(c_1) < abs(D_2)$  then  $y_2 = (F_2 - \lambda_2a_2D_3y_1)/D_2$ 
  else  $y_2 = (f_1 - b_1y_1)/c_1;$ 
for  $k=2$  to  $n-1$  do
  if  $abs(c_k) < abs(D_{k+1})$  then  $y_{k+1} = (F_{k+1} - \lambda_{k+1}a_{k+1}D_{k+2}y_k)/D_{k+1}$ 

```

```

else  $y_{k+1} = (f_k - a_k y_{k-1} - b_k y_k) / c_k;$ 
end
OUTPUT ( $\{y_k\}_{k=1}^n$ )▲

```

Отметим, что теоретические вопросы устойчивости модифицированного алгоритма (МКС), а именно этот алгоритм для авторов является основным, в настоящей работе не обсуждаются. Это исследование, как видно из работы [10], является достаточно сложным даже для монотонной прогонки, представляет самостоятельный интерес и предполагается в будущем.

3. Результаты численных экспериментов

Проиллюстрируем вычислительные возможности предложенных алгоритмов на серии тестовых задач, одновременно сравнив их с методом монотонной прогонки, который сокращенно будем обозначать как DSM (Double-Sweep Method). Численные эксперименты проведены в среде MatLab, их результаты представлены в таблицах 1–7. В таблицах приведены величины абсолютных погрешностей, вычисленные по формуле

$$\max_{1 \leq k \leq n} |y_k - \bar{y}_k|,$$

где y_k — точное, а $\bar{y}_k$ — приближенное решения соответствующей задачи.

Задача 1:

$$\begin{cases} y_1 = \phi, \\ -y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = 0, & k = 2, 3, \dots, n-1, \\ y_n = \psi. \end{cases} \quad (7)$$

Система уравнений (7) возникает как результат аппроксимации трехточечной разностной схемой простейшей краевой задачи для уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = \phi, \quad y(1) = \psi. \end{cases}$$

Решение системы (7) имеет вид

$$y_k = \frac{\phi(n-k) + \psi(k-1)}{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Легко проверить, что условия (2) для системы (7) выполнены, поэтому метод монотонной прогонки корректен и устойчив, что и подтверждают расчеты, результаты которых приведены в таблице 1. Для этой задачи также эффективны алгоритмы ИС и МКС.

Таблица 1. Задача 1, $\phi = -1$, $\psi = 1$

n	10	10^2	10^3	10^4
DSM	$2 \cdot 10^{-16}$	$5 \cdot 10^{-15}$	10^{-13}	$3 \cdot 10^{-12}$
ИС	$2 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-15}$	10^{-15}	$2 \cdot 10^{-15}$
МКС	$2 \cdot 10^{-16}$	10^{-14}	10^{-12}	$2 \cdot 10^{-11}$

Задача 2:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ (\operatorname{cth}(R) - 1) y_{k-1} - 2 \operatorname{cth}(R) y_k + (\operatorname{cth}(R) + 1) y_{k+1} = 0, & k = 2, 3, \dots, n-1, \\ y_n = 1; \end{cases} \quad (8)$$

$$R = \frac{1}{2\varepsilon(n-1)}.$$

Система (8) является разностной схемой Ильина А.М. (см. [8, 9]), аппроксимирующей сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0, & x \in (0, 1); \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

Решение системы (8) имеет вид

$$y_k = \frac{1 - e^{-(k-1)/\varepsilon(n-1)}}{1 - e^{-1\varepsilon}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Условия (2) для системы (8) выполнены, метод монотонной прогонки корректен и устойчив, что, как и в предыдущем примере, подтверждают результаты расчетов, приведенные в таблице 2. Для этой задачи хорошо работает и МПС-алгоритм, однако ИС-алгоритм начинает накапливать ошибки при достаточно большом числе уравнений в системе.

Таблица 2. Задача 2, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	10	10^2	10^3	10^4
DSM	$2 \cdot 10^{-15}$	$7 \cdot 10^{-15}$	$8 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-11}$
IC	10^{-15}	$2 \cdot 10^{-15}$	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>
MIC	10^{-15}	$6 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-13}$

Задача 3:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = \frac{1}{n-1}, \\ \left[\varepsilon - \frac{(k-1)}{2(n-1)^2} \right] y_{k-1} - 2\varepsilon y_k + \left[\varepsilon + \frac{(k-1)}{2(n-1)^2} \right] y_{k+1} = \frac{k-1}{(n-1)^3}, & k = 2, 3, \dots, n-1, \\ y_n = 2. \end{cases} \quad (9)$$

Система уравнений (9) взята из работы [10] и является разностной схемой для решения задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = x, & x \in (0, 1); \\ \frac{dy}{dx}(0) = 1, \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Решение системы (9) имеет вид

$$y_k = 1 + \frac{k-1}{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Условия (2) для системы (9), вообще говоря, не выполнены: в уравнениях, номера которых удовлетворяют условию $2\varepsilon(n-1)^2 + 1 < k$, не выполнены условия диагонального преобладания. Тем не менее метод монотонной прогонки, как показано в таблице 3, работает хорошо. Метод МИС также эффективен, в отличие от IC-алгоритма, который не работает при достаточно больших n .

Таблица 3. Задача 3, $\varepsilon = 10^{-3}$

n	10	10^2	10^3	10^4
DSM	$2 \cdot 10^{-16}$	$6 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-12}$
IC	10^{-15}	$2 \cdot 10^{-15}$	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>
MIC	$2 \cdot 10^{-16}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$7 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-12}$

Задача 4:

$$\begin{cases} y_1 = \phi, \\ -y_{k-1} + y_k - y_{k+1} = 0, & k = 2, 3, \dots, n-1, \\ y_n = \psi. \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений (10) приведена в монографии [5] как пример системы, для которой алгоритм монотонной прогонки не является корректным. Действительно, при вычислении третьего прогоночного коэффициента в алгоритме возникает операция деления на ноль. Заметим, что для этой системы не выполняются условия (2) диагонального преобладания. В то же время, если $n \neq 3k + 1$ для некоторого целого $k > 0$, то решение системы (10) существует и определяется формулой

$$y_k = \frac{\phi \sin \frac{\pi(n-k)}{3} + \psi \sin \frac{\pi(k-1)}{3}}{\sin \frac{\pi(n-1)}{3}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Результаты, приведенные в таблице 4, показывают полную несостоятельность монотонной прогонки для этого случая, оба метода IC и МИС эффективны.

Таблица 4. Задача 4, $\phi = -5$, $\psi = 10$

n	30	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$
DSM	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>
IC	$2 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-11}$
MIC	$2 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-11}$

Задача 5:

$$\begin{cases} y_1 = \phi, \\ -y_{k-1} + \sqrt{2}y_k - y_{k+1} = 0, & k = 2, 3, \dots, n-1, \\ y_n = \psi. \end{cases} \quad (11)$$

Система уравнений (11) приведена как пример системы, для которой алгоритм монотонной прогонки не является корректным. Действительно, при вычислении четвертого прогоночного коэффициента в алгоритме возникает операция деления на ноль. Заметим, что для этой системы не выполняются условия (2) диагонального преобладания. В то же время, если $n \neq 4k + 1$ для некоторого целого $k > 0$, то решение системы (11) существует и определяется формулой

$$y_k = \frac{\phi \sin \frac{\pi(n-k)}{4} + \psi \sin \frac{\pi(k-1)}{4}}{\sin \frac{\pi(n-1)}{4}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Результаты, приведенные в таблице 5, показывают неэффективность монотонной прогонки для этого случая, оба метода IC и MIC работают корректно.

Таблица 5. Задача 5, $\phi = -1, \psi = 10$

n	40	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$
DSM	0.7	0.7	0.7	0.4
IC	$5 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-11}$
MIC	$2 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-11}$

Задача 6:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = -1, \\ \cos(\pi k/2) y_{k-1} + \cos(\pi k/2) y_k + \sin(\pi k/2) y_{k+1} = (-1)^k, \quad k = 2, 3, \dots, 4m-1, \\ y_{4m-1} + y_{4m} = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Система уравнений (12) распадается на подсистемы размерности 4×4 и не удовлетворяет условиям (2). Ее решение определяется формулой

$$y_k = \cos(\pi k/2), \quad k = 1, 2, \dots, 4m.$$

Как показывают результаты численных экспериментов (таблица 6), система (12) не решается методом монотонной прогонки. Оба алгоритма IC и MIC решают систему (12).

Таблица 6. Задача 6

n	40	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$
DSM	0.5	0.5	0.5	0.5
IC	$4 \cdot 10^{-15}$	$8 \cdot 10^{-14}$	$7 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{-12}$
MIC	$4 \cdot 10^{-15}$	$8 \cdot 10^{-14}$	$7 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{-12}$

Задача 7:

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi \frac{k+1}{4}\right) y_{k-1} - \cos\left(\pi \frac{k}{4}\right) y_k + 2 \sin\left(\pi \frac{k}{3}\right) y_{k+1} \\ = 2 \sin\left(\pi \frac{k}{3}\right) \cos\left(\pi \frac{k+2}{4}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 12m. \end{aligned} \quad (13)$$

Еще одна распадающаяся система с решением, определяемым по формуле

$$y_k = \cos\left(\pi \frac{k+1}{4}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 12m.$$

Система (13) не удовлетворяет условиям (2) и, как показано в таблице 7, не решается методом монотонной прогонки. Алгоритм IC при большом числе уравнений в системе также не является эффективным, MIC метод решает систему (13).

Таблица 7. Задача 7

n	12	120	$12 \cdot 10^2$	$12 \cdot 10^3$
DSM	0.04	0.2	0.2	0.3
IC	$2 \cdot 10^{-15}$	10^{-15}	∞	∞
MIC	10^{-15}	$2 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-15}$

Таким образом, MIC-алгоритм оказался эффективным при решении всех представленных в работе задач, в то время как метод монотонной прогонки имеет ограниченную область применения. IC-алгоритм, как показали численные эксперименты, может приводить к накоплению погрешностей при большом числе уравнений в системе.

Литература

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
6. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. — М.: Наука, 1988.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971.
8. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, вып. 2. — С. 237–248.
9. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.
10. Ильин В.П. Прямой анализ устойчивости метода прогонки // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 189–201.

Поступила в редакцию 02 февраля 2020 г.

После исправления 07 апреля 2020 г.

Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. Vychislitel'nye metody lineinoi algebrы. — М.: Fizmatgiz, 1963.
2. Voevodin V.V. Vychislitel'nye osnovы lineinoi algebrы. — М.: Nauka, 1977.
3. Patankar S. Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti. — М.: Energoatomizdat, 1984.
4. Samarskii A.A., Gulín A.V. Chislennye metody. — М.: Nauka, 1989.
5. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Metody resheniya setochnyh uravnenii. — М.: Nauka, 1978.
6. Marchuk G.I., Sarkisyan A.S. Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana. — М.: Nauka, 1988.

7. **Kurosh A.G.** Kurs vysshei algebry. — M.: Nauka, 1971.
8. **П'ин А.М.** Raznostnaya skhema dlya differentsial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi // Matem. zametki. — 1969. — Т. 6, вып. 2. — S. 237–248.
9. **Dulan E., Miller Dzh., Shilders U.** Ravnornnye chislennye metody resheniya zadach s pogramichnym sloem. — M.: Mir, 1983.
10. **П'ин V.P.** Pryamoi analiz ustoichivosti metoda progonki // Aktual'nye problemy vychislitel'noi matematiki i matematicheskogo modelirovaniya. — Novosibirsk: Nauka, 1985. — S. 189-201.