

5. Stachowiak H. On the effective conductivity of polycrystalline mixtures.— «Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. math.», 1967, vol. 15, N 9.
6. Reynolds J. A., Hough J. H. Formulae for dielectric constants of mixtures.— «Proc. Phys. Soc.», 1957, 70B, pt 7, N 425.
7. Эллиот Р., Крамхаисл Дж., Лис П. Теория и свойства случайно неупорядоченных кристаллов и связанных с ними физических систем.— В кн.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М., «Мир», 1977.
8. Чабан И. А. Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров микронеоднородных сред.— «Акуст. журнал», 1964, т. 10, № 3.
9. Найфэ А. Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
10. Канаун С. К., Яблокова Г. И. Приближение самосогласованного поля в плоской задаче для систем взаимодействующих трещин.— В кн.: Механика стержневых систем и сплошных сред. Вып. 9. Л., 1976.
11. Кунин И. А. Теория дислокаций.— В кн.: Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.
12. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., «Наука», 1973.

УДК 536.2

РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ТОНКОМ ПОЛУПРОЗРАЧНОМ ЦИЛИНДРЕ В СВЕТОВОДНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. С. Юферев

(Ленинград)

Расчет температуры и интенсивности излучения в области, на границе которой возможно многократное отражение и преломление световых лучей, представляет в общем случае сложную и малоисследованную проблему теории сложного теплообмена. Поэтому естественно, что в первую очередь стремятся рассматривать такие модели, которые, не теряя основных черт явления и сохраняя прикладное значение, позволяют уменьшить математические трудности до разумных пределов.

Традиционной задачей лучистого теплообмена является задача о плоском слое, в котором температура и интенсивность излучения изменяются только по его толщине [1, 2]. Другой класс задач возникает при исследовании теплообмена в тонких областях, когда основное изменение температуры происходит, наоборот, вдоль области, а поперек области температуру можно считать практически постоянной. В теории теплопроводности подобный «одномерный» подход известен давно. Однако в теории радиационно-кондуктивного теплообмена он не получил еще должного развития, хотя задачи в такой постановке имеют не только теоретический, но и значительный практический интерес, например при вытягивании полупрозрачных кристаллов из расплава по методу Чохральского или Степанова.

В данной работе рассматривается теплообмен в тонком круговом цилиндре, окруженном цилиндрическим экраном с осесимметричным распределением температуры. Зазор между экраном и цилиндром вакуумирован или заполнен газом, поглощение которого несущественно. Предполагается, что выполняются следующие соотношения:

$$(1) \quad d/z \ll 1, \quad kd \ll 1, \quad a/z \ll 1,$$

где d — диаметр цилиндра; z — его длина, k — коэффициент поглощения; a — расстояние между цилиндром и экраном. Пусть боковая поверхность цилиндра является прозрачной и зеркальной, а коэффициент теплопро-

водности изотропным. Предположим также, что рассеяние отсутствует, а коэффициент поглощения не зависит от температуры и частоты. Одно основание цилиндра (назовем его дном) будем считать горячим и абсолютно черным, а другое — холодным и диффузно-отражающим. Отметим, что при вытягивании кристалла из расплава дно соответствует фронту кристаллизации.

Теперь уравнение теплопроводности и граничные условия для него запишутся в виде

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 4n^2 k \sigma T^4 - k \int_{4\pi} i(x, r, \Omega) d\Omega,$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad T &= T_0, \\ \text{при } x = z \quad T &= T_1; \\ \text{при } r = R \quad \partial T / \partial r &= 0, \end{aligned}$$

где n — коэффициент преломления; σ — постоянная Стефана; i — интенсивность излучения. Краевое условие (3) выглядит несколько необычно. В отличие от соответствующего условия для излучающего непрозрачного цилиндра оно не содержит радиационных членов. Но это является вполне естественным, так как полупрозрачные материалы излучают со всего объема и, следовательно, радиационный перенос энергии учитывается в самом уравнении, а не в граничных условиях.

Интенсивность излучения i определяется уравнением

$$di/ds + ki = n^2 \sigma T^4 / \pi,$$

где s — длина пути вдоль светового луча. При этом в соответствии с указанными выше допущениями

$$i^+ = \frac{n^2 \sigma T_0^4}{\pi} \quad \text{при } x = 0,$$

$$i^- = \frac{\alpha}{2\pi} \int i^+ d\Omega \quad \text{при } x = z,$$

где α — коэффициент отражения.

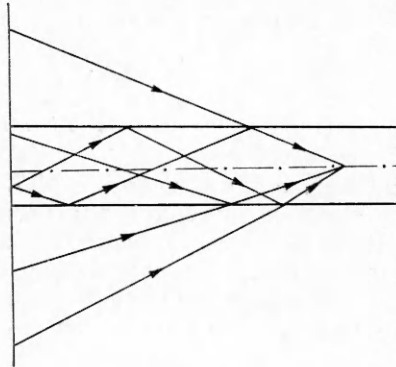
Интенсивность излучения складывается из излучения дна цилиндра i_f , собственно цилиндра i_c , экрана i_e и отраженного от второго холодного основания излучения i_r . Соответственно

$$I = \int_{4\pi} i d\Omega = I_f + I_c + I_e + I_r.$$

Рассмотрим сначала слагаемые I_f и I_c . На фиг. 1 приведены в качестве примера лучи, приходящие в произвольную точку цилиндра из произвольных точек-источников его дна. Для наглядности приемная точка располагается на оси цилиндра, так что все указанные лучи лежат в его меридиональной плоскости. Очевидно, что лучи, идущие от дна и падающие на боковую поверхность цилиндра под углом, меньшим угла полного внутреннего отражения φ_B , уже через несколько отражений выйдут из цилиндра, так что на расстояниях порядка $O(d \operatorname{tg} \varphi_B)$ излучение от дна будет содержать только те лучи, которые испытывают полное внутреннее отражение от боковой поверхности. Аналогичное явление имеет место для излучения самого цилиндра I_c . Та его часть, которая приходит в точку приема под углами, меньшими φ_B , имеет пространственную плотность

излучения порядка $O(d)$. Поэтому для тонкого цилиндра в излучении его дна и самого цилиндра можно учитывать только ту часть энергии, которая распространяется вдоль цилиндра как по световоду.

Чтобы получить выражение для световодной части излучения, целесообразно перейти от рассмотрения многократно отраженных лучей, проходящих в точку приема из точки-источника, к прямым лучам, но идущим уже от точки-изображения этого источника. Тогда в выражении для пространственной плотности излучения можно заменить интегрирование по объему цилиндра и по его основанию интегрированием по расширенной области, охватывающей изображения всех тех точек-источников, лучи из которых, проходя в приемную точку, пересекают боковую поверхность под углом, большим угла φ_B (см. фиг. 1). При этом удобно использовать локальные цилиндрические координаты, связанные с точкой приема.



Ф и г. 1

Пренебрегая вследствие малости диаметра влиянием изменения температуры по сечению цилиндра на интенсивность излучения, получим

$$I_f = 4\sigma n^2 T_0^4 F_1(x, r), \quad I_c = 4\sigma n^2 k \int_0^z F_2(|x - x'|, r) T^4(x') dx',$$

где

$$(4) \quad F_1(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\rho_1(x)} \frac{\exp(-k\sqrt{x^2 + \rho^2})}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} x \rho d\rho;$$

$$(5) \quad F_2(|x - x'|, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\rho_1(|x-x'|)} \frac{\exp(-k\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2})}{(x-x')^2 + \rho^2} \rho d\rho,$$

$$\rho_1(z) = \sqrt{n^2 - 1} \frac{z}{\left(1 - n^2 \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varepsilon\right)^{1/2}}.$$

Видно, что граница области $\rho_1(z)$ сильно зависит от радиальной координаты r приемной точки и при $r > R/n$ существует интервал значений углов ε , при которых $\rho_1(z)$ обращается в бесконечность, что соответствует наличию в световодном излучении лучей с бесконечной длиной пути от точки-источника до приемной точки. Это приводит к существенной неравномерности пространственной плотности излучения по сечению цилиндра, так называемому «краевому эффекту», известному из волоконной оптики [3].

Выполнив в (4) интегрирование по углу ε , получим

$$F_1(x, r) = F_1(x, 0) + \frac{1}{\pi} \int_n^{bn} \frac{\exp(-kxt)}{t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{R}{nr} \sqrt{\frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1}} \right) \right) dt,$$

$$\text{где } F_1(x, 0) = \frac{1}{2} \exp(-kx) - \frac{1}{2} \exp(-knx) - \frac{kx}{2} (Ei(kx) - Ei(knx))$$

— плотность излучения от дна на оси цилиндра;

$$b = \frac{\sqrt{1-r^2/R^2}}{\sqrt{1-n^2r^2/R^2}}; \quad Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

На фиг. 2 для случая $n = 1,75$ (сапфир) приведено распределение $F_1(x, r)$ по сечению цилиндра для нескольких значений kx . Видно, что около боковой поверхности плотность излучения может в 1,5 раза превышать соответствующие значения на оси цилиндра.

Найдем средние по сечению значения F_1 и F_2 . Интегрируя (4), (5) по радиусу и изменяя дважды порядок интегрирования, получим

$$F_{1c}(x) = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\exp(-tkx)}{t^2} (1 - \varphi(t)) dt, \quad F_{2c}(z) = -\frac{1}{k} \frac{dF_{1c}(z)}{dz},$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq n, \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{t}{n} \sqrt{\frac{t^2-n^2}{t^2-1}}\right) + \frac{\sqrt{n^2-1} t \sqrt{t^2-n^2}}{n^2(t^2-1)} \right) & \text{при } t > n. \end{cases}$$

Интересно отметить, что при $n = 1,75$ $F_{1c} = 0,336$ и, следовательно, световодная часть излучения от дна цилиндра составляет 66% от полного излучения, сосредоточенного в полусфере. Можно видеть также, что

$$\lim_{n \rightarrow 1} F_{1c} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{1c} = \frac{1}{2} (e^{-kx} - kxEi(kx)),$$

т. е. равен излучению от бесконечной плоскости.

Чтобы получить одномерное приближение для уравнения (2), проинтегрируем его по сечению цилиндра. Вводя безразмерные переменные (для упрощения записи черта впоследствии опускается)

$$\bar{x} = \frac{x}{z}, \quad \Theta = \frac{T}{T_0}, \quad \bar{I} = \frac{I}{4\sigma n^2 T_0^4}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

и обозначая

$$m = \frac{4\sigma n^2 k T_0^3}{\lambda_0},$$

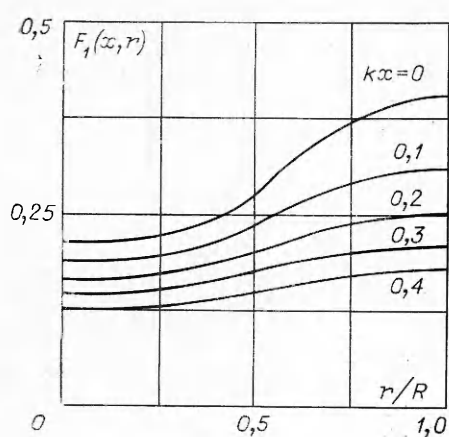
получим уравнение, которое по своей структуре подобно уравнению для плоского слоя

$$(6) \quad \frac{d}{dx} \left(\lambda(\Theta) \frac{d\Theta}{dx} \right) = m \left(\Theta^4 - F_{1c}(x) - k \int_0^1 F_{2c}(|x-x'|) \Theta^4(x') dx' - I_r - I_e \right),$$

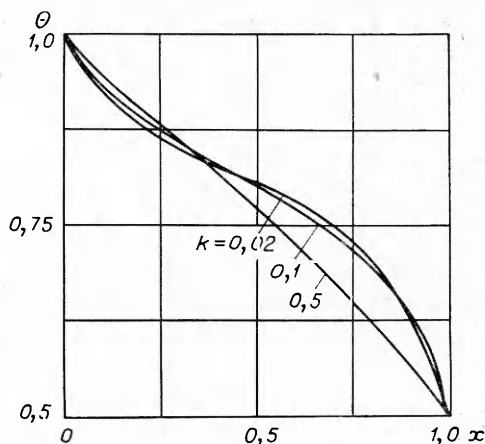
$$\begin{aligned} \text{при } x=0 & \quad \Theta = 1, \\ \text{при } x=1 & \quad \Theta = \Theta_1. \end{aligned}$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо задать излучение от экрана и определить отраженное излучение от холодного конуса цилиндра. Последнее легко найти, принимая во внимание опять только световодную часть отражаемых лучей. Тогда

$$I_r(x) = \alpha F_{1c}(1-x)(I_f + I_c + I_e)|_{x=1}.$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Сложнее обстоит дело с заданием I_e . Строгое его определение сопряжено с большими вычислительными трудностями, связанными с сочетанием преломления и многократного отражения на боковой поверхности цилиндра. Однако в рассматриваемой задаче для излучения экрана можно получить приближенное выражение путем следующего рассуждения.

Пусть цилиндр и экран бесконечно длинные и вся система находится при постоянной температуре T . Тогда, как следует из (6),

$$\Theta^4 - 2F_{1c}(0)\Theta^4 - I_e = 0,$$

т. е. потеря энергии на излучение в произвольном сечении цилиндра компенсируется световодным излучением $2F_{1c}(0)\Theta^4$ и излучением экрана. Откуда

$$(7) \quad I_e = (1 - 2F_{1c}(0))\Theta^4.$$

Принимая во внимание допущения (1), можно, во-первых, пренебречь влиянием цилиндра на излучение экрана, а во-вторых, считать, что экран греет локально. Тогда выражение (7) будет справедливо и в общем случае, если вместо T поставить локальную температуру экрана T_e .

При больших коэффициентах поглощения для световодного потока можно получить приближение Росселанда. Тогда всюду, кроме приграничных областей, уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{d}{dx} \left((\lambda + \lambda_1) \frac{d\Theta}{dx} \right) = m (1 - 2F_{1c}(0)) (\Theta^4 - \Theta_e^4),$$

$$\lambda_1 = 32 \frac{\sigma n^2 T^3}{\pi} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi n} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^4} dt \right).$$

В качестве примера рассматривался сапфировый стержень длиной 10 см. Коэффициент теплопроводности аппроксимировался формулой

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_0 (8,42 - 21,9\Theta + 16,2\Theta^2) & \text{при } \Theta < 0,676, \\ \lambda_0 & \text{при } \Theta \geq 0,676, \end{cases}$$

$$\lambda_0 = 0,01 \text{ кал/с} \cdot \text{см} \cdot \text{град.}$$

Закон изменения температуры экрана принимался линейным

$$\Theta_e = 1 - 0,5x,$$

а T_0 равной температуре плавления сапфира 2326 К. Ввиду отсутствия для сапфира данных о величине коэффициента поглощения при столь высоких температурах расчеты были выполнены при $k = 0,02; 0,1; 0,5$. Результаты расчетов представлены на фиг. 3.

Автор выражает благодарность Э. А. Тропцу за полезные обсуждения в процессе выполнения данной работы.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев О. А., Мень А. А. Теплофизические свойства полупрозрачных материалов. М., Изд-во стандартов, 1977.
2. Оцисик М. И. Сложный теплообмен. М., «Мир», 1976.
3. Саттаров Д. К. Волоконная оптика. Л., «Машиностроение», 1973.

УДК 536.24

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Л. К. Мартинсон

(Москва)

Рассмотрим нелинейный процесс теплопереноса в среде с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону. При наличии в среде объемного поглощения тепла, мощность которого зависит от температуры, такой процесс описывается [1] квазилинейным параболическим уравнением

$$(1) \quad \partial u / \partial t = \operatorname{div} (u^\sigma \operatorname{grad} u) - \psi(u), \quad \sigma > 0.$$

Характерной особенностью такого нелинейного процесса переноса является конечная скорость распространения тепловых возмущений [2, 3]. Это означает, что возмущение от источника распространяется в среде в виде тепловой волны, фронт которой перемещается по невозмущенному фону с конечной скоростью. При наличии в среде объемного поглощения тепла, зависящего от температуры ($\psi \neq 0$), в таком процессе может наблюдаться нелинейный эффект пространственной локализации теплового возмущения, когда даже за бесконечный промежуток времени возмущение проникает в среду лишь на конечное расстояние [4, 5].

В данной работе исследуется особый режим локализации теплового возмущения, когда в процессе движения скорость фронта тепловой волны изменяет свое направление.

Рассмотрим задачу о влиянии мгновенного точечного источника тепла мощности Q , помещенного в нелинейную среду при наличии объемного поглощения тепла, зависящего от температуры степенным образом ($\psi(u) = \gamma u^\nu$, $\gamma = \text{const}$, $\nu = 1 - \sigma$, $\sigma < 1$). В этом случае задача о рас-