

С. В. Сухинин

ЭФФЕКТ ВОЛНОВОДА ОДНОМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ СТРУКТУРЫ

В работе исследованы волноведущие свойства проницаемых одномерно-периодических акустических структур. Волноведущие свойства связаны с существованием собственных волн, локализованных в окрестности структуры. Их свойства описываются обобщенными собственными функциями, которые являются решениями задач, описывающих установившиеся колебания около структуры. В работе показана возможность существования обобщенных собственных функций, локализованных в окрестности одномерно-периодического проницаемого слоя или около периодической цепочки проницаемых препятствий. Приведены примеры волноведущих проницаемых периодических структур, для которых исследованы асимптотические по малой проницаемости или по специальной геометрической форме границы, свойства собственных колебаний и определены собственные значения. Эти примеры могут служить модельными как для экспериментальных, так и для численных исследований волноведущего свойства периодической проницаемой структуры.

1. Формулировка задач и необходимые сведения. Пусть пространство заполнено средой, в которой скорость звука c_2 , плотность в состоянии покоя ρ_2 . В этой среде находится либо одномерно-периодический слой (рис. 1, а), либо цепочка включений (рис. 1, б) другой среды, скорость звука в которой c_1 , плотность в состоянии покоя ρ_1 . Предполагается, что граница между этими средами периодична вдоль оси y с периодом 2π . Считается, что все движения в средах зависят только от двух пространственных переменных: x, y . Поэтому удобно использовать обозначения: Ω_1 — область на плоскости (x, y) , которая моделирует слой или цепочку включений, Ω_2 моделирует область, заполненную внешней средой, Γ — граница между этими средами (см. рис. 1).

Пусть $f(x, y) \exp(-i\omega t)$ описывает периодические источники звука. Предполагается, что источники находятся в среде Ω_2 , расположены периодически вдоль оси y с периодом 2π , ω — круговая частота колебаний. Звуковые волны описываются акустическими возмущениями давления $p_1(x, y, t)$ и $p_2(x, y, t)$ в слое и во внешней среде, а установившиеся акустические колебания — функциями $\operatorname{Re}[p_1(x, y) \exp(-i\omega t)]$ и $\operatorname{Re}[p_2(x, y) \times \exp(-i\omega t)]$, $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$ должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях и быть комплекснозначными:

$$(1.1) \quad (\Delta + \lambda^2 \kappa^2)p_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2)p_2 = f \text{ в } \Omega_2$$

($\lambda = \omega/c_2$, $\kappa = c_2/c_1$, Δ — оператор Лапласа). Источники локализованы около внутренней структуры. Это означает, что $f(x, y) \equiv 0$ для достаточно больших значений переменной x .

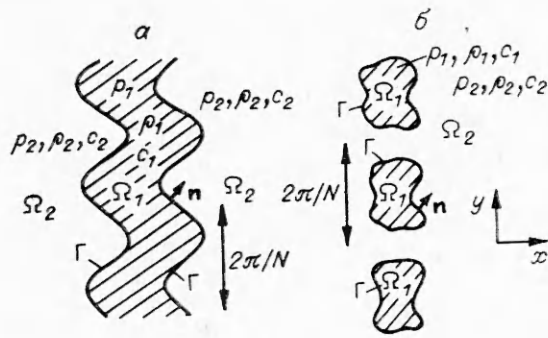
На границе контакта сред должны быть выполнены условия непрерывности давления и нормальной к границе составляющей скорости частиц газа, \mathbf{n} — нормаль к Γ (см. рис. 1):

$$(1.2) \quad p_1 = p_2, \quad \rho_2 \partial p_1 / \partial \mathbf{n} = \rho_1 \partial p_2 / \partial \mathbf{n} \text{ на } \Gamma.$$

Так как c_1, ρ_1 и c_2, ρ_2 постоянны в соответствующих областях, а источники $f(x, y)$ и граница контакта сред 2π -периодичны вдоль оси y , то акустические поля, описываемые функциями p_1 и p_2 , также будут 2π -периодичны вдоль оси y . Решение уравнений (1.1) должно удовлетворять условиям излучения [1—3]

$$(1.3) \quad p_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{\pm} \exp(iky + i|x| \sqrt{\lambda^2 - k^2}), \quad |x| \gg 1$$

(a_k^+ и a_k^- — некоторые комплексные числа (если $x > 0$, то берется a_k^+ , если $x < 0$, то a_k^-), k — произвольное целое число, характеризующее номер моды).



Р и с. 1

Далее задача (1.1)–(1.3) для нахождения акустического поля, описываемого функциями p_1 и p_2 , по известному распределению источников колебаний $f(x, y)$ будет называться задачей В (волновод). Задача В представляет собой математическую модель, описывающую рассеяние акустических волн от периодических источников на одномерно-периодической структуре. Целесообразно ис-

следовать корректность этой модели, существование и единственность решений.

Волноведущие свойства физической структуры определены собственными значениями и собственными функциями задачи В. Исследование свойств математической модели ведется при помощи аналитических операторозначных функций, этот подход позволяет использовать теорию функций комплексного переменного. Необходимо отметить, что в теории дифракции на бесконечных проницаемых структурах правильное понимание математической сущности задач имеет большое значение и для разработки эффективных приближенных методов. Следуя [1–3], можно считать, что функция от параметра λ , выраженная соотношением (1.3), есть аналитическая на бесконечнолистной поверхности Римана Λ — ее аналитического продолжения.

В дальнейшем изложении будет использовано

О п р е д е л е н и е 1.1. Квазисобственным значением задачи В называется такой элемент λ_* римановой поверхности Λ , для которого решение этой задачи неединственно или существует нетривиальное решение однородной задачи ($f \equiv 0$). Ее собственным значением называется такое квазисобственное значение λ_* , для которого выполняются соотношения $(\operatorname{Re} \lambda_*) (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda_*^2 - k^2}) \geq 0$ для всех целых чисел k , если $a_k^+ \neq 0$ или $a_k^- \neq 0$ в условиях излучения (1.3).

Понятие квазисобственных значений носит вспомогательный характер, физический смысл их до конца не ясен. Собственные значения и собственные функции описывают волноведущее свойство структуры и являются, вообще говоря, обобщенными собственными функциями, так как энергия этих колебаний может быть неограниченной, если ее вычислять во всей области колебаний.

Качественное поведение квазисобственных значений описывает следующее утверждение [1–4]:

Теорема 1.1. Квазисобственные значения задачи В дискретны на поверхности Римана Λ . Если область Ω_2 связна, то собственные значения могут быть только вещественными числами.

Лемма 1.1. Решение задачи В единственно, если $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$ для всех k .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если умножить однородные ($f \equiv 0$) соотношения (1.1) на комплексно-сопряженную к p_1 и p_2 функцию \bar{p}_1 и \bar{p}_2 и проинтегрировать по Ω_1 и Ω_2 , то при помощи теоремы Грина можно получить соотношения

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^2 \kappa^2 |p_1|^2 - |\nabla p_1|^2) d\Omega_1 + \int_{\Gamma} \bar{p}_1 (\partial p_1 / \partial n) d\Gamma = 0,$$

$$\int_{\Omega_2} (\lambda^2 |p_2|^2 - |\nabla p_2|^2) d\Omega_2 - \int_{\Gamma} \bar{p}_2 (\partial p_2 / \partial n) d\Gamma = 0.$$

Пусть $\tau = \rho_1 / \rho_2$, $\tau > 0$ и $\sigma = \rho_2 / \rho_1$, $\sigma > 0$, тогда, умножая второе соот-

ношение на τ (или первое на σ) и складывая первое равенство со вторым с учетом условий сопряжения (1.2) можно получить тождество

$$I = \int_{\Omega_1} (\lambda^2 \kappa^2 |p_1|^2 - |\nabla p_1|^2) d\Omega_1 + \tau \int_{\Omega_2} (\lambda^2 |p_2|^2 - |\nabla p_2|^2) d\Omega_2 \equiv 0.$$

Приравняв мнимую часть к нулю, запишем

$$(1.4) \quad \text{Im } I = (\text{Im } \lambda^2) \left(\int_{\Omega_1} \kappa^2 |p_1|^2 d\Omega_1 + \tau \int_{\Omega_2} |p_2|^2 d\Omega_2 \right) = 0.$$

Отсюда $p_1 \equiv 0$ и $p_2 \equiv 0$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Физический смысл леммы 1.1 в том, что показано несуществование свободных колебаний около периодической структуры в среде с поглощением. Аналогичные (1.4) соотношения можно получить и для отношения плотностей σ . Если плотность одной из сред равна бесконечности по сравнению с другой ($\tau = 0$, если $\rho_2 \rightarrow \infty$, или $\sigma = 0$, если $\rho_1 \rightarrow \infty$), то отсутствие свободных колебаний в среде с поглощением следует из (1.4) и условий сопряжения (1.2). Все вычисления проведены для одного периода по y .

Пусть $\Phi(x, y, x_0, y_0, \lambda)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (1.1) в области Ω_2 , удовлетворяющее условиям излучения (1.3) и условиям периодичности по y с периодом 2π [1—4]. Далее используем обозначения: $\psi = f * \Phi$, * означает свертку, $v = p - \psi$, $p = p_1$, если $(x, y) \in \Omega_1$ и $p = p_2$, если $(x, y) \in \Omega_2$. Для функции v в силу соотношений (1.1) и (1.2) выполнены равенства

$$(1.5) \quad (\Delta + \lambda^2)v_1 = \lambda^2(1 - \kappa^2)(v_1 + \psi) \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2)v_2 = 0 \text{ в } \Omega_2, \\ v_1 = v_2, \quad \partial v_1 / \partial \mathbf{n} = \tau \partial v_2 / \partial \mathbf{n} + (\tau - 1) \partial \psi / \partial \mathbf{n} \text{ на } \Gamma$$

(v_1 и v_2 — сужение функции v на области Ω_1 и Ω_2). Так как ψ и p удовлетворяют условиям излучения (1.3), то v также удовлетворяет этим условиям.

Если искать решение (1.5) в виде суммы объемного потенциала и потенциала простого слоя с плотностями $\rho(x, y)$ и $v(x, y)$, ρ локализована в Ω_1 , v определена на Γ , то функцию $v(x, y)$ можно представить в виде [4]

$$(1.6) \quad v(x, y) = \int_{\Gamma_0} v(x_0, y_0) \Phi(x, y, x_0, y_0) d\Gamma_0 + \int_{\Omega_1^0} \rho(x_0, y_0) \Phi(x, y, x_0, y_0) d\Omega_1^0.$$

Здесь и далее все функции исследуются в одном периоде, например, в полосе $\{0 \leq y \leq 2\pi\}$, $\Omega_j^0 = \{0 \leq y \leq 2\pi\} \cap \Omega_j$, $j = 1, 2$, $\Gamma_0 = \{0 \leq y \leq 2\pi\} \cap \Gamma$ (см. рис. 1).

Условия излучения для функции $v(x, y)$ выполнены в силу (1.6). Для неизвестных функций ρ и v справедливы в силу (1.5) уравнения

$$(1.7) \quad v = 2 \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right) \left[\int_{\Gamma_0} v (\partial \Phi / \partial \mathbf{n}) d\Gamma_0 + \int_{\Omega_1^0} \rho (\partial \Phi / \partial \mathbf{n}) d\Omega_1^0 + \partial \psi / \partial \mathbf{n} \right], \\ \rho = \lambda^2 (1 - \kappa^2) \left[\int_{\Gamma_0} v \Phi d\Gamma_0 + \int_{\Omega_1^0} \rho \Phi d\Omega_1^0 + \psi(x, y) \right].$$

Имеет место [4, 5]

Лемма 1.2. Если v и ρ удовлетворяют (1.7), то решение задачи В $p = v + \psi$, где v определено (1.6), а ψ — свертка фундаментального решения Φ с функцией f , описывающей источник акустических колебаний. Если $p(x, y)$ — решение задачи В, то $p = v + \psi$ и отвечающие v и ψ функции v и ρ удовлетворяют соотношениям (1.7), которые запишем как $(v, \rho) = T(\lambda, \tau, \kappa) \langle (v, \rho) \rangle (T(\lambda, \tau, \kappa) — соответствующий (1.7) линейный оператор в пространстве Гильберта H , $H = L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Omega_1^0)$).$

При помощи [5], леммы 1.1 и леммы 1.2 доказана

Лемма 1.3. Оператор $T(\lambda, \tau, \kappa): H \rightarrow H$, определенный (1.7), аналитически зависит от параметра λ на поверхности Римана Λ и непрерывно зависит от вещественных параметров τ и κ , $0 \leq \tau < 1$, $\kappa^2 \neq 1$ в сильной операторной норме. Имеется элемент λ_* поверхности Римана Λ , для которого решение (1.7) существует и единственно для всех значений параметров τ , $0 \leq \tau < 1$, и κ , $\kappa^2 \neq 1$.

Для дальнейшего изложения понадобится

Теорема 1.2. Если отношение $\rho_1/\rho_2 = \tau$ стремится к нулю ($\tau \rightarrow 0$), то для достаточно малых τ квазисобственные значения $\lambda_*(\tau)$ задачи В существуют и сходятся в топологии поверхности Римана Λ либо к ν_* , если $\nu_*^2 \kappa^2$ — собственное значение оператора Лапласа в области Ω_1 для функций, удовлетворяющих условиям 2π -периодичности по y и однородным условиям Неймана на границах Γ этой области ($\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_*(\tau) = \nu_*$), либо к квазисобственным значениям μ_{ext} задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области Ω_2 ($\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_*(\tau) = \mu_{\text{ext}}$).

Если отношение $\rho_2/\rho_1 = \sigma$ стремится к нулю ($\sigma \rightarrow 0$), то для достаточно малых σ квазисобственные значения $\lambda_*(\sigma)$ задачи В существуют и сходятся к μ_* ($\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lambda_*(\sigma) = \mu_*$), если $\mu_*^2 \kappa^2$ — собственное значение оператора Лапласа в области Ω_1 с условиями Дирихле на Γ и условиями 2π -периодичности для собственных функций, либо к квазисобственным значениям ν_{ext} задачи Неймана в области Ω_2 ($\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lambda_*(\sigma) = \nu_{\text{ext}}$).

Доказательство. В силу леммы 1.3 выполнены условия теоремы 7.2 [5, с. 381]. Поэтому можно считать, что квазисобственные значения λ_* задачи В непрерывно зависят от параметра τ , $0 \leq \tau < 1$. В том случае когда $\tau = 0$, соотношения (1.7) эквивалентны задаче вида

$$(1.8) \quad (\Delta + \lambda^2 \kappa^2) p_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2) p_2 = f \text{ в } \Omega_2,$$

$$p_1 = p_2, \quad \partial p_1 / \partial \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Функции f , p_1 и p_2 удовлетворяют условиям периодичности, а p_2 , кроме этого, — условиям излучения. Так как для функции p_1 соотношения (1.8) представляют собой задачу Неймана в области Ω_1 с условиями 2π -периодичности по y для решений, а для функции p_2 — задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в Ω_2 с условиями излучения на бесконечности, то при τ , близком к нулю, в силу непрерывности от τ соответствующие задаче В квазисобственные значения близки либо к ν_* , либо к μ_{ext} . Вторая часть теоремы о непрерывной зависимости от параметра σ , $0 \leq \sigma < 1$, квазисобственных значений задачи В обосновывается аналогичными рассуждениями. Теорема доказана.

Пусть исследуемая пронизываемая структура Ω_1 с границей Γ имеет период $2\pi/N$, N — натуральное число больше единицы. В этом случае, если $p_*(x, y)$ есть квазисобственная функция задачи В, $p_*(x, y + 2\pi n/N)$ также будет квазисобственной функцией задачи В для всех целых чисел n , N . Пусть $u(y)$ — 2π -периодическая по y функция, разложение в ряд Фурье которой для любого натурального числа N запишем как

$$u(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(iky) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n+kN} \exp[iy(n+kN)] = \sum_{n=1}^N u_n(y).$$

В силу определения функции $u_n(y)$ удовлетворяют условиям квазипериодичности

$$(1.9) \quad u_n(y + 2\pi/N) = u_n(y) \exp(i2\pi n/N).$$

Заметим, что эти соотношения описывают специфику колебаний около $2\pi/N$ -периодической структуры. Обычно говорят, что (1.9) описывает сдвиг фазы колебаний в соседних областях структуры.

Пусть $p_n(x, y)$ — решение задачи В, для которого справедливы условия квазипериодичности (1.9), тогда условия излучения имеют форму

$$(1.10) \quad p_n(x, y, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\pm} \exp [i(n + kN)y + i|x| \sqrt{\lambda^2 - (n + kN)^2}].$$

Функции от λ вида (1.10) аналитические на поверхности Римана Λ_n их аналитического продолжения. Точками ветвления Λ_n будут числа $\pm(n + kN)$ для всех целых k . Пусть Λ_n^0 — такой лист поверхности Римана Λ_n с разрезами $(-\infty, -\min\{n, N - n\}]$ и $[\min\{n, N - n\}, +\infty)$, на котором выполнены неравенства для всех целых k : $\text{Im} \sqrt{\lambda^2 - (n + kN)^2} > 0$. Для дальнейшего изложения необходима важная для приложений

Теорема 1.3. Если квазисобственная функция $p^*(x, y, \lambda_*)$ задачи В удовлетворяет условиям квазипериодичности (1.9) и соответствующее квазисобственное значение λ_* находится на листе Λ_n^0 поверхности Римана Λ_n , то $p^*(x, y)$ убывает при удалении от препятствия и является собственной функцией, а λ_* — вещественным собственным значением задачи В.

Доказательство. В силу определения листа Λ_n^0 все слабые выражения (1.10) для функции $p^*(x, y)$ убывают при удалении от препятствия Ω_1 . Из соотношения вида (1.4) для $p^*(x, y)$ следует, что λ_* — вещественное число. Так как $\lambda_* \in \Lambda_n^0$, то $|\lambda_*| < \min\{n, N - n\}$, значит, $\text{Re} \sqrt{\lambda_*^2 - (n + kN)^2} = 0$ для всех целых k . Что и требовалось доказать.

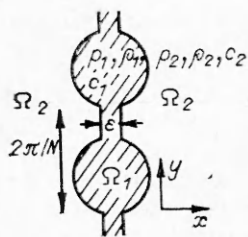
2. Эффект волновода проникаемого слоя. Пусть область Ω_1 моделирует проникаемый слой (см. рис. 1, а). Предполагается, что Ω_1 периодична вдоль оси y с периодом $2\pi/N$. Для различных прикладных вопросов целесообразно исследовать квазипериодические решения задачи В для некоторых чисел n и N , $1 \leq n < N$, из условия (1.9). Пусть скорость c_1 распространения волн в среде, заполняющей слой Ω_1 , меньше, чем скорость c_2 распространения волн в среде Ω_2 , $\kappa = c_2/c_1 > 1$. Тогда справедлива

Теорема 2.1. Для достаточно большого κ и достаточно малого τ (или σ) слой Ω_1 обладает эффектом волновода.

Доказательство. Пусть $v_k^2 \kappa^2$ — собственные значения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области Ω_1 в классе функций, удовлетворяющих условиям квазипериодичности (1.9) для некоторых n и N и $|v_1| \leq |v_2| \leq \dots$. В силу теоремы 1.2 для каждого фиксированного k существуют квазисобственные значения λ_k задачи В с условиями квазипериодичности такие, что имеет место предельный переход в топологии поверхности Римана Λ_n $v_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_k(\tau)$. Так как κ может быть достаточно

большим числом, то существуют такие v_k , по крайней мере одно число, для которых справедливо неравенство $|v_k| < \min\{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$. Соответствующие v_k квазисобственные значения λ_k задачи В близки к v_k , значит, для достаточно малых τ справедливо неравенство $|\lambda_k| < \min\{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$. Поэтому можно считать, что для достаточно малых τ квазисобственные значения λ_k , $k = 1, \dots, k_0$, принадлежат листу Λ_n^0 поверхности Римана Λ_n . Из теоремы 1.3 следует, что λ_k — вещественные собственные значения задачи В, а отвечающие λ_k собственные функции локализованы в окрестности проникаемого слоя Ω_1 , $k = 1, \dots, k_0$. Пусть $\mu_k^2 \kappa^2$ — собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω_1 в классе функций, удовлетворяющих условиям квазипериодичности (1.9) для некоторых фиксированных N и n ; k_0 , n и N — натуральные числа. В силу теоремы 1.2 существуют квазисобственные значения λ_k задачи В с условиями квазипериодичности такие, что $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lambda_k(\sigma) = \mu_k$

в топологии поверхности Римана Λ_n . Для любой фиксированной геометрии Ω_1 и фиксированных n и N существует такое достаточно большое число κ , что для некоторых k , $k = 1, \dots, k_0$, выполнено неравенство $|\mu_k| < \min\{n, N - n\}$. Поэтому для достаточно малых σ соответствующие μ_k квазисобственные значения λ_k , $k = 1, \dots, k_0$, принадлежат листу Λ_n^0



Р и с. 2

поверхности Римана Λ_n . В силу теоремы 1.3 эти квазисобственные значения собственные и вещественные. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Здесь и далее, согласно Р. М. Гарипову, под эффектом волновода одномерно-периодической проницаемой структуры понимается существование обобщенных собственных функций, локализованных в ее окрестности.

З а м е ч а н и е 2.2. Если квазисобственная функция задачи В локализована в окрестности структуры Ω_1 , то соответствующие квазисобственные значения являются собственными значениями и вещественными числами.

Пусть слой Ω_1 имеет форму, показанную на рис. 2, и удовлетворяет условиям $2\pi/N$ -периодичности вдоль оси y , c_1 и c_2 фиксированные, ϵ — поперечный размер перетяжки. В этом случае справедлива

Теорема 2.2. Слой Ω_1 , описанный на рис. 2, для достаточно малых τ и ϵ обладает эффектом волновода.

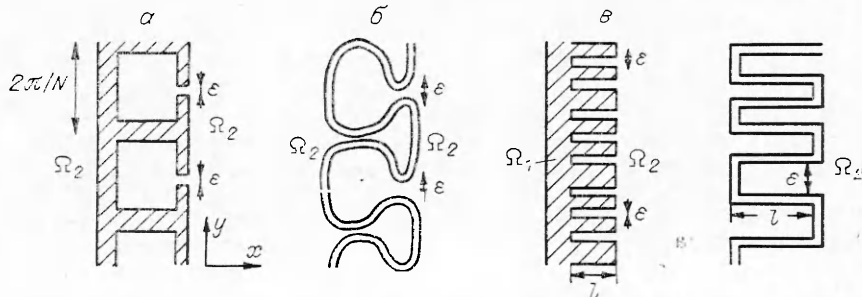
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi_k = v_k^2 x^2$ — собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в области Ω_1 в классе функций, удовлетворяющих условиям квазипериодичности (1.9). Для достаточно малых ϵ существуют [5] ξ_k , которые близки к собственным значениям задачи Неймана для уравнения Лапласа в конечных подобластях Ω_1 , получающихся из Ω_1 при $\epsilon = 0$. Так как нуль — собственное значение задачи Неймана, то для достаточно малых ϵ всегда имеется по крайней мере одно (или несколько) ξ_k , $k = 1, \dots, k_0$, таких, что $|v_k| < \min \{n, N - n\}$. В силу теоремы 1.2 существуют квазисобственные значения λ_k задачи В такие, что $v_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_k(\tau)$, поэтому для достаточно малых τ можно считать, что $\lambda_k(\tau)$, $k = 1, \dots, k_0$, находятся на листе Λ_n^0 поверхности Римана Λ_n . Следовательно, условия теоремы 1.3 выполнены, что и требовалось доказать.

Теоремы 2.1 и 2.2 связаны с «внутренней» геометрией области Ω_1 , которую «учитывают» собственные значения задачи Дирихле или Неймана для оператора Лапласа в области Ω_1 . Следующая ниже теорема связана с «внешними» свойствами области Ω_1 .

Пусть слой Ω_1 имеет геометрию, показанную на рис. 3, $a-v$, период Ω_1 вдоль оси y равен $2\pi/N$, c_1 и c_2 — некоторые произвольные фиксированные числа, ϵ — ширина горла резонатора в случаях a и b рис. 3 или поперечный размер полукрытого канала (рис. 3, v). Имеет место

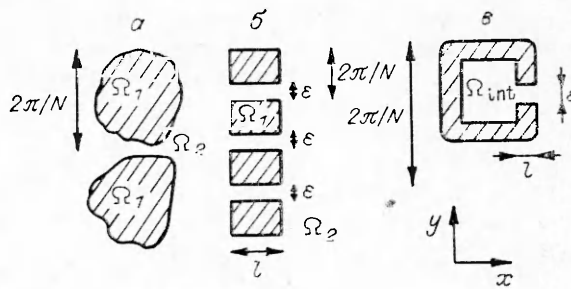
Теорема 2.3. Слой Ω_1 рис. 3 для достаточно малых σ и ϵ обладает эффектом волновода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1.2 для достаточно малой σ квазисобственные значения λ_k задачи В близки к квазисобственным значениям v_k задачи Неймана в области Ω_2 . Для достаточно малых ϵ величины v_k близки в топологии поверхности Римана Λ_n к соответствующим числам, описывающим собственные колебания в резонаторе ($\epsilon = 0$), или в горле резонатора, или в полукрытом канале [2]. Для произвольных n и N ,



Р и с. 3

$1 \leq n < N$, для достаточно малых ε и σ , $l \gg 1$ справедливо неравенство $|\lambda_k| < \min \{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$. Можно считать, что для малых ε и σ все λ_k , $k = 1, \dots, k_0$, находятся на листе Λ_n^0 поверхности Римана Λ_n . Условия теоремы 1.3 для квазисобственных значений λ_k , $k = 1, \dots, k_0$, задачи В выполнены, теорема 2.3 доказана.



Р и с. 4

3. Эффект волновода разрывной периодической структуры. Пусть Ω_2 — связная область. В этом случае Ω_1 имеет несколько связных компонент в 2π -периоде и описывает периодическое включение среды 1 в среду 2 (рис. 4, а—в). Используются обозначения: Ω_ε — канал или отверстие, Ω_{int} — внутренность резонаторов ($\varepsilon = 0$) (рис. 4, в), Ω_{ext} — внешность резонаторов, $\Omega_2 = \Omega_{\text{int}} + \Omega_\varepsilon + \Omega_{\text{ext}}$. На рис. 4, а $\Omega_{\text{int}} = \emptyset$, $\Omega_\varepsilon = \emptyset$, $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_2$, 4, б — $\Omega_{\text{int}} = \emptyset$, $\Omega_2 = \Omega_\varepsilon + \Omega_{\text{ext}}$.

Пусть область Ω_1 состоит из N связных компонент в полосе $0 \leq y \leq 2\pi$ и, кроме того, она предполагается периодической вдоль оси y с периодом $2\pi/N$. Имеет место

Теорема 3.1. *Разрывная одномерно-периодическая структура Ω_1 для достаточно малых τ обладает эффектом волновода.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 существуют квазисобственные значения λ_k задачи В с условиями (1.9) такие, что $\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_k(\tau) = \nu_k$, если $\xi_k = \nu_k^2 \kappa^2$ — собственное значение оператора Лапласа в одной из связных компонент области Ω_1 с условиями Неймана на границах этой области. Пусть ξ_k , $k = 1, \dots, k_0$, — такие собственные значения, для которых справедливо неравенство $|\nu_k| < \min \{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$. Тогда для достаточно малых τ имеется неравенство $|\lambda_k| < \min \{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$, для некоторого числа n , $1 \leq n < N$. Поэтому для чисел λ_k выполнены условия теоремы 1.3, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3.1. Так как нуль — собственное значение оператора Лапласа с условиями Неймана на границах Ω_1 , то для любого κ существует хотя бы одно число λ_k такое, что $|\lambda_k| < \min \{n, N - n\}$ для всех достаточно малых τ .

Пусть цепочка проницаемых препятствий имеет вид б и в рис. 4. Величины ε и l характеризуют ширину и длину каналов Ω_ε . Справедлива

Теорема 3.2. *Одномерно-периодическая цепочка проницаемых препятствий Ω_1 (см. рис. 4, б, в) для больших l и достаточно малых σ и ε обладает эффектом волновода.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 для малых σ квазисобственные значения λ_k задачи В близки к квазисобственным значениям ξ_k задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области Ω_2 . Квазисобственные значения ξ_k задачи Неймана в Ω_2 в силу [2] для достаточно малых ε близки к числам ν_k , если ν_k^2 — собственные значения задачи Неймана для оператора Лапласа в области Ω_{int} (см. рис. 4, в) или $\nu_k = k\pi/l$ (б, в). В последнем случае ν_k описывают собственные колебания в канале Ω_ε . Пусть ν_k , $k = 1, \dots, k_0$, такие числа, что $|\nu_k| < \min \{n, N - n\}$, тогда для достаточно малых ε и σ квазисобственные значения $\lambda_k(\varepsilon, \sigma)$ задачи В удовлетворяют неравенству $|\lambda_k| < \min \{n, N - n\}$, $k = 1, \dots, k_0$. И в том случае для задачи В справедливы условия квазипериодичности (1.9), выполнены условия теоремы 1.3. Поэтому можно считать, что λ_k принадлежит листу Λ_n^0 поверхности Римана Λ_n , что и требовалось доказать.

Изучение волноведущих свойств различных структур имеет важное прикладное значение. Однако работы, в которых содержится исследование волноведущих свойств одномерно-периодических проницаемых структур,

автору неизвестны. Исследования волноведущих свойств структур, однородных по одному из переменных параметров, содержатся в [6]. Дальнейшее развитие эти исследования получили в [7, 8].

4. Пример. Волноведущее свойство цилиндрических воздушных полостей в алюминии. Пусть структура на рис. 4, б описывает цилиндрические воздушные полости в алюминии: $c_1 = 330$ м/с, $c_2 = 5200$ м/с и $\kappa = 15,7$, плотности $\rho_1 = 1,21$ кг/м³, $\rho_2 = 2700$ кг/м³, тогда $\tau = 0,00045$. Заметим, что значения параметров удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Поэтому можно приблизительно вычислить собственные значения этой структуры. Пусть все цилиндрические полости периодичны вдоль оси y и имеют одинаковый радиус R , расстояния между центрами полостей H ($H > 2R$ — полости не касаются). Если на размере одной длины волны вдоль оси y содержится N полостей, то длина волны $L = NH$. Условия излучения (1.3) запишем как

$$(4.1) \quad p_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{\pm} \exp [(iy2k\pi/NH) + i|x| \sqrt{\lambda^2 - (2\pi k/NH)^2}]$$

($\lambda = \omega/5200$). Собственные значения ξ_k оператора Лапласа в круге радиуса R с условиями Неймана на границе можно найти по таблицам [9]. Тогда $\xi_0 = 0$; $\xi_1 R = 3,832$; $\xi_2 R = 7,016$; $\xi_3 R = 10,173$; $\xi_1 = R^{-1} \cdot 3,832$; $\xi_2 = R^{-1} \cdot 7,016$; $\xi_3 = R^{-1} \cdot 10,173$. При помощи соотношения $\xi_k = v_k^2 \kappa^2$, приведенного в доказательстве теоремы 3.1, можно вычислить $v_k = \sqrt{\xi_k \kappa^{-2}}$. Следовательно, $v_0 = 0$; $v_1 = 0,1247/\sqrt{R}$; $v_2 = 0,169/\sqrt{R}$; $v_3 = 0,203/\sqrt{R}$. Так как в силу теоремы 3.1 $\lambda_k(\tau) \rightarrow v_k$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\lambda = \omega/c_2$, то вычисляем круговую частоту $\omega_k = \lambda_k c_2$; $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = 648,4/\sqrt{R}$; $\omega_2 = 878,8/\sqrt{R}$; $\omega_3 = 1055,6/\sqrt{R}$. Если $R = 0,005$ м, то резонансные частоты равны $\omega_1 = 9169,7$; $\omega_2 = 12428$; $\omega_3 = 14928$. Пусть для удобства вычислений и экспериментальной проверки расстояние между центрами отверстий $H = 0,02$ м. Предположим также, что колебания в соседних отверстиях находятся в противофазе, в этом случае в (1.9) можно принять $N = 2$, $n = 1$. Согласно доказательству теоремы 3.1, собственные значения должны удовлетворять неравенству, которое следует из (4.1):

$$|\lambda_k| < \min \{n\pi/H, N\pi/H - n\pi/H\} = 157,0,$$

$$v_1 = 0,1247/\sqrt{0,0005} = 1,763, v_2 = 2,39, v_3 = 2,87.$$

Так как $\lambda_k \rightarrow v_k$ при $\tau \rightarrow 0$, заметим, что все найденные частоты могут обуславливать возможное волноведущее свойство структуры. Для удобства эксперимента можно вычислить приближенно скорости распространения собственных мод вдоль оси y . В этих случаях волновое число равно π/H , а скорость распространения v_k соответствующей собственной моды $v_k = \omega_k H/\pi$ (или $v_1 = 58,376$ м/с, $v_2 = 79,12$, $v_3 = 95,03$ м/с). Экспериментальные исследования замедляющих и волноведущих свойств периодических проницаемых структур нам неизвестны.

Автор выражает благодарность Р. М. Гарипову за ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухинин С. В. Об акустических и электромагнитных колебаниях около периодической решетки // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1981.— Вып. 51.
2. Сухинин С. В. Качественные вопросы теории рассеяния на периодических цилиндрических препятствиях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 67.
3. Сухинин С. В. Эффект волновода // ПМТФ.— 1989.— N 2.
4. Сухинин С. В. Качественные вопросы теории рассеяния на периодических проницаемых препятствиях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1988.— Вып. 86.
5. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.
7. Гарипов Р. М. Волновод в упругой среде // Механика сплошных сред: Сб. матер. Междунар. конф., Варна, 1966.— София: БАН, 1968.

8. Налимов В. И., Плотников П. И. Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1973.— Вып. 23.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1964.

г. Новосибирск

Поступила 6/IX 1988 г.,
в окончательном варианте — 10/III 1989 г.

УДК 532.51

А. М. Батчаев

РЕЖИМЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ЧЕТЫРЕХ КВАЗИДВУМЕРНЫХ ВИХРЕЙ

В последнее время уделяется большое внимание экспериментальному исследованию переходных процессов при возникновении турбулентности в простых гидродинамических течениях. В данной работе моделируется элементарная ячейка квазидвумерного двоякопериодического течения, родственного течению Колмогорова [1—4]. Полученные результаты могут оказаться полезными, например, в приложении к проблеме построения маломодовых систем, описывающих в основных чертах нелинейные процессы в гидродинамических течениях [2, 3].

Первичный режим течения представляет собой стационарную систему четырех квазидвумерных вихрей. Автоколебания в такой системе были впервые обнаружены при изучении конвективных движений в ячейке Хеле — Шоу [5, 6], а впоследствии и в однородной жидкости, где течение индуцировалось магнитогидродинамическим приводом [7—9].

Цель настоящей работы — дальнейшее исследование вышеуказанной системы вихрей. Течение создавалось в горизонтальной прямоугольной кювете в слоях различной толщины под действием периодической по обеим координатам МГД-силы. В частности, получена зависимость амплитуды автоколебаний от числа Рейнольдса, проведен спектральный анализ автоколебательных режимов. Рассмотрено влияние придонного трения на характеристики течения.

1. Лабораторное оборудование и методика проведения экспериментов.

Эксперименты проводились на установке, описанной в [9]. Течение создавалось внутри прямоугольной кюветы размерами $24 \times 12 \times 3$ см, расположенной горизонтально на плексигласовом корпусе. Внутри корпуса симметрично находятся два трехполюсных электромагнита. Индукция магнитного поля \mathbf{B} электромагнитов в области кюветы имеет вертикальную составляющую, которую приближенно можно представить в виде

$$B_z(x, y, z) = B_0(z) \sin(2\pi x/L_x) \cos(2\pi y/L_y).$$

Здесь $B_0(z)$ — амплитуда $B_z(x, y, z)$ на плоскости $z = \text{const}$; $L_x = 24$ см и $L_y = 12$ см — длина и ширина кюветы по осям x и y , лежащим на плоскости $z = 0$ и совмещенным с двумя смежными сторонами кюветы. Ось z направлена вертикально вверх. В кювету наливается электролит (раствор CuSO_4 концентрации 100 г/л). Между вделанными заподлицо в боковые стенки кюветы медными электродами пропускается электрический ток плотности $\mathbf{j} = (0, j_y, 0)$, на единицу массы жидкости действует сила Ампера $\mathbf{F} = \rho^{-1}c^{-1} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ (ρ — плотность электролита, c — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме). Течение определяется практически только компонентой $F_x = \rho^{-1}c^{-1} j_y B_z$, так как $F_y = 0$, а число Рейнольдса Re по $F_z = \rho^{-1}c^{-1} j_y B_x$ в экспериментах примерно на четыре порядка меньше, чем соответствующее Re по F_x (см. п. 3). Кроме этого, $F_z \leq 10^{-4} g$, где g — ускорение свободного падения. Величина $B_0(z)$ изменяется по закону, близкому к экспоненциальному. В расчетах берется ее значение на среднем уровне данного слоя электролита. Электромагнит подключен к лабораторному стабилизированному выпрямителю ТЭС-18, обеспечивающему постоянную силу тока в обмотках 1000 ± 3 мА. Потребляемая мощность составляет 11 Вт. Система охлаждения сделана на базе ультратермостата У10, подключенного к внешнему водопроводу; в качестве охлаждающей жидкости использовалось транс-