



Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4

DOI: 10.15372/PS20220105

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ И ФОРМАЛЬНАЯ СТРОГОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА*

В статье рассматривается соотношение ясности и строгости как характеристик математического аргумента и достижения доказательства средствами формализации. Показано, что проект реализации провозглашенной Д. Гильбертом связи этих характеристик средствами формализации оказывается невыполнимым на данном этапе из-за отсутствия средств формализации, сохраняющих содержание математического рассуждения. Перечислены требования к средствам формализации, которые необходимы для реализации стратегии Гильберта. При этом предлагается стратегия исследования динамической связи формализации и содержания математической теории, позволяющая преодолеть кажущийся разрыв между содержательной и формализованной математическими теориями в отношении характеристик ясности и строгости и их вклада в понимание математического доказательства.

Ключевые слова: языки формализации; содержательная математика; строгость и ясность доказательства

V.V. Tselishchev, A.V. Khlebalin

CONCEPTUAL AND FORMAL RIGOR OF MATHEMATICAL PROOF

The article discusses the relationship between clarity and rigor as characteristics of a mathematical argument and the achievement of proof by means of formalization. It is shown that the project of providing the connection between these characteristics, which is proclaimed by D. Hilbert, by means of formalization turns out to be unfeasible at the cur-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-011-00723).

© Целищев В.В., Хлебалин А.В., 2022

rent stage because of the lack of formalization tools that preserve the content of mathematical reasoning. The requirements for the formalization tools which are necessary to implement Hilbert's strategy are set out. In addition, a strategy is proposed for studying the dynamic relationship between formalization and the content of a mathematical theory, as well as their contribution to understanding the mathematical proof, which enables to overcome the apparent gap between meaningful and formalized mathematical theories with regard to the characteristics of clarity and rigor.

Keywords: languages of formalization; content of mathematical proof; rigor and clarity of proof

На протяжении всей истории науки математика воспринималась как образец знания по многим причинам. Одной из важнейших из них была непревзойденная строгость математической аргументации. Математика весьма рано выработала и кодифицировала стандарт такой строгости – «Начала» Евклида, которому, возможно, зачастую не столько следовали, сколько его провозглашали. Фактически каждая эпоха в истории математики сопровождалась провозглашением в том числе новых стандартов строгости. Формализация математики претендует воплотить этот идеал в совершенной степени. Будучи неотъемлемой частью эпохи поиска оснований, проект формализации содержал тесное переплетение математических и философских концепций, как оказалось с течением времени, не всегда одинаково понимаемых философами и математиками. Наибольших успехов формализация достигает в области математики и логики.

Мы можем конвенционально отсчитывать историю современных стандартов строгости доказательства от формулировки Д. Гильбертом 24-ой проблемы. Одна из записных книжек Гильберта, обнаруженных в его архиве Р. Тиеле, содержит запись о том, что Гильберт собирается представить нижеследующие соображения на международном конгрессе 1900 г. в Париже: «24-й проблемой моей парижской лекции должно было быть следующее: критерий простоты, или доказательство наибольшей простоты определенного доказательства. Разработать теорию метода доказательства в математике в целом. При заданном наборе условий может быть только одно простейшее доказательство. В самом общем виде, если есть два доказательства теоремы, вы должны продолжать, пока не получите каждое из них из другого или пока не станет совершенно очевидно, какие варианты условий были использованы в двух доказательствах. Учитывая два пути [доказательства], нельзя выбирать один из них или искать третий; необходимо исследовать территорию, лежащую

между двумя этими путями. Попытки судить о простоте доказательства, по-моему, это исследование сизигий и сизигии между сизигиями. Использование, или знание, сизигии упрощает способ доказательства истинности определенного тождества. Поскольку любой процесс прибавления [является] применением коммутативного закона сложения и т.д. [и поскольку] это всегда соответствует геометрическим теоремам или логическим выводам, эти [процессы] можно принимать во внимание, например, при доказательстве некоторых теорем элементарной геометрии (например, теоремы Пифагора), и можно уверенно решить, какое из доказательств самое простое» [3, р. 5]. В опубликованных работах Д. Гильберта также можно найти пассажи, в которых он увязывает строгость и простоту: «Кроме того, ошибочно полагать, что строгость доказательства – враг его простоты. Напротив, мы находим множество примеров тому, что наиболее строгий метод доказательства в то же время оказывается более простым и понятным. Само стремление к строгости вынуждает нас находить более простые методы доказательства» [2, р. 447].

Развитие математики в XX в., хотя не в ходе него произошло отказа от, безусловно, изящной и эпистемологически интересной связи концепций ясности и простоты, сделало в высшей степени проблематичным применение этих концепций. Неформализованные доказательства становятся очень сложными для понимания, и поэтому их с трудом можно назвать ясными. Формализованные доказательства приобретают колоссальные размеры, превосходящие человеческие способности обозреть их. Но в любом случае формализация полагается адекватным средством реализации зависимости ясности и строгости доказательства. Можно утверждать о наличии фактически общего согласия в том, что подлинное доказательство – это формальное доказательство. Это положение – то небольшое, что вряд ли будет оспорено, но при этом малейшее уточнение данного положения обещает ввергнуть в жаркие споры о природе доказательства. Обобщенное мнение о доказательстве М. Детлефсен формулирует так: «(i) собственно доказательствами являются те доказательства, которые могут быть или уже сделаны строгими; (ii) доказательства, которые легко могут быть сделаны или сделаны строгими – это формализуемые доказательства; следовательно, (iii) все подлинные доказательства формализуемы» [1, р. 17].

Интересной философской проблемой, касающейся места и роли формализованного доказательства в математической практике,

является проблема отношения между содержательным неформализованным доказательством и его формализованным аналогом. Эта проблема может показаться своего рода дилеммой между, с одной стороны, пониманием и постижимостью доказательства и, с другой стороны, строгостью и убедительностью. При более пристальном взгляде оказывается, что проблема сложнее – нужно различать совершенно разные параметры, которые характеризуют два типа доказательства. Прежде всего, и это наиболее очевидно, это проблема строгости доказательства. Хотя математическое доказательство прозрачно и ясно, поскольку справедливость вывода «вытекает из самого доказательства», реальное математическое доказательство почти никогда не бывает строгим в том смысле, что оно полностью не содержит в себе пропусков. Но нет никаких непреодолимых причин, по которым его нельзя было бы сделать строгим в этом смысле – восполнить пробелы. Формальные же доказательства изначально прописаны с такой степенью точности, что могут быть реализованы на машине. Более существенное различие между неформализованным математическим доказательством и формализованным доказательством состоит в том, что математическое доказательство имеет смысл, тогда как формальное доказательство полностью синтаксическое. Даже если содержательное доказательство будет представлено так, что не будет содержать никаких пробелов, содержащиеся в нем рассуждения в любом случае будут рассуждениями о математических понятиях и связях между ними. Формальное доказательство, напротив, это не более, чем серия движений в автоматизированной системе, предназначенной для того, чтобы преобразовывать множества знаков в другие множества знаков.

Если бы проблема соотношения содержательного и формального доказательств исчерпывалась тем, что в первом случае есть пробелы, а во втором их нет и тем, что первое содержательно, а второе исключительно синтаксическое, то возникает вопрос о том, почему бы не восполнить обнаруженные изъяны в каждой модели доказательства? Для ответа на этот вопрос нужно различать три типа языков, имплицитно присутствующих при обсуждении формализации доказательства: 1) повседневный, естественный язык – язык, который используется в учебниках математики для описания математических концепций, применяемых при доказательстве теорем в современной математической практике; 2) язык символической логики, элементы которой являются сокращениями слов естествен-

ного языка и позволяют наглядно отображать логические формы предложений естественного языка; 3) условно говоря, «лейбницевский» язык – специально разработанный математический язык, который отображает содержание математических понятий таким образом, чтобы рассуждение в системе знаков этого языка являлось бы строгим рассуждением о содержании представляемых в языке содержательных понятий. Символический язык арифметики и алгебра являются таким вариантом лейбницевского языка, по крайней мере для части математики. Другой известный пример – *Begriffsschrift* Г. Фреге для математической практики дедуктивных рассуждений XIX в. Если бы математические доказательства формулировались на каком-либо языке «лейбницевского» типа, не содержали бы в себе пробелов, то они могли бы быть проверяемы машиной. Но будучи проверяемы машиной, они, видимо, не могли бы быть ею получены. Рассуждения математика, даже выраженные языком «лейбницевского» типа, являлись бы содержательными. Формальные доказательства бессодержательны. Выражения, представленные языком «лейбницевского» типа, могут быть прочитаны чисто механически, из чего – существенно теоретически – следует, что содержание доказательства, представленного в языке «лейбницевского» типа, а затем автоматизированного, могло бы быть реконструировано из его формализации. В настоящее время таких языков, видимо, не существует, ведь стандартные системы формализации базируются не на кодификации содержания понятий, а на ресурсах стандартной логики, которые слишком бедны для решения такой задачи. В связи с этим можно констатировать, что мы не располагаем пока техническими ресурсами для создания таких языков формализации, которые избегали бы дилеммы ясности и строгости, а могли бы выразить зависимость между этими характеристиками доказательства, которую предполагал Д. Гильберт.

Эти предварительные итоги, безусловно, весьма общие применительно к анализу соотношения ясности и строгости, достигаемых посредством формализации в реальной математической практике. Надежды на создание такого языка «лейбницевского» типа, в котором идеально соотносились бы ясность и строгость при формализации в нем содержательного математического доказательства, весьма романтичны. Анализ интересующего нас соотношения этих характеристик доказательства в настоящей математической практике требует более реалистичного проекта. На наш взгляд, он мог бы содержать следующие положения.

Прежде всего, неформальные математические теории и их формализацию необходимо рассматривать в их динамических отношениях. Эти отношения в общем виде включают в себя следующие этапы. На первом этапе различные средства формализации разными способами фиксируют границы и концептуальные связи между понятиями, тем самым способствуя пониманию содержания неформальной математической теории. Этому этапу присуща такая форма понимания неформальной теории, которая получается путем преобразования ее в формальную теорию, т.е. преобразованием ее выразительных средств, чем достигаются прояснение и фиксация содержания прежде весьма интуитивно понимаемых концепций. Далее, как только формальная теория получена, она сама выступает объектом понимания. Существенным элементом понимания здесь является признание рассматриваемой теории как формализации частного фрагмента неформальной математики. Эта форма понимания будет прояснена изучением как единичной предполагаемой модели, так и класса моделей, которые обнаруживают лежащие в их основе концептуальные черты, общие для объектов из разных областей математики. Наконец, третий этап связан с исследованием того, как различные системы формализации одной и той же области математики могут привести к трансформации содержания этой области и изменению связей фрагментов неформальной математики.

Выделение таких этапов взаимодействия неформализованной содержательной математики и ее формализации не только в большей степени, чем общие рассуждения о соотношении содержания и формализации, применимо к анализу реальной математической практики, но и позволяет анализировать формализацию как эпистемологический инструмент изучения математики. По уже указанным выше причинам формализация часто считается незначительной с точки зрения ее влияния на математическую практику, но динамическое исследование соотношения содержания и формализации математики позволяет обнаружить тот факт, что формализация оказывается важным инструментом, который не только ограничивает проблемы, изучаемые на практике, но также порождает новые способы рассуждений, могущие дополнять стандартные методы доказательства в разных областях математики. Вполне возможно, что при анализе конкретных случаев формализации фрагментов содержательных математических теорий средствами описанной динамической стратегии будет обнаружена связь понимания, ясности и строгости, которая кажется иллюзорной при общетеоретических рассуждениях.

Литература

1. *Detlefsen, M.* Proof: Its Nature and Significance // Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy / Eds. by B. Gold and R.A. Simons. The Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2009. P. 3-32.
2. *Hilbert D.* Mathematical problems // Bulletin of American Mathematical Society. 1902. No. 8. P. 437–479.
3. *Thiele R.* Hilbert's twenty-fourth problem // American Mathematical Monthly. 2003. No. 110. P. 1–24.

References

1. *Detlefsen, M.*, Proof: Its Nature and Significance. // B. Gold, and R. A. Simons, (eds.), Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy. The Mathematical Association of America, Washington, D.C. 2009. – P. 3-32.
2. *Hilbert, D.* Mathematical problems. // Bulletin of American Mathematical Society. 1902. № 8. – P. 437–479.
3. *Thiele, R.* Hilbert's twenty-fourth problem. // American Mathematical Monthly/ 2003. № 110. – P. 1–24.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

leitval@gmail.com

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

sasha_khl@mail.ru

Information about the authors

Tselishchev Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).

leitval@gmail.com

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090 Russia).

sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 03.01.2022