УДК 512.643

Рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности юнитоидных матриц

Х.Д. Икрамов[1], А.М. Назари[2]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, ул. Колмогорова, 1, Москва, 119991

[2]Университет Эрака, Эрак, Исламская Республика Иран

E-mails: ikramov@cs.msu.su (Икрамов Х.Д.), a-nazari@araku.ac.ir (Назари А.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

Икрамов Х.Д., Назари А.М. Рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности юнитоидных матриц // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2021.— Т. 24, № 2.— С. 167–177.

Юнитоидными называются матрицы, приводимые к диагональному виду посредством преобразования конгруэнции. Рациональным мы называем конечный алгоритм, использующий только арифметические операции. Известны рациональные методы проверки конгруэнтности для частных классов юнитоидных матриц, например, эрмитовых, аккретивных или диссипативных матриц. Предложен рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности юнитоидных матриц общего вида. Алгоритм является эвристическим в том смысле, что требует от пользователя задания двух целочисленных параметров M и N. Выбор значений для них зависит от имеющейся априорной информации о степени близости соседних канонических углов проверяемых матриц.

DOI: 10.15372/SJNM20210204

Ключевые слова: *конгруэнтность, юнитоидная матрица (юнитоид), коквадрат, подобие, теплицево разложение, индексы инерции, пифагоровы тройки, Maple, циркулянты.*

Ikramov Kh.D., Nazari A.M. A rational algorithm for checking the congruence of unitoid matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2021.— Vol. 24, № 2.— P. 167–177.

A matrix is said to be unitoid if it can be brought to diagonal form by a congruence transformation. We say that an algorithm is rational if it is finite and uses the arithmetic operations only. There exist rational methods designed for checking congruence of particular classes of unitoid matrices, for example, Hermitian, accretive, or dissipative matrices. We propose a rational algorithm for checking congruence of general unitoid matrices. The algorithm is heuristic in the sense that the user is required to set the values of two integral parameters M and N. The choice of these values depends on the available a priori information about the proximity of neighboring canonical angles of the matrices under checking.

Keywords: *congruence, unitoid matrix (unitoid), cosquare, similarity, Toeplitz decomposition, indices of inertia, Pythagorean triples, Maple, circulants.*

1. Введение

Термин “юнитоидная матрица” (или “юнитоид”) был, по-видимому, впервые употреблен в [1]. Он обозначает комплексную квадратную матрицу, которая может быть приведена к диагональному виду посредством конгруэнтного преобразования (или, короче, конгруэнции). Конгруэнцией в данной статье называется преобразование матрицы A следующего вида:

$$A \to P^* A P. \tag{1}$$

Здесь P — произвольная невырожденная матрица.

Если исходить из определения, то юнитоидные матрицы суть аналог диагонализуемых матриц в теории подобия. Множество диагонализуемых матриц включает в себя, в частности, нормальные матрицы в качестве сравнительно небольшого подмножества. Однако в этой статье нас будет интересовать связь произвольных юнитоидов именно с нормальными матрицами.

В дальнейшем удобно считать, что матрица A в соотношении (1) невырождена. Это предположение не является серьезным ограничением: последовательностью элементарных конгруэнций всякую матрицу можно привести к прямой сумме невырожденной и нильпотентной матриц (см. по этому поводу, например, [2]). В случае юнитоидной матрицы A нильпотентная часть суммы есть нулевая матрица. Полученная в результате приведения невырожденная подматрица заменяет A в дальнейших преобразованиях.

Пусть P — невырожденная матрица, приводящая юнитоид A к диагональному виду:

$$P^* A P = \Lambda. \tag{2}$$

Посредством еще одной конгруэнции с диагональной трансформирующей матрицей D,

$$\Lambda \to \overline{D} \Lambda D \equiv \hat{\Lambda},$$

можно получить новую диагональную форму, в которой все диагональные элементы будут по модулю равны единице:

$$\hat{\Lambda} = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}\right).$$

Эта форма определяется матрицей A уже однозначно (с точностью до порядка диагональных элементов) и называется ее *канонической формой*. Аргументы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ диагональных элементов называются *каноническими углами* матрицы A.

Нормальная матрица A может быть приведена к диагональному виду посредством унитарного подобия, которое является заодно унитарной конгруэнцией. В этом случае диагональными элементами полученной диагональной матрицы будут собственные значения A. Отсюда следует, что канонические углы нормальной матрицы — это аргументы ее собственных значений.

Системы компьютерной алгебры (например, Maple) предоставляют пользователю возможность безошибочной арифметики с рациональными числами. Будем в дальнейшем рассматривать только матрицы, все элементы которых являются рациональными (или гауссовыми рациональными) числами. Для простоты назовем такие матрицы рациональными. Конечный алгоритм, использующий только арифметические операции, мы называем рациональным. Нас будет интересовать вопрос о том, какие операции в теории конгруэнций могут быть реализованы рациональными алгоритмами.

Задача нахождения канонической формы относительно конгруэнций оказывается тесно связанной с задачей вычисления собственных значений и потому, как правило, не может быть решена не только рационально, но и с привлечением радикалов. Впрочем, есть одно примечательное исключение. Каноническая форма (невырожденной) эрмитовой матрицы H составлена из плюс и минус единиц. Число тех и других называется индексами инерции матрицы H соответственно положительным и отрицательным. Существует несколько рациональных способов вычисления индексов инерции эрмитовых матриц.

Назовем (конгруэнтной) орбитой матрицы A множество всех конгруэнтных с ней матриц. Понятно, что любая матрица этой орбиты имеет ту же каноническую форму, что и A. Пусть теперь заданы две рациональные матрицы A и B одинакового порядка. Можно ли установить факт их конгруэнтности (или ее отсутствия), не прибегая к каноническим формам? Точнее, можно ли это сделать посредством рационального вычисления?

Если говорить о произвольных матрицах A и B, то ответ на этот вопрос в настоящее время не известен. Однако для некоторых подмножеств класса юнитоидов рациональная проверка конгруэнтности возможна. Это верно, в частности, для пар эрмитовых, унитарных, аккретивных и диссипативных матриц.

Цель настоящей статьи — предложить рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности любой пары юнитоидных матриц. После изложения необходимых вспомогательных сведений в пунктах 2–4 мы описываем наш алгоритм в пункте 5. Способы построения тестовых матриц и примеры, иллюстрирующие работу алгоритма, приведены в заключительном пункте 6.

2. Коквадраты

Коквадратом невырожденной матрицы A называется матрица

$$C_A = A^{-*}A.$$

Если A подвергается конгруэнции

$$A \to \tilde{A} = X^*AX,$$

то

$$A^{-1} \to \tilde{A}^{-1} = X^{-1}A^{-1}X^{-*}$$

и

$$C_A = A^{-*}A \to C_{\tilde{A}} = X^{-1}C_AX,$$

т. е. коквадрат матрицы A претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей X. Отсюда следует, что коквадраты конгруэнтных матриц должны быть подобны.

Итак, для конгруэнтности матриц A и B подобие их коквадратов $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_B$ является необходимым условием. Оно может быть проверено рациональным вычислением (см., например, [3]). В системе Maple такую проверку выполняет процедура *IsSimilar*. Она сличает формы Смита (рациональных) матриц A и B. В отличие от канонической формы относительно конгруэнций, форма Смита может быть найдена рациональным алгоритмом.

К сожалению, в случае юнитоидов подобие коквадратов не является достаточным условием конгруэнтности. Так, коквадрат всякой эрмитовой матрицы порядка n есть единичная матрица I_n. Между тем эрмитовы матрицы A и B конгруэнтны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые индексы инерции.

Если коквадраты не подобны, то матрицы A и B не конгруэнтны и наш алгоритм заканчивает работу. В противном случае работа продолжается. В последующих операциях важную роль играет понятие теплицева разложения (квадратной) матрицы. Оно обсуждается в следующем пункте.

3. Теплицево разложение

Напомним, что теплицевым (или эрмитовым, или декартовым) разложением квадратной комплексной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = H_A + iS_A, \quad H_A = H_A^*, \quad S_A = S_A^*. \tag{3}$$

Эрмитовы матрицы H_A и S_A в этом разложении однозначно определены:

$$H_A = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad S_A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Теплицево разложение *нормальной* матрицы A характеризуется следующим свойством.

Предложение 1. *Квадратная матрица A нормальна, если и только если матрицы H_A и S_A в ее теплицевом разложении перестановочны:*

$$H_A S_A = S_A H_A.$$

Рассмотрим подробней эту ситуацию нормальной матрицы A. Выполним унитарное подобие, приводящее A к диагональному виду:

$$U^* A U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Числа $\lambda_j = \beta_j + i\gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ суть собственные значения матрицы A. Матрица U приводит к диагональному виду и каждую из матриц H_A и S_A:

$$U^* H_A U = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \qquad U^* S_A U = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Отсюда выводим:

Предложение 2. *Собственные значения матрицы H_A (S_A) суть вещественные (мнимые) части собственных значений нормальной матрицы A.*

В свою очередь из предложений 1 и 2 вытекает

Предложение 3. *Собственными значениями эрмитовой матрицы $\xi H_A + \eta S_A$ $(\xi, \eta \in \mathbf{R})$ являются вещественные числа $\xi\beta_j + \eta\gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.*

Количества положительных, отрицательных и нулевых собственных значений эрмитовой матрицы H (т. е. индексы инерции этой матрицы) будем обозначать символами $n_+(H)$, $n_-(H)$ и $n_0(H)$.

Применяя предложение 2 к разложению (3) нормальной матрицы A, немедленно получаем:

Теорема 1. *Индексы $n_+(H_A)$ и $n_-(H_A)$ указывают число собственных значений матрицы A, находящихся соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$. Если вместо открытых полуплоскостей говорить о замкнутых полуплоскостях $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $\operatorname{Re} z \leq 0$, то к числам $n_+(H_A)$ и $n_-(H_A)$ нужно добавить нулевой индекс $n_0(H_A)$. Тот же смысл по отношению к полуплоскостям $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ и $\operatorname{Im} z \leq 0$ имеют числа $n_+(S_A)$, $n_+(S_A) + n_0(S_A)$, $n_-(S_A)$ и $n_-(S_A) + n_0(S_A)$.*

Подставим в теорему 1 вместо A (также нормальную) матрицу $A^\alpha = e^{-i\alpha}A$. Теплицево разложение этой матрицы имеет вид

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha}A &= (\cos\alpha - i\sin\alpha)(H_A + iS_A) \\ &= (\cos\alpha H_A + \sin\alpha S_A) + i(\cos\alpha S_A - \sin\alpha H_A) = H_A^\alpha + iS_A^\alpha. \end{aligned}$$

Теперь в силу предложения 3 получаем:

Теорема 2. *Числа $n_+(S_A^\alpha)$ и $n_-(S_A^\alpha)$ указывают количества собственных значений матрицы A, лежащих соответственно выше и ниже прямой с уравнением $y = (\operatorname{tg}\,\alpha)x$ на декартовой плоскости Oxy.*

Из этой теоремы выводим

Предложение 4. *Рассмотрим пару симметричных секторов, ограниченных прямыми $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$ и $y = (\operatorname{tg}\beta)x$, $-\pi/2 < \alpha < \beta < \pi/2$. Предположим, что на этих прямых нет собственных значений матрицы A. Тогда разность между числами собственных значений A, попадающих внутрь этих двух секторов, равна $n_+(S_A^\alpha) - n_+\big(S_A^\beta\big)$.*

Если допускается присутствие собственных значений на границе секторов, то формула для разности между числами собственных значений значительно усложняется. Чтобы понять, как она должна выглядеть, рассмотрим вначале случай, когда исходная нормальная матрица A имеет вещественные собственные значения. Их количество равно дефекту d матрицы S_A в теплицевом разложении. Это число d есть сумма:

$$d = n_{+0}(A) + n_{-0}(A),$$

где символы $n_{+0}(A)$ и $n_{-0}(A)$ обозначают соответственно число положительных и число отрицательных собственных значений матрицы A.

В общем случае прямой $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$, где $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, будем различать собственные значения, лежащие на лучах этой прямой, проходящих соответственно в правой и левой полуплоскостях. Число тех и других будем обозначать через $n_{+0}(A^\alpha)$ и $n_{-0}(A^\alpha)$. Теперь можно сформулировать уточнение предложения 4.

Предложение 5. *Разность между числами собственных значений матрицы A, попадающих внутрь двух секторов, ограниченных прямыми $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$ и $y = (\operatorname{tg}\beta)x$, $-\pi/2 < \alpha < \beta < \pi/2$, равна*

$$n_+(S_A^\alpha) - n_+\big(S_A^\beta\big) + n_{+0}(A^\alpha) - n_{-0}\big(A^\beta\big).$$

Добавим к предложениям 4 и 5 такое очевидное наблюдение:

Предложение 6. *Если для нормальных матриц A и B разность количеств собственных значений в двух указанных секторах различна, то A и B не могут быть конгруэнтны.*

Вернемся к случаю произвольной юнитоидной матрицы A. В ее конгруэнтной орбите находится бесконечно много нормальных матриц; например, этой орбите принадлежит каноническая форма Λ. Чтобы иметь возможность применять к Λ предложения 4, 5 и 6, нужно уметь вычислять для различных α и β числа $n_+(S_\Lambda^\alpha) - n_+\big(S_\Lambda^\beta\big) + n_{+0}(\Lambda^\alpha) - n_{-0}\big(\Lambda^\beta\big)$. Подставляя в соотношение (2) теплицевы разложения матриц A и Λ, получаем

$$P^*(H_A + iS_A)P = H_\Lambda + iS_\Lambda,$$

откуда следует, что

$$H_\Lambda = P^* H_A P$$

и

$$S_\Lambda = P^* S_A P,$$

т. е. (H_A, H_Λ) и (S_A, S_Λ) суть конгруэнтные пары матриц. Тем самым индексы инерции матриц H_Λ, S_Λ и индексы таких производных матриц, как S_Λ^α и S_Λ^β, можно вычислять с помощью компонент теплицева разложения матрицы A.

4. Пифагоровы тройки

Поставив задачу построения рационального алгоритма, мы должны считать элементы матриц A и B рациональными или гауссовыми рациональными числами. Поскольку предполагается многократное применение предложения 6, аргументы α и β в нем нужно выбирать так, чтобы коэффициенты соответствующих прямых были рациональными числами. Для такого выбора мы прибегнем к пифагоровым тройкам.

Напомним, что пифагоровыми называются тройки натуральных чисел, выражающих длины сторон прямоугольного треугольника. Такие тройки можно генерировать по формулам

$$p = m^2 - n^2, \qquad q = 2mn, \qquad r = m^2 + n^2,$$

где m и n — взаимно простые числа разной четности. Тройке (p, q, r) можно сопоставить прямую

$$(m^2 - n^2)x - 2mny = 0,$$

или иначе

$$y = \frac{m^2 - n^2}{2mn}\, x.$$

Если положить $n = 2$, то

$$\operatorname{tg}\phi_m \equiv \frac{m^2 - 4}{4m} \approx \frac{m}{4}$$

для больших m. При $m = n + 1$ имеем

$$\operatorname{tg}\psi_n \equiv \frac{2n+1}{4n(n+1)} \approx \frac{1}{2n}$$

для больших n.

5. Алгоритм

Наш алгоритм основан на простых соображениях. Он начинается с построения коквадратов $A^{-*}A$ и $B^{-*}B$ и проверки их подобия. Если коквадраты не подобны, то A и B не конгруэнтны. На этом работа алгоритма закончена.

Пусть оказалось, что коквадраты подобны. В этом случае плоскость Oxy разбивается на большое число пар симметричных секторов прямыми, проходящими через начало координат. Если растворы этих секторов достаточно малы, а матрицы A и B не имеют патологически близких канонических углов, то в каждой паре секторов будет находиться не более одного (возможно, кратного) такого угла каждой из матриц. Если канонические углы действительно присутствуют, но расположены в разных секторах, то A и B не могут быть конгруэнтны. Обнаруживается такая ситуация с помощью предложения 5.

Если в каноническом спектре имеются числа, различающиеся лишь знаком, то в некоторых парах секторов нашего разбиения могут находиться два канонических угла, расположенных симметрично относительно нуля. Предложение 5 и здесь помогает выявить случай неконгруэнтности матриц A и B (кратности этих симметричных углов различны для двух матриц).

Предположим, что ни в одной паре секторов описанных ситуаций не обнаружено. В этом случае можно с высокой вероятностью считать, что A и B имеют одни и те же канонические углы и, следовательно, конгруэнтны. Конечно, в общем случае эта вероятность не равна единице, поэтому наш алгоритм можно считать эвристическим.

Разбиение плоскости происходит следующим образом. Выберем большие целые числа M и N. Проведем в первом и третьем квадрантах два семейства прямых:

$$y = (\operatorname{tg}\phi_m)x, \quad m = 5, 7, \ldots, M, \tag{4}$$

(таким образом, M нечетно) и

$$y = (\operatorname{tg}\psi_n)x, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

(По поводу обозначений ϕ_m и ψ_n см. п. 4.) Симметричные семейства прямых $y=(-\operatorname{tg}\phi_m)x$ и $y = (-\operatorname{tg}\psi_n)x$ проводим во втором и четвертом квадрантах. Эти прямые определяют разбиение плоскости Oxy на пары симметричных секторов. Возможно проведение дополнительных лучей внутри секторов

$$0 < \arg z < \psi_N, \qquad \psi_1 < \arg z < \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \phi_5, \qquad \psi_M < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

и симметричных лучей в трех остальных квадрантах.

6. Численные результаты

Обсудим вначале построение тестовых матриц для наших численных экспериментов.

Как известно, циркулянты фиксированного порядка n образуют коммутативную алгебру, диагонализуемую посредством одного и того же унитарного подобия, задаваемого матрицей дискретного преобразования Фурье. Тем самым все циркулянты являются нормальными матрицами.

Обозначим через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ элементы первой строки $n \times n$-циркулянта A. Рассмотрим многочлен

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{6}$$

Числа $f(\varepsilon_0^j), j = 0, 1, \ldots, n-1$, суть собственные значения матрицы A. Здесь

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

есть первообразный корень n-й степени из единицы. В частности, при $j = 0$, т. е. когда λ в формуле (6) равно единице, получаем собственное значение

$$f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}. \tag{7}$$

Обозначим через J матрицу порядка n, все элементы которой равны единице. Эта матрица также является циркулянтом. Ее ранг равен 1, а единственное ненулевое собственное значение равно n. Положим

$$B = A + \mu J.$$

Все, кроме одного, собственные значения матрицы B те же, что у A. Единственное отличающееся собственное число равно $f(1) + n\mu$ (см. (7)). При

$$\mu = -\frac{2}{n} f(1) \tag{8}$$

это собственное число приобретает значение $-f(1)$. Коквадраты матриц A и B имеют одинаковый спектр и, следовательно, подобны. В то же время A и B не конгруэнтны, поскольку имеют пару канонических углов, различающихся знаком.

Обе матрицы A и B суть циркулянты и, следовательно, нормальны. Выполним для них конгруэнции

$$\hat{A} = D^* A D, \qquad \hat{B} = E^* D E,$$

где D и E — произвольные (рациональные) матрицы. В наших экспериментах мы выбирали D и E как диагональные матрицы с малыми целочисленными диагональными элементами.

Юнитоидные матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ уже не нормальны, но имеют те же канонические углы, что и (соответственно) A и B. К ним и применяется наш алгоритм.

Предположим теперь, что число n нечетно, и определим диагональную матрицу

$$F = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, 1).$$

Подобие

$$A \to B = F^{-1} A F = F A F$$

преобразует циркулянт A в косой циркулянт B, также являющийся нормальной матрицей. Это простой способ генерирования пар конгруэнтных нормальных матриц. К полученным матрицам A и B применяем описанный выше прием диагональных конгруэнций, что дает по-прежнему конгруэнтные, но уже не нормальные юнитоидные матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

При желании мы можем повернуть совокупность канонических углов обеих матриц, умножая их на произвольное гауссово число $\alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим теперь два примера работы нашего алгоритма. Все вычисления проводились в рациональной арифметике системы Maple.

Пример 1. Пусть v — строчный вектор:

$$v = \left[\ 1/5 \quad 3/10 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1/2\ \right],$$

а A_1 — циркулянт, для которого v является первой строкой. Положим $A = (1-3i)A_1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1/5-3/5\,i & 3/10-9/10\,i & 0 & 1/2-3/2\,i & 1/2-3/2\,i \\ 1/2-3/2\,i & 1/5-3/5\,i & 3/10-9/10\,i & 0 & 1/2-3/2\,i \\ 1/2-3/2\,i & 1/2-3/2\,i & 1/5-3/5\,i & 3/10-9/10\,i & 0 \\ 0 & 1/2-3/2\,i & 1/2-3/2\,i & 1/5-3/5\,i & 3/10-9/10\,i \\ 3/10-9/10\,i & 0 & 1/2-3/2\,i & 1/2-3/2\,i & 1/5-3/5\,i \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов в первой строке матрицы A_1 равна $f(1) = 3/2$. Обозначим через B_1 матрицу $A_1 + \mu J$, где, согласно (8), $\mu = -3/5$. Положим $B = (1-3i)B_1$:

$$B = \begin{bmatrix} -2/5+6/5\,i & -3/10+9/10\,i & -3/5+9/5\,i & -1/10+3/10\,i & \\ -1/10+3/10\,i & -1/10+3/10\,i & -2/5+6/5\,i & -3/10+9/10\,i & -3/5+9/5\,i \\ -3/5+9/5\,i & -1/10+3/10\,i & -1/10+3/10\,i & -2/5+6/5\,i & -3/10+9/10\,i \\ -3/10+9/10\,i & -3/5+9/5\,i & -1/10+3/10\,i & -1/10+3/10\,i & -2/5+6/5\,i \end{bmatrix}.$$

Приведем спектры матриц A и B:

$$\delta(A) = \begin{bmatrix} 1.495016885 + 0.3559886342\,i \\ -1.366618721 + 0.5201440884\,i \\ 0.7812085256 + 1.236086502\,i \\ -1.409606690 - 0.6122192248\,i \\ 1.500000000 - 4.500000000\,i \end{bmatrix},$$

$$\delta(B) = \begin{bmatrix} 1.495016885 + 0.3559886342\,i \\ -1.366618721 + 0.5201440884\,i \\ 0.7812085256 + 1.236086502\,i \\ -1.409606690 - 0.6122192248\,i \\ -1.500000000 + 4.500000000\,i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, четыре собственных значения обеих матриц совпадают; вместе с тем имеется пара собственных значений, различающихся знаком.

Для преобразования матриц A и B в $\hat{A}$ и $\hat{B}$ мы взяли матрицы

$$D = \mathrm{diag}(2, -2, -3, 2, 3) \quad \text{и} \quad E = \mathrm{diag}(2, -2, 2, 3, -3).$$

Работа нашего алгоритма начинается с проверки подобия коквадратов, выполняемой Maple-процедурой *IsSimilar*. В данном случае коквадраты матриц A и B подобны, поэтому алгоритм переходит к построению семейства прямых (4). Значение M равно 43. Для каждой пары симметричных секторов, определяемых этими прямыми, разность между числом канонических углов матриц A и B, попадающих в два сектора, находится с помощью предложения 5. Участвующие в этом предложении индексы инерции вычисляются Maple-функцией *Sturm*, применяемой к характеристическим многочленам эрмитовых матриц из соответствующих теплицевых разложений.

Поскольку различий в положении канонических углов обеих матриц не выявлено, то алгоритм строит семейство прямых, проходящих во втором и четвертом квадрантах и симметричных с прямыми (4). Это новое семейство показано на рис. 1.

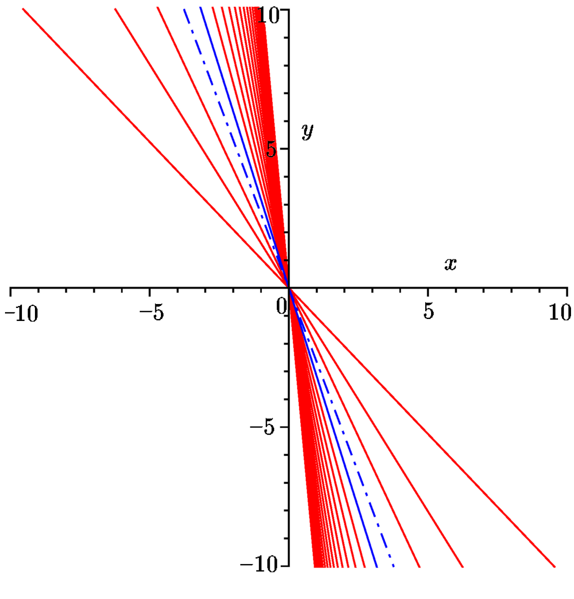

Рис. 1

На этот раз обнаруживается различие в положении канонических углов матриц A и B, принадлежащих секторам с граничными линиями $y = -165/52\,x$ и $y = -117/44\,x$. Эти секторы показаны на рис. 2. На основании предложения 6 алгоритм делает вывод о том, что A и B не конгруэнтны, и прекращает работу.

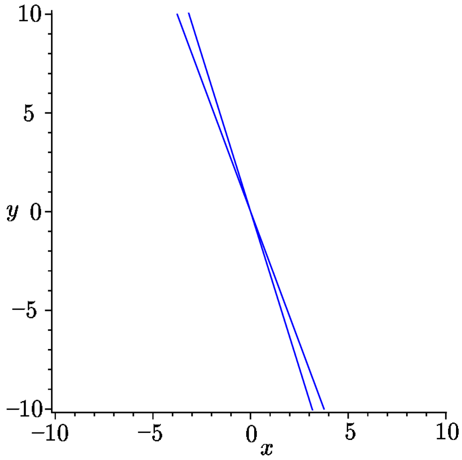

Рис. 2

Пример 2. Пусть v — строчный вектор:

$$v = \left[\begin{array}{ccccc} 3/5 & 0 & 4/5 & 1/2 & 1/10 \end{array}\right],$$

а A_1 — циркулянт, для которого v является первой строкой. Положим $A = (1 - 4i)A_1$:

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 - 12/5\,i & 0 & 4/5 - 16/5\,i & 1/2 - 2\,i & 1/10 - 2/5\,i \\ 1/10 - 2/5\,i & 3/5 - 12/5\,i & 0 & 4/5 - 16/5\,i & 1/2 - 2\,i \\ 1/2 - 2\,i & 1/10 - 2/5\,i & 3/5 - 12/5\,i & 0 & 4/5 - 16/5\,i \\ 4/5 - 16/5\,i & 1/2 - 2\,i & 1/10 - 2/5\,i & 3/5 - 12/5\,i & 0 \\ 0 & 4/5 - 16/5\,i & 1/2 - 2\,i & 1/10 - 2/5\,i & 3/5 - 12/5\,i \end{bmatrix}.$$

Пусть B — косой циркулянт, полученный из A изменением знаков у элементов a_{ij} с нечетной суммой индексов $i + j$. Матрицы A и B диагонально конгруэнтны. Для преобразования их в юнитоидные матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ мы использовали те же диагональные матрицы D и E, что и в примере 1.

Для данного примера мы использовали оба семейства (4) и (5), а также два симметричных семейства прямых. Значение M по-прежнему равно 43, тогда как для N (см. (5)) взято значение 20. Ни одной пары симметричных секторов с различным расположением канонических углов матриц A и B не было обнаружено. Поэтому алгоритм прекращает работу с диагностикой “A и B конгруэнтны”.

Литература

1. **Johnson C.R., Furtado S.** A generalization of Sylvester’s law of inertia // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 338. — P. 287–290.
2. **Икрамов Х.Д.** О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — 2018. — Т. 21, № 3. — С. 255–258.
3. **Икрамов Х.Д.** О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре // Программирование. — 1994. — № 1. — С. 56–69.

Поступила в редакцию 25 февраля 2020 г.
После исправления 16 июля 2020 г.
Принята к печати 4 февраля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Johnson C.R., Furtado S.** A generalization of Sylvester’s law of inertia // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 338. — P. 287–290.
2. **Ikramov Kh.D.** O kongruentnom vydelenii zhordanovykh blokov iz vyrozhdennoi kvadratnoi matricy // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — 2018. — T. 21, № 3. — S. 255–258.
3. **Ikramov Kh.D.** O konechnykh spektral’nykh procedurakh v lineinoi algebre // Programmirovanie. — 1994. — № 1. — S. 56–69.