

УДК 519.63

## Исследование погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики итерационными методами\*

В.П. Житников<sup>1</sup>, Н.М. Шерыхалина<sup>1</sup>, Р.Р. Муксимова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, ул. Пилотов, 38, Санкт-Петербург, 196210  
E-mails: zhitnik@mail.ru (Житников В.П.), n\_sher@mail.ru (Шерыхалина Н.М.), rose.r.mux@gmail.com (Муксимова Р.Р.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

**Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Муксимова Р.Р.** Исследование погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики итерационными методами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 2. — С. 131–144.

Проведено исследование погрешности, вызванной неточностью решения систем уравнений итерационными методами. Для осесимметричного уравнения теплопроводности найдена верхняя оценка погрешности, которая накапливается за несколько шагов по времени. Оценка показывает линейную зависимость погрешности от порогового значения критерия ограничения числа итераций, квадратичный рост от числа разбиений по пространству и ее независимость от числа разбиений по времени. Вычислительный эксперимент показал хорошее соответствие полученной оценки реальным погрешностям при краевых и начальных условиях различного вида. Для уравнения Лапласа эмпирически обнаружен линейный рост погрешности, вызванный ограничением точности при применении итерационного метода, и квадратичный рост от числа разбиений по пространству  $n$ . Для бигармонического уравнения обнаружен рост аналогичной погрешности пропорционально  $n^4$ .

DOI: 10.15372/SJNM20210202

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, неявная схема, уравнение Лапласа, бигармоническое уравнение, метод итераций, численная фильтрация.

**Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Muksimova R.R.** The errors investigation in problems for solving simple equations of mathematical physics by iterative methods // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 2. — P. 131–144.

The error caused by the inaccuracy of the equation system solution by iterative methods has been investigated. The upper error estimate for the axially symmetric heat equation is found in the accumulation process in several time steps. The upper estimate shows the linear dependence of the error on the threshold value of the limiting criterion for the iterations number, the quadratic error growth from the range partitions number, and its independence of the time partitions number. The computing experiment shows a good correspondence of the obtained estimate to real errors with boundary and initial conditions of various types. The quadratic error growth for the Laplace equation, caused by the accuracy limitation for applying the iteration method, on the number of range partitions  $n$ , is empirically found. A similar error growth for the biharmonic equation is found in proportion to  $n^4$ .

**Keywords:** heat equation, implicit scheme, Laplace equation, biharmonic equation, iteration method, numerical filtration.

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-07-00356).

## Введение

При решении задач конечно-разностными методами обычно рассматривают два вида погрешностей: теоретическую погрешность конечно-разностной аппроксимации и погрешность округления. Эти погрешности для одномерного уравнения диффузии подробно исследованы в [1]. Однако для решения различных задач, важных для практики, применяются итерационные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений [2–7]. При этом возникает третий вид погрешности, вызванный неточностью решения системы уравнений. При решении нестационарных задач эта погрешность накапливается на каждом временном шаге. При решении краевых задач для уравнения Лапласа и бигармонического уравнения итерационные методы удобно применять в связи с большой размерностью матриц и их разреженностью.

В связи с этим данная работа в основном посвящена исследованию этого третьего вида погрешности для трех уравнений математической физики: осесимметричного уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа и бигармонического уравнения.

### 1. Смешанная задача для осесимметричного уравнения теплопроводности

Рассмотрим бесконечный стержень кольцевого сечения из теплопроводящего материала. Предположим, что температура на боковых поверхностях стержня задана. Пусть ось  $x$  направлена вдоль оси стержня, а радиус  $r$  изменяется от  $R$  до  $R + 1$ . Тогда задача сводится к определению зависимости от времени температуры  $u$  в точках стержня, т. е. функции двух переменных  $u(r, t)$ , которая должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad R < r < R + 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

начальному условию

$$u(r, 0) = f(r), \quad R \leq r \leq R + 1, \quad (2)$$

и краевым условиям:

$$u(R, t) = \varphi_1(t), \quad u(R + 1, t) = \varphi_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Задача решается методом конечных разностей. На плоскости  $(r, t)$  строится сетка с непостоянным по переменной  $r$  шагом ( $r_i = r_{i-1} + h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $r_0 = R$ ,  $r_n = R + 1$ ) и с шагом  $\tau$  по переменной  $t$  ( $t_j = j\tau$ ,  $j = 0, \dots, m$ ,  $\tau = T/m$ ). Вводятся обозначения:  $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$ ,  $g_i = \frac{h_i}{h_{i+1}}$ ,  $\lambda_i = \frac{2\tau}{h_i(h_i + h_{i+1})}$ . Тогда разностные уравнения для неявной схемы запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_i \left[ 1 - \frac{h_i}{2r_i} g_i^{-1} \right] u_{i-1,j} - \left[ 1 + \lambda_i (g_i + 1) - \lambda_i \frac{h_i}{2r_i} (g_i^{-1} - g_i) \right] u_{i,j} + \lambda_i g_i \left[ 1 + \frac{h_i}{2r_i} \right] u_{i+1,j} \\ = -u_{i,j-1}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с (2) и (3), значения

$$u_{i,0} = f(r_i), \quad u_{0,j} = \varphi_1(t_j), \quad u_{n,j} = \varphi_2(t_j) \quad (5)$$

являются известными. Решается система уравнений относительно  $u_{i,j}$  последовательно для всех  $j = 1, \dots, m$ .

Неявная схема устойчива при любых условиях.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно проводить методом простых итераций. Для этого представим уравнения (4) в виде

$$u_{i,j} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \left( 1 - \frac{h_i}{2r_i} g_i^{-1} \right) u_{i-1,j} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{h_i}{2r_i} (g_i^{-1} - g_i) u_{i,j} + \frac{\lambda_i g_i}{\mu_i} \left( 1 + \frac{h_i}{2r_i} \right) u_{i+1,j} + \frac{u_{i,j-1}}{\mu_i}, \quad \mu_i = 1 + \lambda_i (g_i + 1), \quad (6)$$

или  $x = Bx + b$ ,  $x_i = u_{i,j}$ . При этом норма получившейся в правой части (6) матрицы при  $g_i \leq 1$  имеет вид

$$\|B\| = \max_{1 \leq i \leq n-1} \frac{(1 + g_i) \lambda_i}{1 + (1 + g_i) \lambda_i} < 1. \quad (7)$$

Поэтому итерационный процесс  $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$  сходится в любом случае со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|B\| \|x^{(k-1)} - x\|, \quad \|x\| = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (8)$$

Условием окончания итерационного процесса служит неравенство

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Рассматриваются три варианта краевых и начальных условий:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & f(r) = \sin(\pi(r - R)), \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0, \\ \text{II)} \quad & f(r) = 0, \quad \varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = 0, \\ \text{III)} \quad & f(r) = \ln \frac{r}{R+1} / \ln \frac{R}{R+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = \frac{\partial u}{\partial r}(R+1, t) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При исследовании величина  $n$  изменялась от 5 до 2560 последовательным удвоением текущего значения.

### 1.1. Оценка погрешности, обусловленной неточностью решения СЛАУ

Сначала рассмотрим задачи с  $R = 1$  и  $R = 0.1$  при постоянном шаге по пространству  $h_i = h = 1/n$ .

Используя оценку абсолютной погрешности [8] и условие окончания итерационного процесса (9), получим на  $j$ -м временном шаге

$$\Delta_j = \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \varepsilon. \quad (11)$$

Поскольку при  $h = 1/n$  число Куранта:

$$\lambda = \frac{\tau}{h^2} = n^2\tau, \quad (12)$$

то, согласно (7), при  $g_i = 1$  имеем

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} = 2\lambda = 2n^2\tau.$$

Учитывая (11), получим неравенство

$$\Delta_j \leq 2n^2\epsilon\tau. \quad (13)$$

С другой стороны, на каждом шаге происходит уменьшение накопленной на предыдущих шагах погрешности по экспоненциальному закону:

$$\Delta'_j = \Delta(t - \tau)e^{-\alpha^2\tau} - \Delta(t - \tau), \quad (14)$$

где  $\alpha$  — наименьшее собственное число задачи (1)–(3). Здесь значения  $\alpha$  определялись численно путем использования равенства типа (14), записанного для искомой функции  $u(r, t) = u(r, t - \tau)e^{-\alpha^2\tau}$  при больших  $t$ . Для одномерной задачи  $\alpha = \pi$ , для осесимметричной  $\alpha^2 \approx 9.75$  при  $R = 1$ ,  $\alpha^2 \approx 8.83$  при  $R = 0.1$ .

Учитывая (13) и (14), в качестве верхней оценки получим равенство

$$\frac{\Delta(t) - \Delta(t - \tau)}{\tau} = 2\epsilon n^2 - \Delta(t - \tau) \frac{1 - e^{-\alpha^2\tau}}{\tau}.$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} + \alpha^2\Delta(t) = 2\epsilon n^2,$$

решением которого при начальном условии  $\Delta(0) = 0$  является функция

$$\Delta(t) = \frac{2\epsilon n^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha^2 t}\right). \quad (15)$$

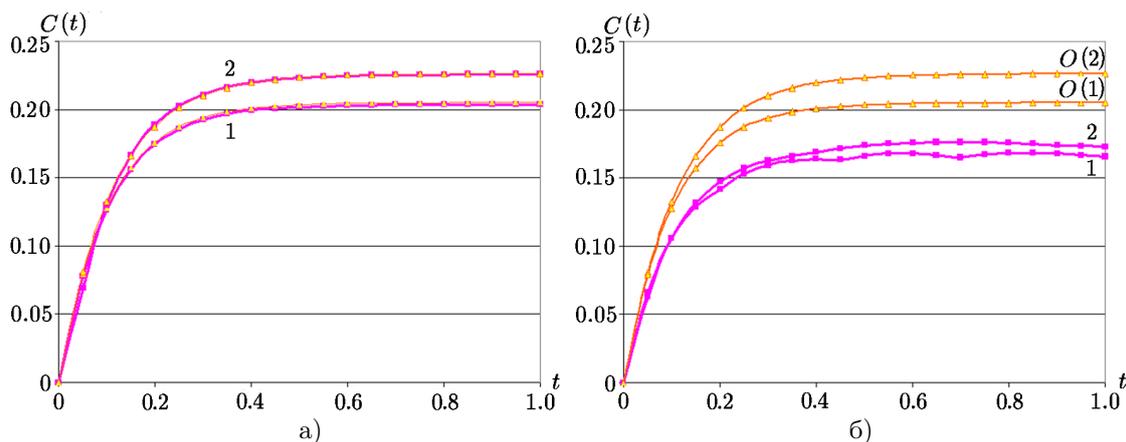
Вследствие (13), эту зависимость можно считать верхней оценкой погрешности, вызванной неточностью решения СЛАУ при  $h_i = h$ .

## 1.2. Результаты вычислительного эксперимента

Исследование погрешностей конечно-разностной аппроксимации и округления показало их качественное совпадение с погрешностями при решении одномерной задачи [1]. Поэтому далее приводятся результаты численного исследования реального значения коэффициента перед  $\epsilon n^2$  в (15)  $C(t) = \Delta(t)/(\epsilon n^2)$ . При этом для анализа погрешности, вызванной неточностью решения СЛАУ, из численных значений, полученных итерационным методом, вычитаются результаты решения методом прогонки. В этом случае составляющие погрешности разностной аппроксимации частных производных взаимно уничтожаются, а погрешность округления имеет меньшую на несколько порядков величину и не влияет на общую картину. Для анализа выбираются значения погрешностей, соответствующие определенному значению  $r$ , для которого при больших  $t$  погрешность максимальна по модулю.

На рисунке 1 а приведены зависимости коэффициента  $C(t)$  для  $m = 2n$  (на рис. 1 кривые 1 соответствуют  $R = 1$ , кривые 2 —  $R = 0.1$ ). Видно, что погрешности практически совпадают с оценками. Для других значений  $\varepsilon$  от  $10^{-8}$  до  $10^{-12}$  и  $n$  от 40 до 1280 зависимости выглядят также.

Следует отметить, что относительная погрешность при условиях типа I (10) растет экспоненциально и может быть очень большой, в отличие от погрешности округления, которая растет линейно аналогично одномерной задаче [1].



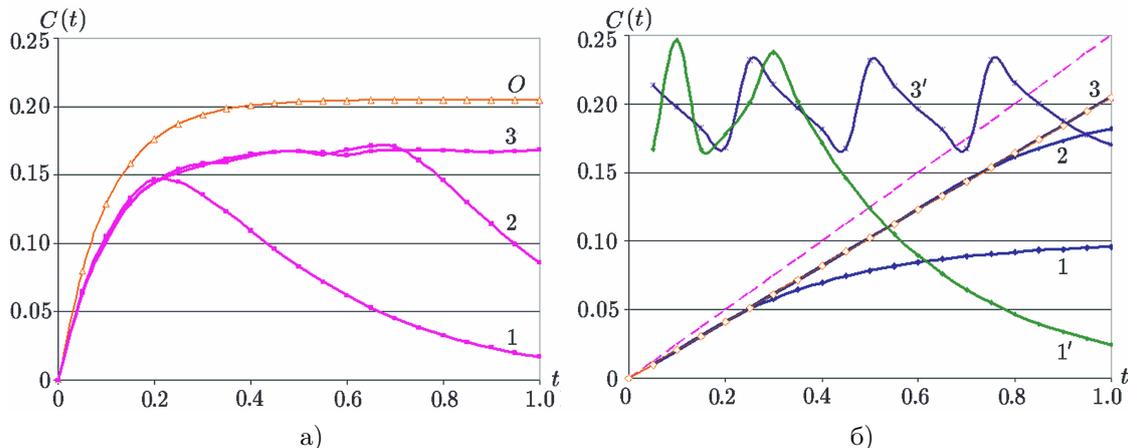
**Рис. 1.** Зависимости коэффициента абсолютной погрешности от  $t$  для  $n = 640$ :  $m = 2n$  (а);  $\lambda = 1$  (б)

На рис. 1 б приведены аналогичные зависимости погрешностей для  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ . В этом случае реальные погрешности меньше оценок примерно на 20%. Это объясняется тем, что при  $\lambda = 1$  число итераций существенно меньше, поскольку норма  $\|B\|$  меньше, чем при  $m = 2n$ , а скорость убывания погрешности от итерации к итерации выше. При этом реальная величина  $\sigma_k = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$  может оказаться существенно меньше  $\varepsilon$ . Поэтому в целом накопление погрешности происходит медленнее, чем предполагалось при выводе оценки.

При достаточно больших  $n$  и  $\varepsilon$  значение накопленной погрешности  $\Delta(t)$  может начать уменьшаться, поскольку величина  $\sigma_k$  становится очень малой и происходит уменьшение погрешности в силу (14). На рис. 2 а приведены зависимости погрешности от  $t$  для  $R = 1$  при трех значениях  $\varepsilon$ : кривая 1 соответствует  $\varepsilon = 10^{-6}$ , кривая 2 —  $\varepsilon = 10^{-8}$ , кривая 3 —  $\varepsilon = 10^{-10}$ , кривые  $O$  — функции (15). Видно появление спада погрешности, причем при уменьшении  $\varepsilon$  точка начала спада отодвигается в сторону больших  $t$  (при увеличении  $n$  происходит сдвиг в сторону меньших  $t$ ). Для объяснения этого на рис. 2 б показаны зависимости сумм  $S_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j$  в отношении к  $m = n^2$  (кривые 1–3 соответствуют тем же  $\varepsilon$ , что и на рис. 2 а) и самих  $\sigma_k$  в отношении к  $\varepsilon$  (кривые 1', 3'). В качестве  $\sigma_k$  использовалась максимальная по модулю разность компонент вектора при решении СЛАУ (9).

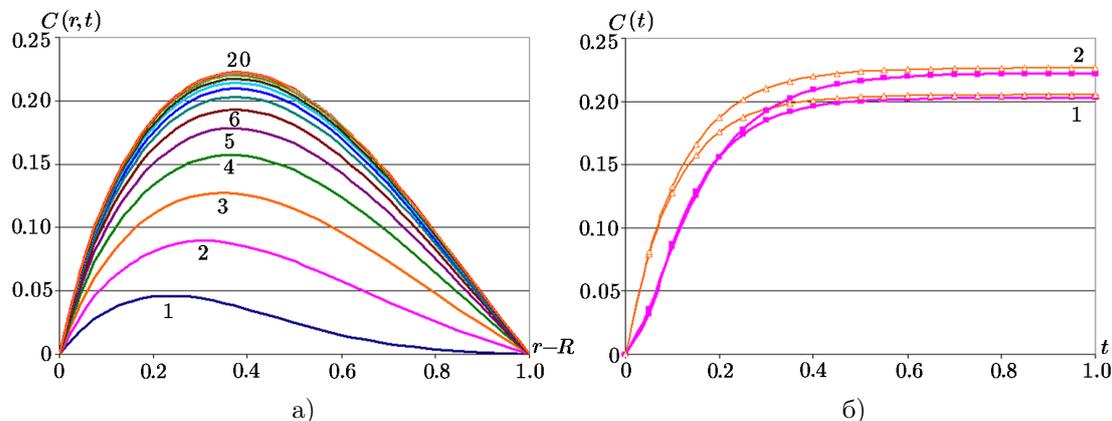
Отметим, что кривая 3' имеет характерную пилообразную форму. Это объясняется следующим образом. На определенном отрезке времени на каждом временном шаге совершается определенное число итераций  $L$ . При этом  $\sigma_j$  от шага к шагу уменьшается, вследствие уменьшения  $u(r, t)$ , по экспоненциальному закону. В определенный момент времени условие  $|\sigma_j| \leq \varepsilon$  начинает выполняться на  $L - 1$ -й итерации, и  $|\sigma_j|$  скачком увеличивается до значения, почти равного  $\varepsilon$ , а затем снова начинает уменьшаться. Поэтому среднее значение  $|\sigma_j|$  оказывается меньше  $\varepsilon$ , и зависимость накопленной суммы  $S_k$  близка к функции  $y = 0.82t$  (кривая 3). На определенном временном шаге величина  $L$  может стать равной 1, и далее начинается процесс монотонного убывания  $|\sigma_j|$  (кривая 1'). При

этом скорость роста  $S_k$  замедляется (кривая 1 на рис. 2 б), а погрешность уменьшается (кривая 1 на рис. 2 а).



**Рис. 2.** Зависимости элементов погрешностей от  $t$  для  $\lambda=1$ ,  $n=1280$ : коэффициента  $C(t)$  (а); сумм  $\sigma_k$  и самих  $\sigma_k$  (б). Пунктирные прямые  $y = t$  и  $y = 0.82t$

Рассмотрим условия типа II (10). Главное отличие от первого типа заключается в скачке левого граничного значения, что приводит к смещению наибольшей погрешности влево на начальном этапе. На рис. 3 а показано распределение погрешности по радиусу при  $R = 0.1$  (кривые 1, 2, ..., 20 соответствуют  $t = 0.05, 0.1, \dots, 1$ ), а на рис. 3 б приведено его сечение вертикальной прямой  $r - R = 0.4$  (кривые 1 соответствуют  $R = 1$ ,  $\alpha^2 \approx 9.75$ , кривые 2 соответствуют  $R = 0.1$ ,  $\alpha^2 \approx 8.83$ ).



**Рис. 3.** Зависимости погрешностей от  $t$  для условий типа II (10) при  $n = 640$ ,  $m = 2n$ : распределения  $C(r, t)$  (а); коэффициента  $C(t)$  (б)

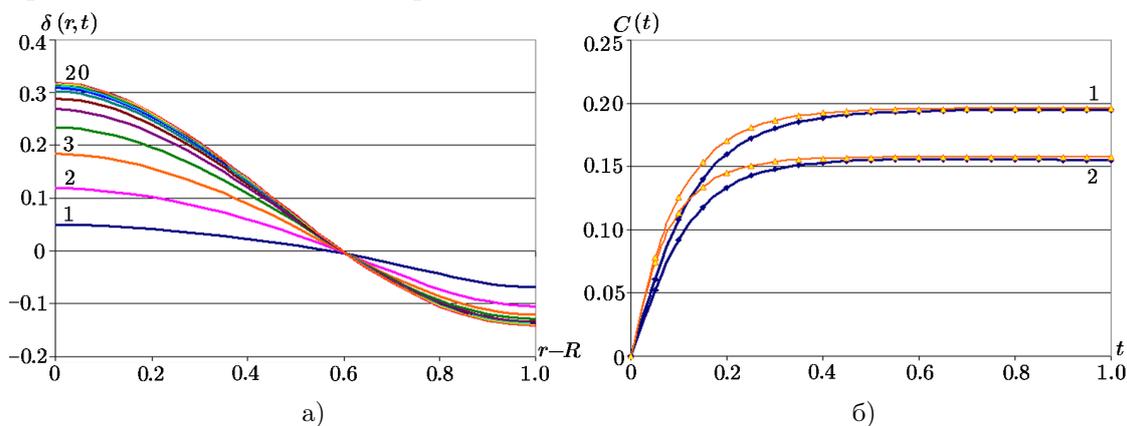
Отметим, что граничные условия для погрешности при варианте II (10) остаются нулевыми. Поэтому реальные погрешности остаются близкими к оценкам (рис. 3 б), только вначале наблюдается отставание, связанное с тем, что при малых  $t$  условие (9) ограничивает разность значений при малых  $r - R$ , а при  $r - R = 0.4$  эта разность существенно меньше. При больших  $t$  это отставание сказывается меньше, поскольку происходит экспоненциальное уменьшение накопленной погрешности (14).

Рассмотрим задачу с условиями типа III (10). В этом случае в качестве начального распределения температуры используется распределение, которое устанавливается в результате решения задачи с условиями типа II (10). В силу нулевых условий 2-го рода тепловой поток через боковые поверхности отсутствует, и количество энергии в исследуемой

области сохраняется во времени. Поэтому при увеличении  $t$  устанавливается постоянная по  $r$  температура

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{R+1}{R} \right)^{-1} - \frac{R^2}{2R+1}.$$

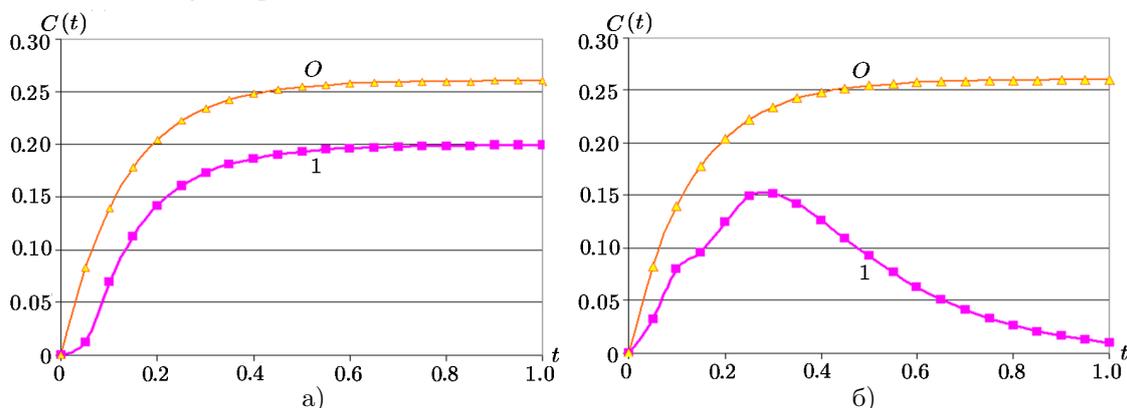
Для этой задачи собственное число  $\alpha^2 \approx 10.22$  при  $R = 1$  и  $\alpha^2 \approx 12.71$  при  $R = 0.1$ . Погрешность имеет разные знаки в левой и правой частях (рис. 4 а). Для анализа рассматривались крайние левые точки с наибольшей погрешностью. На рис. 4 б видно, что при больших  $t$  реальная погрешность приближается к оценке (15), но в начале процесса значительно от нее отличается. Это можно объяснить разной скоростью убывания погрешности в начале и конце процесса.



**Рис. 4.** Зависимости погрешностей от  $t$  для условия типа III (10) при  $n = 640$ ,  $m = 2n$ : распределения относительной погрешности  $\delta(r, t)$  (а); коэффициента  $C(t)$  (б)

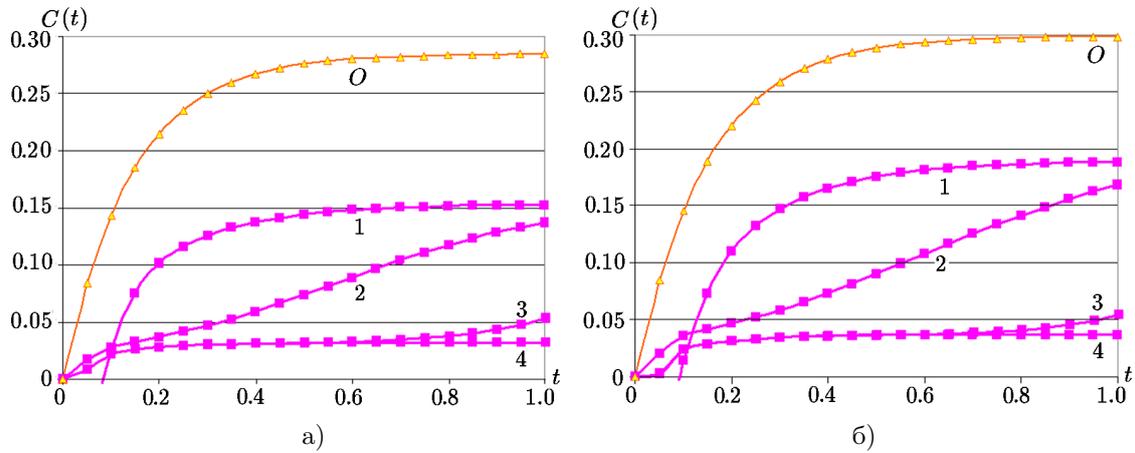
Теперь рассмотрим задачи с  $R = 0.01$  при  $h_i = (i/n)^2$ , а также с  $R = 0.001$  и  $R = 0.0001$  при  $h_i = (i/n)^4$ .

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента  $C(t)$  для  $m = 2n$  (кривые 1 соответствуют  $R = 0.01$ ; линии O — оценка). Видно, что погрешности на 20% и более меньше оценок. Для  $\lambda = 1/4$  падение погрешности, как и на рис. 2 а, вызвано установлением решения за одну итерацию.



**Рис. 5.** Зависимости коэффициента абсолютной погрешности от  $t$  для  $R = 0.01$ :  $m = 2n$ ,  $n = 1280$  (а);  $\lambda = 1/4$ ,  $n = 640$  (б)

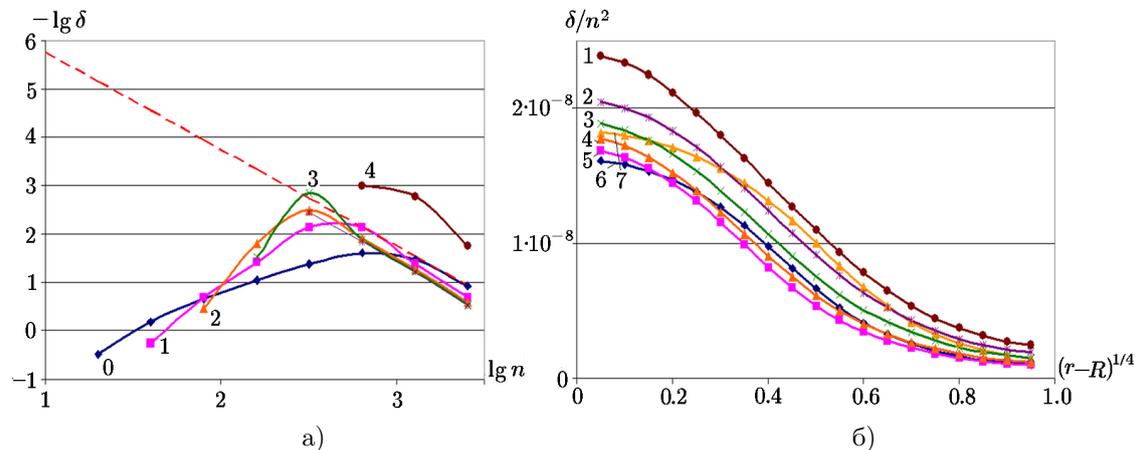
Зависимости для  $R = 0.001$ ,  $R = 0.0001$ ,  $h_i = (i/n)^4$ ,  $n = 1280$  приведены на рис. 6. Кривые 1–4 соответствуют  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$  соответственно. В этом случае реальные погрешности могут быть в 2 и более раз меньше оценки (14).



**Рис. 6.** Зависимости коэффициента абсолютной погрешности от  $t$  для  $m = 2n$ ,  $n = 1280$ :  $R = 0.001$  (а);  $R = 0.0001$  (б)

На рис. 7 а представлены результаты оценки погрешности, полученные с помощью фильтрации [9–11] численных данных, вычисленных для разных  $n$ , при численном решении задачи для  $R = 0.001$ ,  $T = 0.1$  для варианта условий I (10). Обнаруживаются компоненты 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков. Кривая 4 показывает наличие регулярной компоненты погрешности 2-го порядка.

На рис. 7 б приведены результаты исследования распределения относительной погрешности  $\delta$ , отнесенной к  $n^2$ , по пространственной переменной  $r$  для  $\varepsilon = 10^{-10}$ ,  $m = 2n$ ,  $T = 1$  (кривые 1–7 соответствуют  $n = 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560$ ). Видно, что эта величина существенно изменяется при изменении  $r$  (в отличие от случая постоянного шага по  $r$ ).



**Рис. 7.** Оценки относительных погрешностей при  $R = 0.001$ ,  $m = 2n$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ : по  $n$  для  $r = R + 0.00015$  (а); по  $r$  (б). Пунктирная прямая:  $y = 7.75 - 2 \lg n$

Следует заметить, что оценка (15) получена из (12) для постоянного шага  $h$ . Если же вместо (12) использовать

$$\max_i \lambda_i = \max_i \frac{\tau}{h_i^2} = n^8 \tau,$$

то получится завышенная оценка, которая не подтверждается экспериментом. Тем самым, возможность использования оценки (15) при переменном шаге по пространству является экспериментальным фактом.

Таким образом, найденная оценка погрешности итерационного метода при решении смешанной задачи для осесимметричного уравнения теплопроводности находится в хорошем соответствии с реальными погрешностями, соответствующими краевым и начальным условиям различного вида.

## 2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Задача формулируется следующим образом. Найти непрерывную функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

и принимающую на границе области  $\Omega$  заданные значения:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= f_1(y), & y \in [0, b], & & u(a, y) &= f_2(y), & y \in [0, b], \\ u(x, 0) &= f_3(x), & x \in [0, a], & & u(x, b) &= f_4(x), & x \in [0, a], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — заданные функции.

Будем считать, что  $u(x, y)$  непрерывна на границе области  $\Omega$ , т.е.  $f_1(0) = f_3(0)$ ,  $f_1(b) = f_4(0)$ ,  $f_2(0) = f_3(a)$ ,  $f_2(b) = f_4(a)$ . Выбрав шаги  $h, l$  по  $x$  и  $y$  соответственно, строим сетку  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n, y_j = jl, j = 0, 1, \dots, m$ , где  $x_n = nh = a, y_m = ml = b$ .

Вводя обозначения  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ , аппроксимируем частные производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  в каждом внутреннем узле сетки центральными разностными производными второго порядка и заменим уравнение Лапласа конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} &= 0, \\ i &= 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом центральные симметричные разностные производные имеют второй порядок точности относительно шагов сетки по координатам.

Уравнения (18) вместе со значениями  $u_{i,j}$  в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений функции  $u(x, y)$  в узлах сетки  $(x_i, y_j)$ :

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2(1+\lambda)} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + \lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1})), & \lambda &= \frac{h^2}{l^2}, \\ u_{i,0} &= f_3(x_i), & u_{i,m} &= f_4(x_i), & u_{0,j} &= f_1(y_j), & u_{n,j} &= f_2(y_j), \\ i &= 1, \dots, n-1, & j &= 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (19)$$

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике состоит в нахождении приближенных значений  $u_{i,j}$  искомой функции  $u(x, y)$  во внутренних узлах сетки. Для определения величин  $u_{i,j}$  требуется решить СЛАУ (19). В данном случае она решается методом Гаусса-Зейделя, который состоит в построении последовательности итераций вида

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(1+\lambda)} \left( u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + \lambda \left( u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \quad (20)$$

(верхним индексом  $k$  обозначен номер итерации). При  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $u_{i,j}^{(k)}$  теоретически сходится к точному решению системы (19). В качестве практического условия окончания итерационного процесса примем

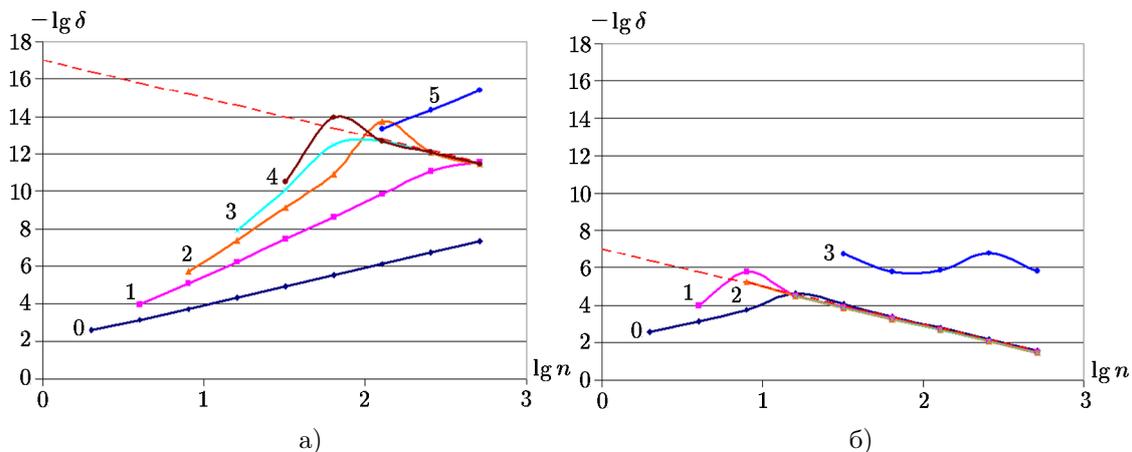
$$\Delta = \max |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)}| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (21)$$

Таким образом, погрешность приближенного решения, полученного методом конечных разностей, складывается из трех погрешностей: погрешности аппроксимации частных производных разностными; погрешности, возникающей в результате приближенного решения системы разностных уравнений (19) и погрешности округления.

Рассмотрим в качестве примера точное решение  $u = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$  задачи (16), (17) при  $a = b = 1$ . В этом случае

$$\begin{aligned} u(0, y) = f_1(y) = \sin y, & \quad u(1, y) = f_2(y) = \operatorname{ch} 1 \sin y, \\ u(x, 0) = f_3(x) = 0, & \quad u(x, 1) = f_4(x) = \operatorname{ch} x \sin 1. \end{aligned}$$

Рассматривается задача при  $m = n$ ,  $\lambda = 1$ . В качестве характерного параметра для исследования выбрано значение искомой величины в центральной точке  $u(x_{n/2}, y_{m/2})$ . Представляет интерес исследование влияния ограничения  $\varepsilon$  в (21) на погрешность решения системы уравнений. Для этого варьировалась величина порогового значения  $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-8}, \dots, 10^{-16}$ . Численная фильтрация [9–11] позволяет подавить степенные составляющие погрешности метода аппроксимации частных производных ( $n^{-2}, n^{-4}, \dots$ ) и обнаружить погрешность, связанную с ограничением по  $\varepsilon$ , если она не могла быть обнаружена до этого. Эксперимент (рис. 8) позволяет построить эмпирическую модель относительной погрешности:  $-\lg \delta = \varepsilon + 1 - 2 \lg n$ . Уменьшение  $\varepsilon$  ниже значения  $10^{-16}$  не приводит к увеличению точности в связи с ограниченностью длины мантиссы. Следует отметить, что погрешность, связанная с ограничением по  $\varepsilon$ , является закономерной, как и в случае применения метода итераций при решении смешанной задачи для уравнения теплопроводности (рис. 7 а). Этот факт подтверждается результатом последней фильтрации, настроенной на компоненту  $n^2$  (на рис. 8 а и 8 б кривые 5 и 3 соответственно).



**Рис. 8.** Фильтрация результатов численного решения задачи (12), (13) при различных ограничениях на погрешность решения системы уравнений:  $\varepsilon = 10^{-16}$  (а);  $\varepsilon = 10^{-6}$  (б). Прямые  $y = 17 - 2 \lg n$  и  $y = 7 - 2 \lg n$

### 3. Краевая задача для бигармонического уравнения

Задача формулируется следующим образом. Найти гладкую функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (22)$$

и принимающую на границе области  $\Omega$  заданные значения:

$$\begin{aligned} u(0, y) = f_1(y), \quad u(1, y) = f_2(y), \quad y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = f_3(x), \quad u(x, 1) = f_4(x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (23)$$

где  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — заданные функции. Кроме того, заданы значения нормальных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \varphi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \varphi_2(y), \quad y \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \varphi_4(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (24)$$

Задача решается на сетке, аналогичной предыдущей. Известными из (23) являются граничные значения  $u_{i,j}$ . По (24) через разностные производные первого порядка вычисляются значения  $u_{i,j}$  на предграничных слоях. Искомыми являются значения  $u_{i,j}$  для  $2 \leq i \leq n-2$ ,  $2 \leq j \leq n-2$ . Для их определения частные производные в (22) заменяются разностными. Это приводит к СЛАУ

$$\begin{aligned} u_{i,j} = -\frac{1}{20}(u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j-2} + u_{i,j+2}) + \frac{2}{5}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \\ - \frac{1}{10}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}), \end{aligned} \quad (25)$$

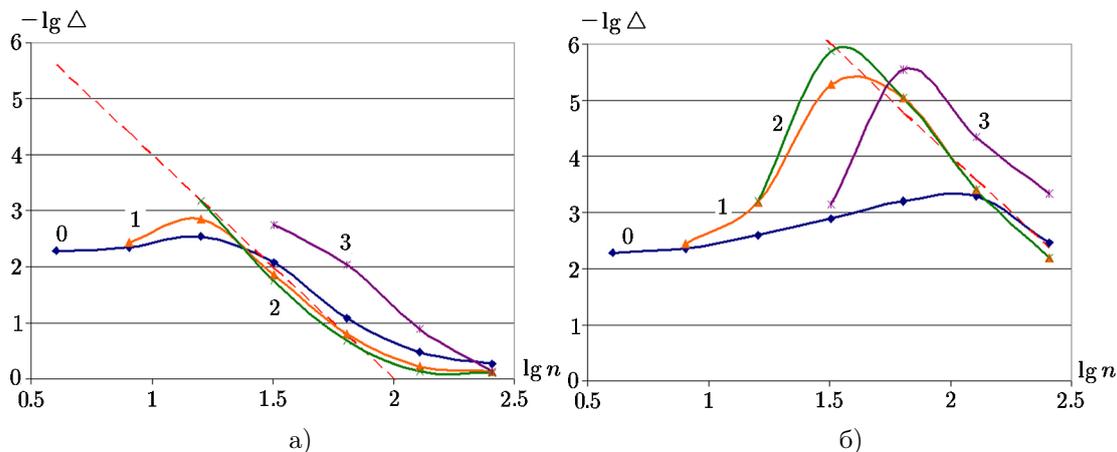
которая решается методом Гаусса–Зейделя, аналогичным (20).

Относительно сходимости итерационных методов для бигармонического уравнения следует отметить следующее. В [12] было показано, что спектральный радиус матрицы (25) для метода простых итераций равен двум, вследствие чего итерационный процесс расходится. Это показал и вычислительный эксперимент. Однако для метода Гаусса–Зейделя это число меньше единицы и сходимость имеет место.

Рассмотрим в качестве примера точное решение  $u = x \operatorname{ch} x \sin y$  уравнения (22). Согласно этому, задаются условия (23), (24).

В качестве характерного параметра для исследования выбрано значение искомой величины  $u_{i,j}$ , наиболее отличающееся от точного. Варьировалась величина порогового значения  $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-8}, \dots, 10^{-12}$ . Фильтрация [9–11] позволила обнаружить степенные составляющие погрешности метода аппроксимации, начиная с  $n^{-1}$ . Эксперимент (рис. 9) позволяет построить эмпирическую модель погрешности, связанной с ограничением по  $\varepsilon$ :  $-\lg \Delta = \varepsilon + 2 - 4 \lg n$ . Эта погрешность является закономерной, как и в случае уравнения Лапласа (рис. 8). Этот факт подтверждается результатом последней фильтрации, настроенной на компоненту  $n^4$  (на рис. 9а и 9б кривые 3).

Таким образом, величина погрешности, связанной с ограничением по  $\varepsilon$ , оценивается формулой  $\Delta \approx 0.01 \varepsilon n^4$ . Было выяснено, что при применении метода релаксаций величина коэффициента в этой формуле может быть уменьшена на порядок.



**Рис. 9.** Фильтрация результатов численного решения задачи (22)–(24) при различных ограничениях на погрешность решения системы уравнений:  $\varepsilon = 10^{-6}$  (а);  $\varepsilon = 10^{-10}$  (б). Прямые  $y = 8 - 4 \lg n$  и  $y = 12 - 4 \lg n$

## Выводы

Были рассмотрены задачи для трех уравнений математической физики, требующие решения систем уравнений итерационными методами. Целью было исследовать, как связана погрешность искомых параметров с погрешностью решения системы уравнений и других параметров. Исследования показали, что, несмотря на различие задач, вид зависимости погрешности искомых параметров от размерности задачи качественно не меняется. Модель погрешности можно представить в виде суммы нескольких компонент.

Первое семейство компонент, обусловленное погрешностью конечно-разностной аппроксимации производных, убывает при возрастании числа разбиений по пространству  $n$  как  $n^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Компонента, обусловленная неточностью решения СЛАУ итерационным методом, имеет главную возрастающую составляющую вида  $\Delta \approx c\varepsilon n^p$ , где показатель  $p$ , как показали эксперименты, равен наивысшему порядку производных, входящих в уравнение. Коэффициент  $c$  зависит от задачи и метода ее решения. Для уравнения теплопроводности получена верхняя оценка этого коэффициента и ее зависимость от времени. Для уравнения Лапласа и бигармонического уравнения значения этого коэффициента найдены эмпирически.

## Литература

1. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Муксимова Р.Р.** Особенности процесса накопления погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики конечноразностными методами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 139–152. Перевод: Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Muksimova R.R. The peculiarities of error accumulation in solving problems for simple equations of mathematical physics by finite difference methods // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 107–117.
2. **Идрисова Г.Р., Ковалева Л.А., Мавлетов М.В., Мусин А.А.** Математическое моделирование двухфазной фильтрации в обводненном пласте с осадкообразованием // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2011. — № 1. — С. 116–123. Перевод: Idrisova G.R., Kovaleva L.A.,

- Mavletov M.V. et al. Mathematical simulation of two-phase fluid flow through a water-flooded porous reservoir with sediment formation // Fluid Dyn.—2011.— Vol. 46.— P. 90–96.
3. **Тухбатова Э.Р., Мусин А.А., Юлмухаметова Р.Р., Ковалева Л.А.** Исследование влияния тепловой конвекции на процесс разрушения водонефтяной эмульсии при СВЧ воздействии // Вестник Башкирского университета. Математика и механика.—2017.— Т. 22, № 4.— С. 930–935.
  4. **Sayakhov F.L., Kovaleva L.A., Nasyrov N.M.** Heat and mass transfer in the well-stratum system under the electromagnetic action on massive oil deposits // J. of Engineering Physics and Thermophysics.—2002.— Vol. 75, № 1.— P. 126–133.
  5. **Саяхов Ф.Л., Ковалева Л.А., Насыров Н.М.** Тепломассоперенос в системе “скважина–пласт” при нагнетании растворителя с одновременным электромагнитным воздействием // Изв. высших учебных заведений. Нефть и газ.—1998.— № 4.— С. 47–55.
  6. **Nigmatulin R.I., Sayakhov F.L., Kovaleva L.A.** Cross transport phenomena in disperse systems interacting with a high-frequency electromagnetic field // Doklady Physics.—2001.— Vol. 46, № 3.— P. 215–218.
  7. **Камалтдинов И.М., Ковалева Л.А., Хисматуллина Ф.С., Галимбеков А.Д.** Влияние высокочастотного электромагнитного поля на адсорбционные процессы в пористой среде // Нефтяное хозяйство.—2013.— № 8.— С. 90–92.
  8. **Амосов А.Л., Дубинский Ю.Л., Копченова Н.В.** Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие.— М.: Высш. шк., 1994.
  9. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М.** Уточнение решений сложных вычислительных задач с помощью постпроцессорной обработки численных результатов // Вычислительные технологии.—2008.— Т. 13, № 6.— С. 61–65.
  10. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С.** Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ.—2009.— Т. 80, № 3.— С. 105–110.
  11. **Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Sokolova A.A.** Problem of reliability justification of computation error estimates // Mediterranean J. of Soc. Sci.—2015.— Vol. 6, № 2.— P. 65–78.
  12. **Gupta M.M.** Spectrum transformation for divergent iterations // NASA technical memorandum.—1991.— ICOMP-91-02.— (NASA-TM-103745).

*Поступила в редакцию 30 июля 2018 г.*

*После исправления 26 мая 2019 г.*

*Принята к печати 4 февраля 2021 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Muksimova R.R.** Osobennosti processa nakopleniya pogreshnostei pri reshenii zadach dlya prosteishikh uravnenii matematicheskoi fiziki konechnoraznostnymi metodami // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.—Novosibirsk, 2016.— Т. 19, № 2.— С. 139–152. Pervod: Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Muksimova R.R. The peculiarities of error accumulation in solving problems for simple equations of mathematical physics by finite difference methods // Numerical Analysis and Applications.—2016.— Vol. 9, № 2.— P. 107–117.
2. **Idrisova G.R., Kovaleva L.A., Mavletov M.V., Musin A.A.** Matematicheskoe modelirovanie dvukhfaznoi fil'tracii v obvodnennom plaste s osadkoobrazovaniem // Izv. RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza.—2011.— № 1.— С. 116–123. Pervod: Idrisova G.R., Kovaleva L.A., Mavletov M.V. et al. Mathematical simulation of two-phase fluid flow through a water-flooded porous reservoir with sediment formation // Fluid Dyn.—2011.— Vol. 46.— P. 90–96.

3. **Tukhbatova E.R., Musin A.A., Yulmukhametova R.R., Kovaleva L.A.** Issledovanie vliyaniya teplovoi konvekcii na process razrusheniya vodonefityanoi emul'sii pri SVCH vozdeistvii // Vestnik Bashkirskogo universiteta. Matematika i mekhanika. — 2017. — T. 22, № 4. — S. 930–935.
4. **Sayakhov F.L., Kovaleva L.A., Nasyrov N.M.** Heat and mass transfer in the well-stratum system under the electromagnetic action on massive oil deposits // J. of Engineering Physics and Thermophysics. — 2002. — Vol. 75, № 1. — P. 126–133.
5. **Sayakhov F.L., Kovaleva L.A., Nasyrov H.M.** Teplomassoperenos v sisteme “skvazhina-plast” pri nagnetanii rastvoritelya s odnovremennym elektromagnitnym vozdeistviem // Izv. vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz. — 1998. — № 4. — S. 47–55.
6. **Nigmatulin R.I., Sayakhov F.L., Kovaleva L.A.** Cross transport phenomena in disperse systems interacting with a high-frequency electromagnetic field // Doklady Physics. — 2001. — Vol. 46, № 3. — P. 215–218.
7. **Kamaltdinov I.M., Kovaleva L.A., Khismatullina F.S., Galimbekov A.D.** Vliyanie vysokochastotnogo elektromagnitnogo polya na adsorbcionnye processy v poristoi srede // Neftyanoe khozyaistvo. — 2013. — № 8. — S. 90–92.
8. **Amosov A.L., Dubinskii Yu.L., Kopchenova N.V.** Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov: Ucheb. posobie. — M.: Vyssh. shk., 1994.
9. **Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M.** Utochnenie reshenii slozhnykh vychislitel'nykh zadach s pomoshch'yu postprocessornoj obrabotki chislennykh rezul'tatov // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2008. — T. 13, № 6. — S. 61–65.
10. **Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechnyi S.S.** Ob odnom podkhode k prakticheskoi ocenke pogreshnosti chislennykh rezul'tatov // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. — 2009. — T. 80, № 3. — S. 105–110.
11. **Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Sokolova A.A.** Problem of reliability justification of computation error estimates // Mediterranean J. of Soc. Sci. — 2015. — Vol. 6, № 2. — P. 65–78.
12. **Gupta M.M.** Spectrum transformation for divergent iterations // NASA technical memorandum. — 1991. — ICOMP-91-02. — (NASA-TM-103745).