УДК 539.219

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. А. Жилин, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lab20@itam.nsc.ru

Численно исследуется процесс капиллярной пропитки пористых материалов. Предложена физико-математическая модель диффузии жидкости в пористом образце с использованием аналитического представления коэффициента диффузии, которое описывает известные экспериментальные данные. Разработана и протестирована на автомодельном решении соответствующей краевой задачи пропитки методика решения одномерных нестационарных задач пропитки. Показано, что при большой длительности процесса пропитки движение жидкости в образце описывается устойчивым решением автомодельного типа. Дана классификация диффузии влаги в зависимости от начальной влажности на границе образца.

Ключевые слова: капиллярная пропитка, пористые материалы, диффузия.

Введение. Использование пористых материалов нового поколения в строительстве и ряде отраслей промышленности приводит к необходимости исследования особенностей механизма взаимодействия влаги с пористыми материалами. Изучению этих особенностей посвящен ряд работ (см., например, [1–3]). В частности, в работе [1] представлены экспериментальные данные по проникновению влаги в пористый материал и экспериментально определена зависимость коэффициента диффузии влаги от ее концентрации в пористом материале.

В данной работе проводится математическое моделирование процесса миграции влаги в пористом скелете твердого материала. Основной задачей является изучение картины течения, возникающей при контакте пористого скелета с поверхностью воды, определение влияния начальных параметров системы жидкость — твердое тело на характер диффузии жидкости.

Физико-математическая постановка задачи. Рассмотрим вертикально расположенный брус из пористого материала (автоклавный газобетон), боковые стенки которого влагонепроницаемы, а нижняя плоскость контактирует с поверхностью воды. Верхняя плоскость является свободной и имеет постоянную влажность. Началу процесса пропитки соответствует момент контакта сухой грани бруса с влажной средой ($t = 0$). После контакта в пористом материале распространяется волна влаги. Задача заключается в опре-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00065), а также в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук и их руководителей (№ МК-2209.2007.8) и Молодежного проекта СО РАН № 25.

делении картины течения жидкости в пористом брусе в последующие моменты времени ($t > 0$).

Для описания исследуемого процесса используется уравнение нестационарной диффузии в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(W)\,\frac{\partial W}{\partial x}\Big), \tag{1}$$

где $D(W)$ — коэффициент диффузии; W — влажность; t — время; x — пространственная координата.

Уравнение (1) дополним начальными условиями

$$t = 0: \qquad W = \begin{cases} W_0, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant l \end{cases} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$x = 0: \quad W = W_0, \qquad x = l: \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Автомодельное приближение. Перейдем к новым переменным t и $\lambda = x/\sqrt{t}$, в которых уравнение (1) принимает вид

$$t\,\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\Big(D(w)\,\frac{\partial w}{\partial \lambda}\Big). \tag{4}$$

Решение задачи (2)–(4) проводилось численно методом пристрелки в два этапа.

Этап 1. Предположим, что коэффициент диффузии является постоянным: $D(w) = \mathrm{const} = D$. Тогда уравнение диффузии в автомодельных переменных (4) записывается в виде

$$t\,\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial w}{\partial \lambda} + D\,\frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^2}. \tag{5}$$

В стационарном приближении уравнение (5) с граничными условиями (3) можно представить в следующем виде:

$$w'' = -\lambda w'/(2D); \tag{6}$$

$$\lambda = 0: \quad w = w_0, \qquad \lambda = +\infty: \quad w = 0.$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$w = w_0[1 - \mathrm{Erf}\,(\lambda/(2\sqrt{D}\,))].$$

Ниже проводится сравнение течений жидкости в пористом теле, характеризуемом минимальным и максимальным значениями коэффициента диффузии и переменной величиной $D = D(w)$. Рассмотрим поведение полученного решения в зависимости от коэффициента диффузии D. На рис. 1 представлены решения уравнения (6) при значениях коэффициента диффузии $D = 10^{-6}$, 10^{-7}, 10^{-8} м^2/с. Естественно, что с уменьшением значения коэффициента диффузии уменьшается значение проницаемости, поэтому на рис. 1 кривая *2* лежит выше кривой *1*, соответствующей меньшему значению коэффициента проницаемости.

Для тестирования метода решения краевой задачи для автомодельного течения при $D = \mathrm{const}$ уравнение (6) решалось численно методом пристрелки. В качестве граничных условий на левой границе задавались значение функции $w(0) = w_0$ и значение ее первой производной $w'(0) = w'_0$. Значение w_0 во всех случаях составляло 0,5, а значение w'_0 подбиралось в соответствии с условием $|w(\lambda_i)| < \varepsilon$, где λ_i — конечный размер расчетной области. При $D = 10^{-6}$ м^2/с значение $w'_0 = -0{,}004\,70$, при $D = 10^{-7}$ $w'_0 = -0{,}014\,86$, при

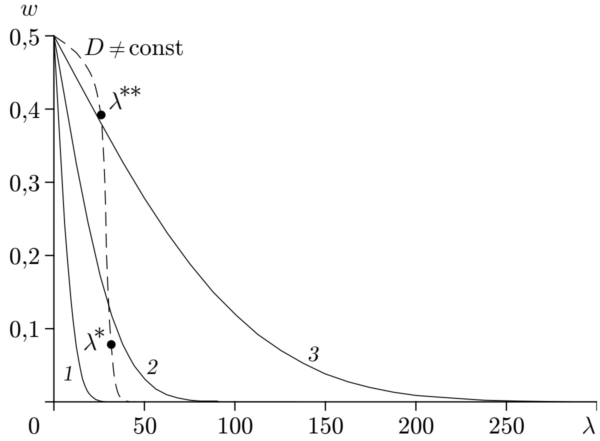

Рис. 1

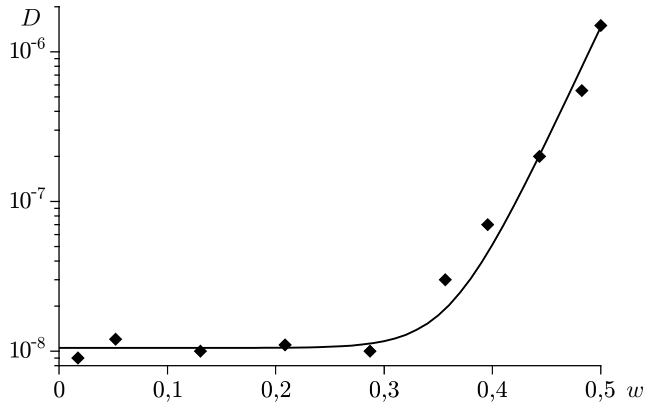

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость проницаемости от коэффициента диффузии:
1 — $D = 10^{-8}$ м^2/с; *2* — $D = 10^{-7}$ м^2/с; *3* — $D = 10^{-6}$ м^2/с

Рис. 2. Интерполяция экспериментальных данных (точки) экспоненциальной функцией (7) (сплошная линия)

$D = 10^{-8}$ $w'_0 = -0{,}047\,03$. Оказалось, что численное решение совпадает с полученным аналитически.

При численном решении краевой задачи для уравнения (5) использовался метод прямых. Для решения полученной при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод, основанный на формуле дифференцирования назад. При большой длительности процесса пропитки численное решение, полученное методом прямых для трех значений коэффициента диффузии, также совпадает с найденными ранее аналитическим и численным решениями стационарного уравнения (6).

Этап 2. Получим решение начально-краевой задачи для исходного уравнения (4) при переменном значении коэффициента диффузии. Для определения зависимости коэффициента диффузии от влажности проводится интерполяция экспериментальных данных [1]. На рис. 2 видно, что экспериментальные данные удовлетворительно описываются экспоненциальным выражением в виде

$$D(w) = a_0 + c_0 \exp\left((w - w_p)/c\right), \tag{7}$$

где $a_0 = 1{,}05 \cdot 10^{-8}$; $c_0 = 3 \cdot 10^{-8}$; $w_p = 0{,}36$; $c = 0{,}037$.

В стационарном приближении уравнение (4) решалось методом пристрелки. Решение этого уравнения при различных значениях w_0 представлено на рис. 3,*а*. Полученное решение представляет собой профиль влажности в автомодельных переменных, на котором можно выделить три участка. Первый участок характеризуется увеличением влажности от значения $w_0 = 0$ при $\lambda = +\infty$ до значения $w_0 = w^*$ при $\lambda = \lambda^*$. Точку $\lambda = +\infty$ заменяем на точку $\lambda = \lambda_i$, значение влажности в которой отличается от нулевого значения на малую величину $\varepsilon = 10^{-4}$. Значения λ_i при различных значениях начальной влажности приведены в табл. 1. Таким образом, полная ширина профиля влажности в автомодельных переменных составляет $\lambda_i = 44{,}2$. Второй участок расположен между точками $\lambda = \lambda^*$ и $\lambda = \lambda^{**}$ (см. рис. 1, рис. 3,*а*). Длина этого участка определяется шириной волны по Прандтлю ($l_{\rm Pr} = 5{,}6021$). На рассматриваемом участке, где наблюдается резкое увеличение влажности, находится точка перегиба, за которой форма профиля влажности меняется с вогнутой на выпуклую. Кроме того, на этом участке находится точка $\lambda = \lambda_{\max}$, в кото-

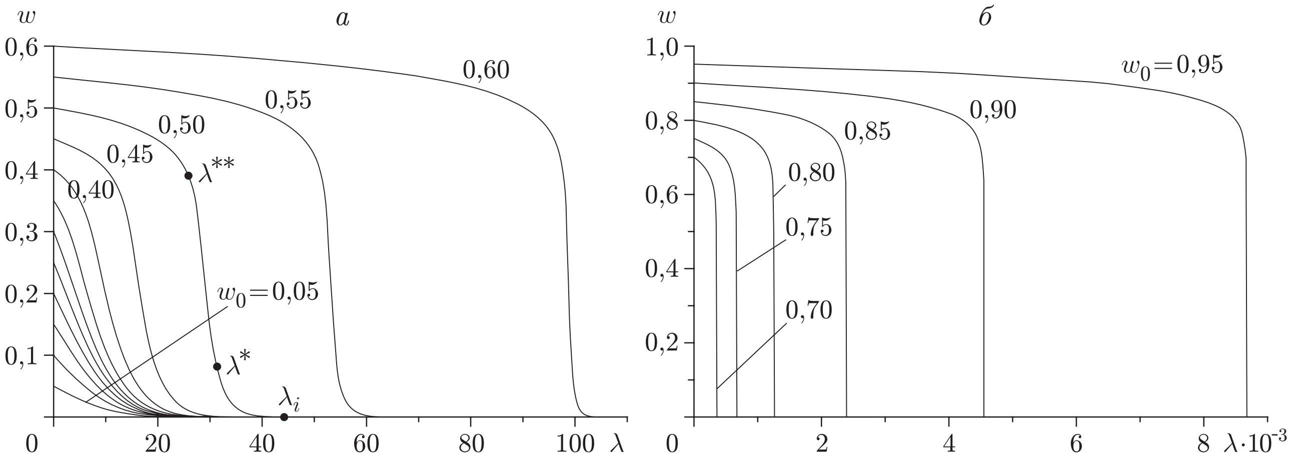

Рис. 3. Зависимость проницаемости от начальной влажности:
а — $w_0 < 0{,}6$; *б* — $w_0 > 0{,}7$

Таблица 1

Параметры волны влаги в автомодельном приближении

w_0	λ_i	$\lambda_{\max}$	$w'_{\max}$	$w_{\max}$	$l_{\rm Pr}$
0,05	26,9	0,1	0,004 59	0,049 54	10,8994
0,10	28,7	0,1	0,009 15	0,099 08	10,9244
0,15	29,7	0,2	0,013 65	0,147 27	10,9851
0,20	30,3	0,9	0,017 96	0,183 91	11,1568
0,25	30,9	2,0	0,021 76	0,207 40	11,4887
0,30	31,4	3,4	0,025 51	0,221 49	11,7604
0,35	32,1	5,4	0,030 25	0,230 91	11,5707
0,40	33,4	8,9	0,038 55	0,239 99	10,3759
0,45	36,5	15,7	0,055 27	0,246 45	8,1417
0,50	44,2	28,6	0,089 25	0,251 49	5,6021
0,55	63,0	52,9	0,156 31	0,252 06	3,5187
0,60	104,5	98,5	0,226 80	0,288 65	2,6455
0,65	188,0	185,0	0,335 78	0,318 58	1,9358
0,70	350,0	348,8	0,587 62	0,081 84	1,1913
0,75	651,3	651,0	0,928 28	0,606 30	0,8079

рой градиент влажности максимален. Этой точке соответствуют максимальные значения влажности $w_{\max}$ и ее производной $w'_{\max}$. При начальной влажности $w_0 = 0{,}5$ эти значения равны $\lambda_{\max} = 28{,}6$, $w_{\max} = 0{,}251\,49$, $w'_{\max} = 0{,}089\,25$ (см. табл. 1). Третий участок профиля влажности начинается в точке $\lambda = \lambda^{**} \approx 25{,}8$, а заканчивается в точке $\lambda = 0$. На данном участке профиль влажности имеет выпуклую форму.

Решение начально-краевой задачи (2)–(4) проводилось в нестационарном приближении методом установления. На рис. 4 представлены профили влажности, полученные в моменты времени $t = 1$; 1,5; 2; 5; 10; 100. Отметим, что при $t = 100$ профиль влажности совпадает с профилями, полученными ранее в стационарном приближении. При $t > 1000$ профиль влажности оставался неизменным, т. е. таким же, как при $t = 100$ (см. рис. 4). Таким образом, при $t \to \infty$ имеет место устойчивое автомодельное течение жидкости в пористом образце.

Влияние начальной влажности. Исследуем влияние начальной влажности на течение в образце. На рис. 3 представлено распределение значений влажности w по автомо-

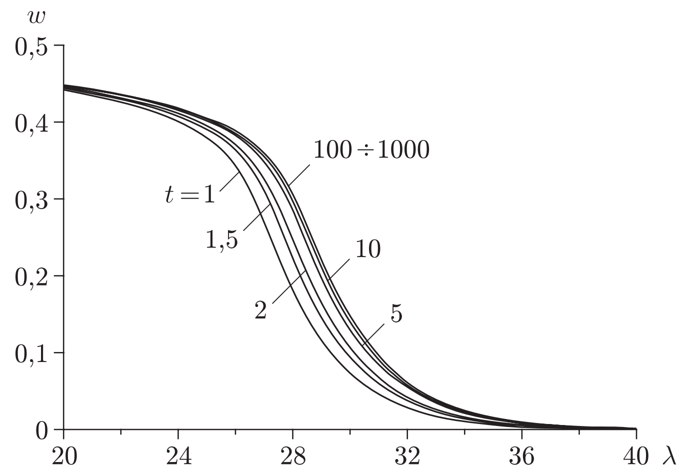

Рис. 4. Стационарный профиль влажности, полученный методом установления в автомодельном приближении

дельной переменной λ при изменении начальных значений влажности w_0 от 0,05 до 0,95 с шагом 0,05. При малых значениях $w_0 \leqslant 0{,}15$ профиль влажности имеет вогнутую форму. При этом максимальный градиент влажности $w'_{\max}$ находится на левой границе, поэтому второй и третий участки отсутствуют (см. рис. 3,*а*). Следовательно, волновой фронт пропитки при таких параметрах также отсутствует. При увеличении начальной влажности от значения $w_0 = 0{,}15$ до значения $w_0 = 0{,}35$ наблюдается смещение максимального градиента влажности от левой границы в направлении больших значений λ (см. табл. 1), при этом появляется второй участок. Начиная со значения $w_0 = 0{,}35$ появляется первый участок. При дальнейшем увеличении начальной влажности максимальное значение градиента влажности $\lambda_{\max}$ смещается в направлении больших значений λ (см. табл. 1), что обусловлено интенсивным ростом коэффициента диффузии в зависимости от влажности (см. рис. 2).

При увеличении w_0 от значения $w_0 = 0{,}5$ до значения $w_0 = 0{,}95$ наблюдаются следующие особенности: 1) размеры области предвестника постепенно уменьшаются, достигая размера шага по автомодельной переменной при $w_0 = 0{,}75$, затем эта область исчезает (см. рис. 3); 2) постепенно уменьшается ширина волны по Прандтлю, а при $w_0 = 0{,}7$ возникает "внутренний разрыв" ($\lambda_{\max} = 348{,}8$, $w_{\max} = 0{,}081\,84$). При $w_0 \geqslant 0{,}75$ увеличивается амплитуда "разрыва" и уменьшается протяженность второго участка, т. е. ширина волны ($l_{\rm Pr} \to 0$). Наконец, значительно увеличивается протяженность третьего участка (на каждом шаге $\Delta w_0 = 0{,}05$ — почти в два раза). Это означает, что реализуется волновой механизм пропитки, при котором в некоторой области небольшой протяженности резко увеличивается насыщенность. Затем наблюдается релаксация влажности до краевого значения.

Решение в области физических переменных. Перейдем к решению поставленной задачи в плоскости физических переменных x и t. Начально-краевая задача (1)–(3) решалась численно с использованием тестированного выше метода.

Распространение волны влаги. На рис. 5 показаны профили влажности в моменты времени $t = 1 \div 10$ с шагом 1, $t = 10 \div 100$ с шагом 10 и $t = 100 \div 1000$ с шагом 100 при начальных значениях влажности $W_0 = 0{,}3$ (рис. 5,*а*), $W_0 = 0{,}5$ (рис. 5,*б*) и $W_0 = 0{,}7$ (рис. 5,*в*). В табл. 2 приведены значения основных параметров профилей влажности. Анализируя профили влажности при $W_0 = 0{,}3$, можно отметить, что с увеличением времени размеры области фильтрационной пропитки интенсивно увеличиваются, т. е. $x_i \gg x_{\max}$.

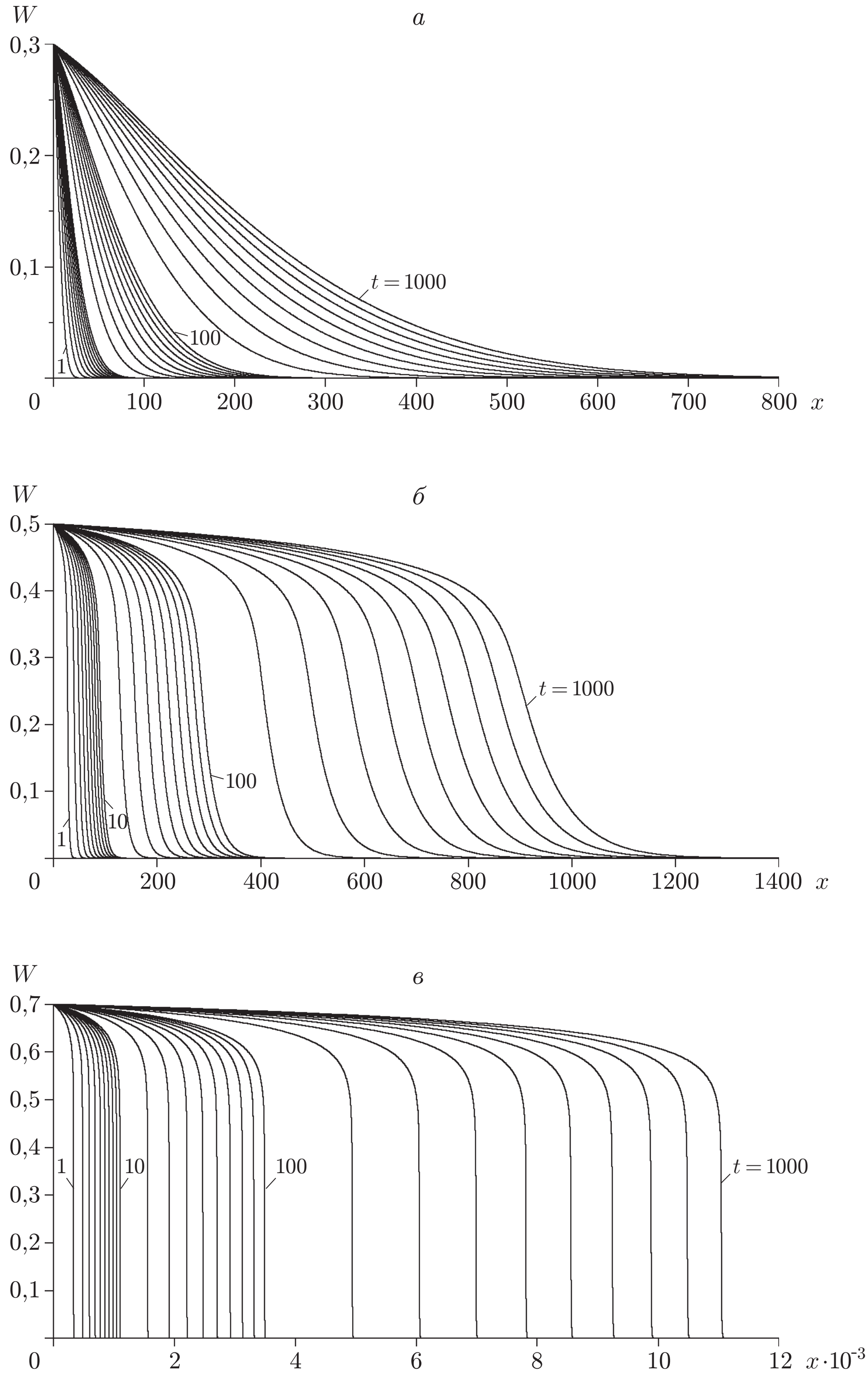

Рис. 5. Распространение волны влаги:
$а$ — $W_0 = 0{,}3$; $б$ — $W_0 = 0{,}5$; $в$ — $W_0 = 0{,}7$

Таблица 2

Динамические параметры волн влаги в плоскости физических переменных

t	x_i	$x_{\max}$	$W'_{\max}$	$W_{\max}$	$L_{\rm Pr}$
$W_0 = 0{,}3$					
1	40,7	3,2	0,026 91	0,221 93	11,150
2	59,8	4,7	0,018 51	0,221 08	16,212
5	96,1	7,5	0,011 52	0,221 83	26,053
10	136,6	11,0	0,008 11	0,219 08	37,014
20	192,0	15,4	0,005 73	0,219 87	52,402
50	305,2	24,4	0,003 62	0,219 90	82,988
100	433,0	37,1	0,002 55	0,213 72	117,647
200	610,1	52,9	0,001 81	0,212 60	166,205
500	954,6	81,3	0,001 15	0,215 19	262,009
1000	1370,8	116,3	0,000 81	0,214 40	370,370
$W_0 = 0{,}5$					
1	49,6	27,1	0,093 71	0,253 12	5,336
2	72,4	39,4	0,064 39	0,251 13	7,765
5	116,2	63,2	0,040 32	0,250 96	12,402
10	164,9	90,0	0,028 36	0,250 59	17,634
20	234,3	127,5	0,020 01	0,252 32	24,988
50	370,7	202,1	0,012 65	0,250 00	39,526
100	525,4	285,5	0,008 91	0,253 39	56,148
200	742,9	404,2	0,006 30	0,251 51	79,428
500	1172,5	639,1	0,004 00	0,252 26	125,156
1000	1657,1	904,0	0,002 81	0,250 62	177,936
$W_0 = 0{,}7$					
1	333,8	331,1	0,908 48	0,203 79	0,771
2	485,2	481,3	0,668 55	0,221 44	1,047
5	779,3	773,1	0,443 16	0,242 96	1,580
10	1107,9	1099,0	0,314 67	0,241 30	2,225
20	1570,8	1558,1	0,222 95	0,266 11	3,140
50	2488,3	2467,4	0,136 81	0,259 65	5,117
100	3520,8	3491,3	0,096 75	0,251 06	7,236
200	4980,5	4938,6	0,068 65	0,257 96	10,197
500	7876,0	7809,9	0,043 35	0,253 78	16,150
1000	11133,5	11039,9	0,030 68	0,254 11	22,812

С ростом t профиль влажности становится более пологим, максимальное значение градиента влажности уменьшается ($W'_{\max} \to 0$) и как следствие увеличивается ширина профиля влажности по Прандтлю.

При $W_0 = 0{,}5$ характер распространения волны влаги значительно меняется, в частности, скорость распространения фильтрационного предвестника остается практически такой же, как и при $W_0 = 0{,}3$, а скорость точки перегиба профиля (центр волны) увеличивается и составляет около 50 % скорости предвестника. Кроме того, при $W_0 = 0{,}5$ ширина профиля влажности по Прандтлю уменьшается почти в два раза по сравнению со случаем $W_0 = 0{,}3$ (см. табл. 2).

Увеличение начальной влажности до значения $W_0 = 0{,}7$ приводит к изменению формы профиля влажности. На профиле имеются малый фильтрационный участок, участок резкого скачкообразного увеличения влажности и участок, на котором значение влажности увеличивается до краевого значения. По мере распространения влаги в пористом мате-

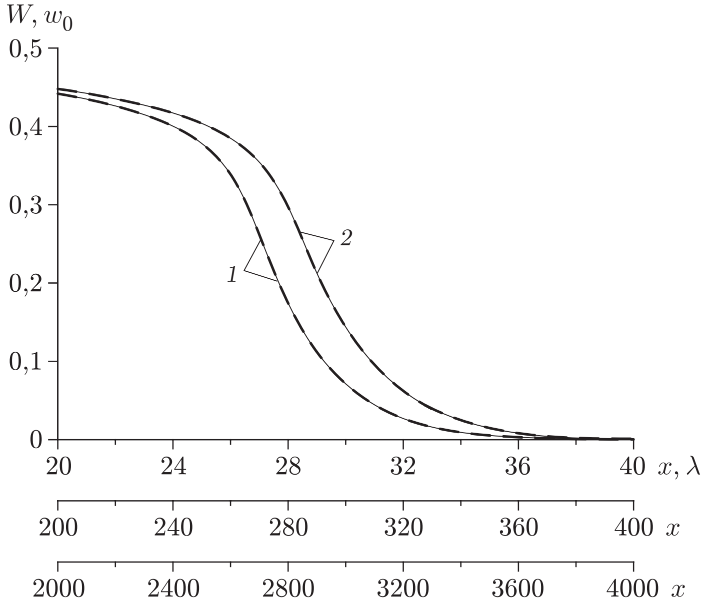

Рис. 6. Результаты расчетов, полученные в плоскости физических (сплошные линии) и автомодельных (штриховые линии) переменных:
1 — $t = 1$, $l = 100$; *2* — $t = 100 \div 10\,000$, $l = 1000 \div 10\,000$

риале увеличивается угол наклона профиля влажности, но ширина профиля влажности по Прандтлю почти в 8 раз меньше, чем при $W_0 = 0{,}5$, и в 16 раз меньше, чем при $W_0 = 0{,}3$. Отметим, что по сравнению со случаем $W_0 = 0{,}5$ скорость перемещения волны влажности значительно увеличивается (почти в 10 раз). Из рис. 5,*в* следует, что наиболее существенное изменение формы профиля влажности происходит на третьем участке, протяженность которого быстро увеличивается и становится близкой к ширине профиля влажности. Заметим, что с увеличением времени скорость распространения профиля влажности снижается, в частности, в интервале $t = 10 \div 1000$ она уменьшается в 10 раз. Аналогичная ситуация имеет место при $W_0 = 0{,}5$; 0,3. Еще одной особенностью поведения профиля влажности является положение точки, в которой градиент влажности максимален (точки перегиба по высоте профиля): при $W_0 = 0{,}3$ $\ W_{\max} \approx 0{,}22$, что составляет 73 % значения W_0, при $W_0 = 0{,}5$ $\ W_{\max} \approx 0{,}25$ (50 %), а при $W_0 = 0{,}7$ $\ W_{\max} \approx 0{,}25$ (35 %). Таким образом, точка перегиба перемещается по профилю сверху вниз до значения $W_{\max} \approx 0{,}26$ (приблизительно 30 % общей высоты профиля при $W_0 = 0{,}9$).

На рис. 6 представлены результаты расчетов при $W_0 = 0{,}5$. Сплошными линиями показаны профили влажности, полученные при решении задачи (1)–(3) в физической области движения при $t = 1$ и $t = 100 \div 10\,000$ и протяженности расчетной области $l = 100$ и $l = 1000 \div 10\,000$ соответственно. Особенностью представления является изменение масштаба шкалы оси абсцисс. Так, при увеличении протяженности области с $l = 100$ до $l = 1000$, а затем до $l = 10\,000$ масштаб шкалы оси увеличивается на один порядок. Штриховыми линиями показаны результаты расчетов, полученные при решении начально-краевой задачи (2)–(4) в автомодельных переменных при $t = 1$ и $t = 100 \div 1000$. Следует отметить, что во всех трех случаях $l/\sqrt{t} = 100$. Из рис. 6 следует, что решение, полученное в плоскости физических переменных, совпадает с решением, полученным в автомодельном приближении.

Распределение влажности по сечениям пористого материала. Исследуем динамику изменения влаги в сечениях $x = 10, 20, \ldots, 90$ мм в брусе из пористого материала длиной

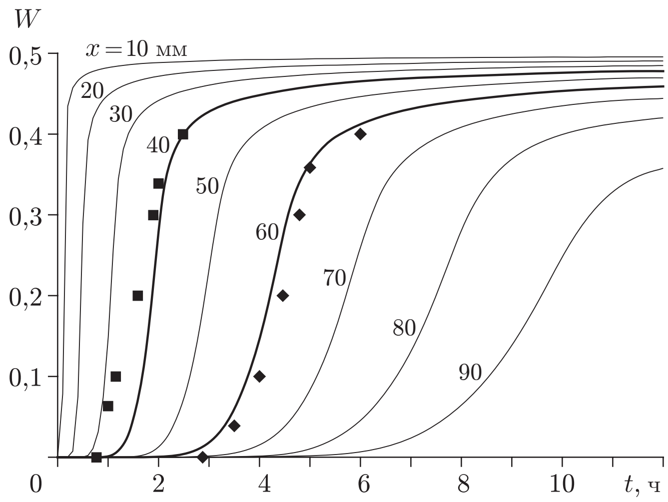

Рис. 7. Распределение влажности в сечениях:
линии — результаты расчета; точки — экспериментальные данные [1]

Таблица 3

Предельные значения влажности

x, мм	$W_к$								
	$W_0 = 0{,}1$	$W_0 = 0{,}2$	$W_0 = 0{,}3$	$W_0 = 0{,}4$	$W_0 = 0{,}5$	$W_0 = 0{,}6$	$W_0 = 0{,}7$	$W_0 = 0{,}8$	$W_0 = 0{,}9$
10	0,090 11	0,180 63	0,277 69	0,391 76	0,495 74	0,596 11	0,696 44	0,798 56	0,899 55
20	0,080 12	0,160 84	0,251 41	0,381 42	0,490 88	0,591 72	0,692 45	0,797 05	0,899 09
30	0,070 13	0,140 90	0,222 38	0,367 92	0,485 29	0,586 73	0,687 98	0,795 47	0,898 62
40	0,060 13	0,120 88	0,191 74	0,349 05	0,478 72	0,580 97	0,682 90	0,793 83	0,898 15
50	0,050 13	0,100 81	0,160 29	0,320 34	0,470 75	0,574 14	0,677 01	0,792 10	0,897 67
60	0,040 13	0,080 71	0,128 48	0,274 80	0,460 63	0,565 76	0,669 99	0,790 29	0,897 18
70	0,030 12	0,060 59	0,096 51	0,212 26	0,446 78	0,554 91	0,661 33	0,788 39	0,896 69
80	0,020 11	0,040 47	0,064 47	0,142 74	0,424 86	0,539 52	0,650 01	0,786 39	0,896 20
90	0,010 11	0,020 34	0,032 40	0,071 84	0,372 39	0,512 73	0,633 60	0,784 27	0,895 69

$l = 100$ мм. На рис. 7 показано распределение влажности в рассматриваемых сечениях в зависимости от времени. В каждом сечении на профиле влажности можно выделить три участка. Начало первого участка, на котором значение влажности равно нулю, соответствует моменту начала эксперимента, конец — моменту достижения волной влажности рассматриваемого сечения. На втором участке происходит постепенное увеличение влажности до значения $W_к$. Третий участок, как и первый, характеризуется постоянным значением влажности, равным $W_к$. Конечные значения влажности в сечениях при различных начальных значениях влажности приведены в табл. 3. При перемещении рассматриваемого сечения от плоскости контакта с водой в глубь бруса протяженность первого участка увеличивается. При $W_0 = 0{,}1$ второй участок (от $W = W_0$ до $W = W_к$) имеет наибольшую протяженность, что составляет около 1000 ч. Значение $W_к$ в различных сечениях значительно изменяется (максимальное изменение $W_к$ составляет 80 %).

Верификация математической модели. Проведено сравнение результатов численных расчетов, полученных с использованием предложенной математической модели, с экспериментальными данными работы [1]. Из рис. 7 следует, что в сечениях $x = 40$, 60 мм предлагаемая математическая модель адекватно описывает экспериментальные данные.

Заключение. Предложена и верифицирована диффузионная физико-математическая модель капиллярной пропитки пористого материала, основанная на аналитическом выражении для коэффициента диффузии, удовлетворительно описывающем экспериментальные данные.

Разработана и протестирована на автомодельном решении соответствующей краевой задачи пропитки методика решения одномерных нестационарных задач пропитки.

Установлено, что при большой длительности процесса пропитки течение жидкости в образце описывается решением автомодельного типа. Показана устойчивость этого решения.

Предложена классификация диффузии влаги в зависимости от начальной влажности на границе образца: 1) гладкая волна пропитки; 2) диффузионная волна пропитки, сопровождаемая предвестником и диффузионной зоной релаксации к краевому значению насыщенности; 3) волна с резким изменением профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Низовцев М. И., Станкус С. В., Стерлягов А. Н. и др.** Экспериментальное определение коэффициентов диффузии влаги в пористых материалах при капиллярном и сорбционном увлажнении // Инж.-физ. журн. 2005. Т. 78, № 1. С. 67–73.
2. **Перехоженцев А. Г.** Вопросы теории и расчета влажностного состояния неоднородных участков ограждающих конструкций зданий. Волгоград: Волгогр. гос. архит.-строит. акад., 1997.
3. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. Гл. 5.

Поступила в редакцию 19/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 4/X 2007 г.