На рис. 4 представлены графики безразмерных смещений точек свободной поверхности полупространства в зависимости от расстояния x от края штампа ($x = 1$) при $t_1 = 0{,}4$, $t_2 = 0{,}8$, $t_3 = 1{,}2$, $t_4 = 1{,}6$, $t_5 = 2$ для случаев 1 (сплошная линия) и 2 (штриховая). Кривые *1—5* — графики смещений точек поверхности полупространства в моменты времени t_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.— М.: Наука, 1969.
3. **De Hoop A. T.** A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Ser. B.— 1960.— V. 8.
4. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках.— М.: Мир, 1984.
5. **Бабешко В. А.** Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.— М.: Наука, 1984.

Поступила 28/X 1987 г.

УДК 532.526

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЫТЯГИВАНИЯ СТРУЙ НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Елисеев, Л. А. Флеер

(*Днепропетровск*)

Аэродинамическое вытягивание струй вязких жидкостей имеет свое практическое применение в вопросах формования синтетических нитей из расплавов полимеров с помощью скоростных газовых потоков. Задача о формовании волокон относится к сопряженным задачам, в которых необходимо учитывать взаимное влияние формуемого волокна с окружающей средой. Впервые она была математически сформулирована в работах [1, 2], где предложена модель течения, выведены основные уравнения и граничные условия. В [3, 4] выведены наиболее общие уравнения динамики тонких струй вязкой жидкости с учетом пространственного изгиба и кручения, в [4—6] дан подробный анализ современного состояния теории гидродинамики, теплообмена и устойчивости процессов формования волокон. В случае формования волокон с помощью тянущих устройств при небольших (до 5 м/с) конечных скоростях струи внешним силовым воздействием потока можно пренебречь [7]. С увеличением скорости движения нити влияние силы трения на параметры волокна становится существенным. Для аэродинамического вытягивания силы взаимодействия потока и волокна являются определяющими. Некоторым физическим и технологическим аспектам этой задачи посвящен ряд работ (например, [8, 9]), в которых рассмотрены особенности аэродинамического формования. В данной работе построена полная сопряженная математическая модель течения и проведен численный анализ на основе итерационного метода [10, 11].

1. Основные уравнения и граничные условия. На рис. 1 показана схема течения струи жидкости, вытягиваемой воздушным потоком, параллельным оси струи (*1* — фильера, *2* — струя, *3* — эжектор). Вследствие наличия вязкостных и теплопроводных эффектов струя расплава и внешняя среда взаимодействуют друг с другом посредством пограничного слоя. Взаимное влияние вытягиваемой струи и среды делает поставленную задачу сопряженной. Предположим, что течение струи расплава происходит устойчиво, струя не изгибается и не колеблется, профили скоростей и температур в струе однородны. Такие предположения дают возможность использовать простые уравнения движения жидкой струи и теплообмена, выведенные, например, в [1—3]:

$$\frac{dA_c}{dx} = \frac{\rho_c A_c F}{G\beta},\quad \frac{dT_c}{dx} = \frac{2\pi r_c q}{\rho_c u_c c_c A_c},\tag{1.1}$$

$$G = \rho_c u_c A_c,\ F = F_{\text{тр}} + F_{\text{ин}} + F_g,\ q = q_T + q_{\text{изл}},$$

$$\beta = D\exp(B/T_c + C),\ A_c|_{x=0} = A_{c0},\ T_c|_{x=0} = T_{c0}.$$

Здесь ρ_c — плотность жидкости; u_c — скорость струи; ε — степень черноты тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; c_c — теплоемкость жидкости; A_c — площадь поперечного сечения струи; T_c — температура струи; $\hat{\beta}$ — продольная вязкость полимера; G — расход полимера; r_c — радиус струи; F — суммарное осевое усилие, уравновешивающее реологическую силу и включающее в себя силу трения, веса струи и инерции $\Big(F_{тр} = 2\pi \int\limits_x^L \tau_c r_c \left(1 + r'^2_{cx}\right)^{0,5} dx, \quad F_g = \int\limits_x^L g\rho_c A_c dx$ и $F_{ин} = G\left(u_c - u_L\right)\Big)$; L—длина струи; u_L — конечная скорость струи; τ_c — касательное напряжение на поверхности струи; q_T — тепловой поток вследствие вынужденной конвекции; $q_{изл} = \varepsilon\sigma\left(T_c^4 - T_\infty^4\right)$ — излучаемый тепловой поток; T_∞ — температура среды на внешней границе пограничного слоя; D, B, C — параметры конкретного полимера. Для замыкания (1.1) необходимо добавить уравнения ламинарного пограничного слоя на длинном тонком теле вращения

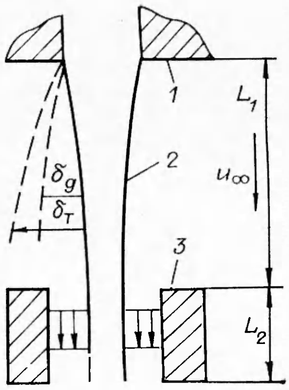

Рис. 1

(1.2)
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial (yu)}{\partial x} + \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0, \quad \rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

и граничные условия

(1.3)
$$u\,|_{y=r_c} = u_c, \quad T\,|_{y=r_c} = T_c,$$

$$u\,|_{y=r_c+\delta_D} = u_\infty, \quad T\,|_{y=r_c+\delta_T} = T_\infty, \quad \tau_c = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=r_c}, \quad q_T = -\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=r_c},$$

где u, v — компоненты скорости газа; T — температура газа; ρ — плотность; c_p — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности; ν, μ — кинематическая и динамическая вязкость газа; u_∞ — скорость внешнего потока; δ_D, δ_T — толщина динамического и теплового пограничного слоя; τ_c — напряжение трения между струей и газом. В настоящее время известно много конструктивных схем формования, но все они могут быть сведены к простым физическим моделям, отличающимся граничными условиями на бесконечности и сочетанием режимов обтекания струи расплава. Ниже рассмотрим некоторые схемы формования, представляющие теоретический и практический интерес.

2. Ламинарный режим обтекания. В этом случае схема течения соответствует рис. 1 при $L_2 = 0$. Полагаем, что u_∞, теплофизические параметры газа и T_∞ постоянны. Для решения системы (1.2) применим интегральный метод, где в качестве аппроксимирующих функций используются логарифмические профили для скорости и температуры (2.1), хорошо зарекомендовавшие себя в подобного рода задачах [11, 12]:

(2.1)
$$\frac{u}{u_c} = 1 + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{y}{r_c}\right), \quad \frac{T}{T_c} = 1 - \frac{1}{\xi}\ln\left(1 + \frac{y}{r_c}\right).$$

Учитывая граничные условия (1.3) и сделанные предположения, после интегрирования уравнений (1.2) по поперечной координате y для неизвестных форм параметров α и ξ получим

(2.2)
$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\dfrac{2\nu\alpha^2}{u_c r_c^2} + 2\dfrac{r'_{cx}}{r_c}\alpha\left(R_1 - \dfrac{u_\infty}{u_c}R_2\right)}{R_3},$$

$$R_1 = -\alpha^2\gamma - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2} + 0{,}5 + e^{2\alpha\gamma}\left(\frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} - 0{,}5\right),$$

$$R_2 = \alpha^2 + \frac{\alpha}{2} + e^{2\alpha\gamma}\left(\alpha^2\gamma + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - 1 + e^{2\alpha\gamma}\left(-\frac{3}{2}\alpha\gamma - \frac{\alpha}{2} + 1 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma\right),$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \left[-\frac{\nu}{\Pr}\frac{1}{u_c r_c^2\xi} + \frac{T'_{cx}}{T_\infty - T_c}\left(R_4 + \frac{u_\infty}{u_c}R_5\right) - \frac{2r'_{cx}}{r_c}\frac{u_\infty}{u_c}R_5 - \right.$$

$$\left. - \alpha'_x\left(R_6 + \frac{u_\infty}{u_c}R_7\right) - \gamma'_x\left(R_8 + \frac{u_\infty}{u_c}R_9\right)\right] \Big/ \left(R_{10} + \frac{u_\infty}{u_c}R_{11}\right),$$

$$R_4 = e^{2\alpha\gamma}\left(0{,}5 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{2\xi} - \frac{1}{4\xi} + \frac{\alpha\gamma^2}{2\xi} - \frac{\gamma}{2\xi} + \frac{1}{4\alpha\xi}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{4\xi} - \frac{1}{4\alpha\xi},$$

$$R_5 = e^{2\alpha\gamma}\left(\frac{1}{4\xi} - \frac{\alpha\gamma}{2\xi} - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-2\xi}}{4\xi},$$

$$R_6 = e^{2\alpha\gamma}\left(\gamma + \frac{\alpha\gamma^2}{\xi} + \gamma^2 - \frac{\gamma}{2\alpha} + \frac{\alpha\gamma^2}{\xi} - \frac{\gamma^2}{2\xi} + \frac{\gamma}{2\alpha\xi} + \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{1}{4\alpha^2\xi}\right) + \frac{1}{4\alpha^2\xi} - \frac{1}{4\alpha^2},$$

$$R_7 = -\gamma e^{2\alpha\gamma}\left(\frac{\alpha\gamma}{\xi} + 1\right), \quad R_8 = e^{2\alpha\gamma}\left(\alpha + \frac{\alpha^2\gamma}{\xi} + \alpha\gamma + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\xi}\right),$$

$$R_9 = -\alpha e^{2\alpha\gamma}\left(\frac{\alpha\gamma}{\xi} + 1\right),$$

$$R_{10} = e^{2\alpha\gamma}\left(-\frac{\alpha\gamma}{\xi^2} + \frac{1}{4\xi^2} - \frac{\alpha\gamma^2}{2\xi^2} + \frac{\gamma}{2\xi^2} - \frac{1}{4\alpha^2\xi^2}\right) + \frac{1}{4\alpha\xi^2} - \frac{1}{4\xi^2},$$

$$R_{11} = e^{2\alpha\gamma}\left(\frac{\alpha\gamma}{2\xi^2} - \frac{1}{4\xi^2}\right) + e^{-2\xi}\left(\frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{2\xi}\right), \quad \gamma = \frac{u_\infty}{u_c} - 1$$

($\Pr$ — число Прандтля газа).

В силу того что уравнения (2.2) имеют особенность в точке $x = 0$, начальные условия без учета высших порядков малости для $x \to 0$ примут вид

$$(2.3) \quad \alpha_0 = \left[\frac{4\nu x}{r_c^2 u_c\left(\frac{\gamma^3}{3} + \gamma^2\right)}\right]^{0,5}, \quad \xi_0 = \alpha_0\left[\frac{\frac{\gamma^2}{2} + \left(\frac{\gamma^4}{4} + \frac{\gamma^3}{2} + \frac{\gamma^2}{2}\right)^{0,5}}{\gamma + 1}\right].$$

Таким образом, задача об аэродинамическом формовании в данной постановке сводится к численному решению систем (1.1) и (2.2) при соответствующих граничных условиях. Процесс итераций строился на близости к нулю с заранее заданной точностью результирующей продольной силы в конце участка формования. В качестве исходных взяты данные, отвечающие реальным режимам формования полимера полиэфиртерефталата (ПЭТФ): $r_{c0} = 0{,}0125$ см, $T_{c0} = 300$ °С, $T_\infty = 17$ °С, $G = 0{,}029$ г/с, длина участка формования $L_1 = 80$ см, молекулярный вес полимера $M = 25\,000$ у. е.

На рис. 2, 3 приведены зависимости $r_c(x)$ и $T_c(x)$, полученные для $u_\infty = 3$; 5; 10 м/с — линии *1*—*3* (без перехода на турбулентный режим). Из расчетов следует, что обдув волокна вытягивающим потоком ведет к довольно быстрому его охлаждению, при этом, несмотря на сравнительно большое отличие в скоростях u_∞, текущие значения температур струи довольно близки (отличие между кривой *1* и *3* составляет не более 15 %). Из-за того что вязкость полимера быстро растет с уменьшением температуры, диаметр нити также довольно быстро достигает постоянного значения. С увеличением скорости обдува конечный диаметр струи несколько уменьшается, а зона интенсивного его изменения по длине сокращается.

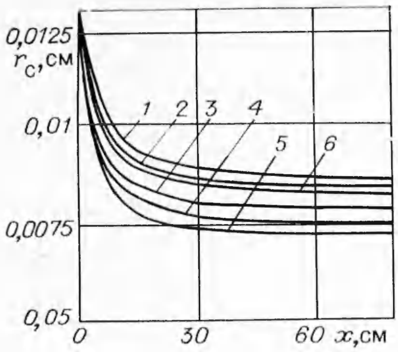

Рис. 2

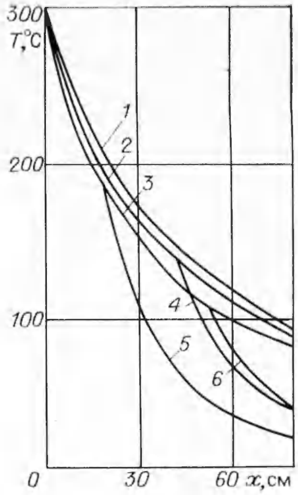

Рис. 3

3. Смешанный режим обтекания. В реальных условиях пограничные слои на нитях могут быть как ламинарными, так и турбулентными, так как длина зоны формования может достигать нескольких десятков тысяч по диаметру калибров фильеры. В [5, 13] показано, что турбулентный режим обтекания волокна отвечает текущему числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_x = x(u_\infty - u_c)/\nu$ порядка 10^5, при этом теплообмен и силовое взаимодействие описываются рядом близких критериальных соотношений, приведенных в [1, 5, 12, 13]. В данных расчетах использованы критериальные соотношения из [1, 13]:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}42\mathrm{Re}^{0{,}334},\quad C_f = 0{,}3745\mathrm{Re}^{-0{,}61},\quad \mathrm{Re} = 2r_c(u_\infty - u_c)/\nu. \tag{3.1}$$

В настоящее время нет достаточно четкой теории турбулентных и переходных слоев на тонких осесимметричных телах, поэтому для проведения оценок будем считать, что ламинарный режим обтекания существует до достижения Re_x критического значения, после чего начинается полностью развитый турбулентный пограничный слой.

В этом случае расчет сначала ведется по уравнениям (1.1) и (2.2), а затем — по (1.1) и (3.1). На рис. 2, 3 приведены распределения по длине участка формования r_c и T_c для следующих режимов: критическому $\mathrm{Re}_x = 10^5$ и скорости $u_\infty = 5$ м/с соответствует координата точки перехода $x_* = 42$ см (кривая *4*); $u_\infty = 10$ м/с отвечает $x_* = 17$ см (кривая *5*); $\mathrm{Re}_x = 3 \cdot 10^5$ и $u_\infty = 10$ м/с соответствует $x_* = 53$ см (кривая *6*). Из рис. 2 и 3 видно, что введение соотношений турбулентного пограничного слоя в расчетную схему существенно влияет на текущую температуру струи и в меньшей степени на ее радиус, что связано с вязкостью охлажденной струи.

4. Вытягивание с помощью эжектора. В этом случае вятягивапие струи расплава из фильеры осуществляется турбулентным потоком газа, движущимся в эжекторе (см. рис. 1). Полагалось, что до эжектора струя движется в неподвижном газе и на ней развивается ламинарный пограничный слой. Расчет до зоны эжектора при заданной силе тяги — частный случай поставленной здесь задачи, он проведен в ряде работ (см., например, [10]). При эжекторном вытягивании расчет в зоне формования ведется по (1.1) и (2.2) для $u_\infty = 0$, а в зоне эжектора — по (1.1) и (3.1) при заданной постоянной по сечению и длине эжектора скорости турбулентного потока. В уравнении баланса сил из (1.1) в доэжекторной зоне к слагаемым прибавляется член $F_{\text{тян}}$ — тянущее усилие, создаваемое эжектором: $F = F_{\text{тян}} + F_{\text{тр}} + F_{\text{ин}} + F_g$.

Расстояние от фильеры до эжектора L_1, длина эжектора L_2 и скорости газа в эжекторе соответствуют параметрам реальной конструкции для формования волокна. На рис. 4 и 5 представлены зависимости $r_c(x)$ и $T_c(x)$ при $L_1 = 60$ см, $L_2 = 20$ см, а скорость газа в эжекторе $u_{\infty\text{эж}} = 10;\ 50;\ 100$ м/с (кривые *1*—*3*). Как следует из расчетов, процесс вытя-

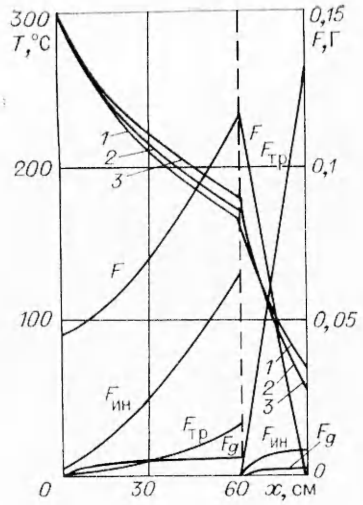

Рис. 4

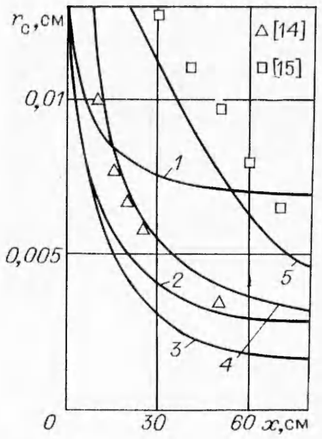

Рис. 5

гивания завершается на участке L_1, что связано с энергичным охлаждением струи расплава в эжекторе для всех приведенных скоростей эжектирующего газа (рис. 4, кривые *1—3*), причем распределение текущего радиуса струи по ее длине существенно зависит от скорости газа в эжекторе (рис. 5, кривые *1—3*). На рис. 4 показано распределение по длине струи абсолютных значений составляющих баланса сил для $u_{\infty эж} = 100$ м/с. Максимальное значение реологической силы на входе в эжектор отвечает силе тяги эжектора. Наибольшее сопротивление вытягиванию в доэжекторной зоне ($x < 60$ см) оказывает сила инерции (~ 55 % тянущего усилия), так как струя ускоряется от $\sim 0{,}5$ до ~ 20 м/с; аэродинамическое сопротивление около 11 %. Вклад силы тяжести в тянущее усилие невелик (меньше 5 %). В эжекторной зоне (60 см $< x <$ $<$ 80 см) основная действующая сила — сила трения. Поскольку теплоотдача струи в эжекторе высока, то из-за большой вязкости ускорение струи мало и сила инерции составляет $\sim$ 6 % от силы трения, вклад же веса струи в тянущее усилие незначителен (меньше 1 %).

В общем случае выходящая из эжектора струя газа создает дополнительное тяговое усилие, не учтенное в описываемой модельной задаче, поскольку принципиально новых моментов заэжекторная зона в рассмотренную расчетную схему не вносит, а в реальных условиях волокно сразу же из заэжекторной зоны без увеличения скорости отводится в приемное устройство. Эксперименты по формованию из расплава с помощью эжектирующего струю кольцевого сопла проведены в [8, 9], но из-за неполноты их описания для оценки полученных результатов были использованы результаты [14, 15] по формованию волокон в покоящемся газе для заданной скорости струи. Сравнение расчетных результатов с экспериментальными говорит о корректности предложенных в настоящей работе модели течения и метода решения. На рис. 5 кривая *4* представляет собой текущий радиус струи расплава ПЭТФ для условий формования [14], а *5* — для условий формования [15]. Максимальное отклонение расчетных данных от экспериментальных не превышает 20 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kase S., Matsuo T.** Studies on melt spinning. 1. Fundamental equations on the dynamics of melt spinning // J. Polymer Sci.— 1965.— V. A3, N 7.
2. **Matsuo T., Yasuda H., Sugiyama H.** Phenomenal theories for melt spinning process and their applications // Тр. II Междунар. симп. по хим. волокнам.— Калинин, 1977.— Т. 2.
3. **Ентов В. М., Ярин А. Л.** Динамика струй капельной жидкости.— М., 1979.— (Препринт/ИПМ АН СССР; № 127).

4. Ентов В. М., Ярин А. Л. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // Итоги науки и техники ВИНИТИ. МЖГ.— 1984.— Т. 18.
5. Зябицкий А. Теоретические основы формования химических волокон.— М.: Химия, 1979.
6. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров.— М.: Химия, 1979.
7. Структура волокон/Под ред. Д. В. С. Хёрла.— М.: Химия, 1968.
8. Генис А. В., Фильберт Д. В., Синдеев А. А. Баланс сил при аэродинамическом формовании нитей из расплава полипропилена // Хим. волокна.— 1978.— № 3.
9. Генис А. В., Фильберт Д. В., Синдеев А. А. Аэродинамическое формование волокна из расплава // Хим. волокна.— 1978.— № 1.
10. Елисеев В. И., Флеер Л. А., Белозеров Б. П. Прямая и обратная сопряженные задачи теории формования синтетических нитей // Тепломассообмен-VII.— Минск: ИТМО, 1984.— Т. 5, ч. 2.
11. Bourne D. E., Elliston D. G. Heat transfer through the axially symmetric boundary layer on a moving circular fibre // Intern. J. Heat Mass Transfer.— 1976.— V. 13, N 3.
12. Боровский В. Р., Шелиманов В. А. Теплообмен цилиндрических тел малых радиусов и их систем.— Киев: Наук. думка, 1985.
13. Matsui M. Air drag on a continuous filament in melt spinning // Trans. Soc. Rheol.— 1976.— V. 20, N 3.
14. Wilhelm G. Die Abkühlung eines aus der Schmelze gesponnenen polymeren Faden im Spinnschucht // Kolloid-Zeitschrift.— 1966.— Bd 208, N 2.
15. Köhler P. Berührungslose Bestimmung von Temperaturen und Durchmessern an einem aus der Schmelze gesponnenen Faden // Chemie-Ing.-Techn.— 1971.— V. 43, N 5.

Поступила 18/VIII 1987 г.

УДК 532.6.011.72

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ПЕРЕТЯЖКЕ СТЕКЛООБРАЗНОГО ВЕЩЕСТВА В ТОНКУЮ НИТЬ

Е. М. Дианов, С. М. Перминов, В. Н. Перминова, В. К. Сысоев

(Москва)

Данная работа посвящена численному моделированию физических эффектов, возникающих при перетяжке стеклообразного вещества через высокотемпературное вязкопластичное состояние из заготовки в тонкую нить. Рассматриваемая задача относится к числу так называемых задач со «свободной границей», так как поверхность сильно вязкого расплавленного вещества, не соприкасающаяся с какими-либо поверхностями, меняет свою форму в соответствии с законами динамического равновесия между силами гравитации, поверхностного натяжения и пр. Характерная особенность задачи — наличие больших градиентов температуры, вязкости и скоростей жидкости в зоне перетяжки. Исследованы эффект устойчивой перетяжки заготовки в тонкую нить, а также условия, характер и причины возникающих из-за недогрева или перегрева эффектов каплеобразования и обрыва нити. Эта задача имеет большой практический интерес, поскольку освещает вопросы одной из наиболее быстро развивающихся современных прецизионных технологий — стабильности вытяжки световодов из кварцевого стекла [1—4].

Перетяжка кварцевого стекла исследовалась как осесимметричное вертикальное течение сильновязкой жидкости со свободной границей и переменной вязкостью. Вязкость однозначно зависит от температуры кварцевого стекла [5] в зоне перетяжки и меняется от 10^4 до 10^{20} П. Условия ввода тепла в заготовку считаются заданными.

Изучаются связанные полные нелинейные нестационарные уравнения теплопередачи и течения вязкой несжимаемой жидкости, неразрывности и свободной границы [2, 4, 6]:

$$(1)\qquad \frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial r}+v\frac{\partial T}{\partial z}=-\frac{1}{\rho C_p}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\right)k(T)\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\right)T+$$
$$+\frac{1}{\rho C_p}k(T)\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T;$$