

УДК 534.232, 550.834

Возбуждение сейсмоакустических волн сингулярным источником, действующим на границе жидкого слоя и пороупругого полупространства

Х.Х. Имомназаров¹, А.А. Михайлов¹, К.С. Гозиев², А.Т. Омонов³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан, 712000

³Ташкентский государственный экономический университет (ТГЭУ), Ташкент, Узбекистан, 100063

E-mail: imom@omzg.sccc.ru (Имомназаров Х.Х.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А., Гозиев К.С., Омонов А.Т. Возбуждение сейсмоакустических волн сингулярным источником, действующим на границе жидкого слоя и пороупругого полупространства // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 49–59.

Рассматриваются результаты моделирования распространения сейсмоакустических волн на основе численного решения двумерной прямой динамической задачи для слоистой пористой среды. Распространение сейсмических волн в пористой среде, насыщенной флюидом, при отсутствии потери энергии описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка в декартовой системе координат. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей упругой вмещающей среды, скорости насыщающей жидкости, компонент тензора напряжений и давления жидкости. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования интегрального преобразования Лагерра по времени с конечно-разностной аппроксимацией по пространственным координатам. Используемый алгоритм решения позволяет эффективно проводить расчёты при моделировании в сложно-построенной пористой среде и исследовать возникающие в таких средах волновые эффекты.

DOI: 10.15372/SJNM20240104

EDN: KTIZSS

Ключевые слова: пороупругость, сейсмоакустическая волна, волна Рэлея, волна Стоуни, сингулярный источник.

Imomnazarov Kh.Kh., Mikhailov A.A., Goziev K.S., Omonov A.T. Excitation of seismoacoustic waves from a singular source acting on the boundary of a liquid layer and a poroelastic half-space // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 49–59.

The results of seismoacoustic wave propagation modeling based on a numerical solution of a direct dynamic problem for a porous medium are considered. The propagation of seismic waves in a porous medium saturated with a fluid in the absence of energy loss is described by a system of first-order differential equations in a Cartesian coordinate system. The initial system is written as a hyperbolic system in terms of the velocities of the elastic host medium, the velocity of the saturating fluid, the components of the stress tensor, and the pressure of the fluid. For the numerical solution of the problem, a method of complexing the integral Laguerre transform in time with a finite-difference approximation in the spatial coordinates is used. The solution algorithm makes it possible to efficiently carry out calculations of modeling in a complexly constructed porous medium and to investigate the wave effects that arise in such media.

Keywords: poroelasticity, seismoacoustic wave, Rayleigh wave, Stoneley wave, singular source.

Введение

Изучение взаимосвязей между волновыми процессами, происходящими в различных слоях Земли, является одним из важнейших направлений в геофизике. Значительный интерес представляют волны низких частот в задачах гидроакустики, что связано с особенностями их распространения: начиная с определенного соотношения между длиной упругой волны и глубиной бассейна, волны распространяются не только в водной толще океана, но и в его поддонных слоях. При этом часть излучаемой волновой энергии уносится поверхностными волнами на границе раздела этих сред. Увеличение числа исследуемых типов волн, характеризующихся разными скоростями распространения, существенно расширяет возможности дистанционного акустического мониторинга как характеристик источников излучения, так и параметров водного и поддонных слоев. На практике это необходимо для решения многих задач, таких как сейсмическая разведка и предсказание землетрясений и цунами. В первую очередь, значительный интерес представляет исследование возбуждения сейсмическими источниками акустических волн в океане с целью выявления на основе анализа волновых полей признаков назревающего подводного землетрясения [1].

Важные для практики вопросы теории взаимодействия акустических и сейсмических волн возникают уже в рамках простых моделей, например, когда океан представляется однородным жидким слоем, покрывающим однородное изотропное пористое полупространство. Рассмотрение таких моделей позволяет детально изучить возбуждение и распространение различных типов объёмных и поверхностных волн и получить относительно простые аналитические выражения для волновых полей и энергетических характеристик сейсмоакустического излучения. Кроме того, результаты анализа моделей сред с небольшим числом однородных слоев необходимы для контроля правильности работы алгоритмов решения более сложных задач расчёта волновых полей в слоистых средах. В более ранних работах уже решалась задача о распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, для случаев гармонических звуковых источников: монопольного (типа пульсирующей сферы [2]) и дипольного (две близко расположенные пульсирующие в противофазе сферы [3]). В указанных работах [2] и [3] рассмотрена ситуация, когда толщина слоя очень мала по сравнению с длинами излучаемых волн. Для данного предельного случая вычислены мощности излучения продольной и поперечной волн в твердой среде, а также поверхностной волны Рэлея, в которую при малой толщине слоя переходит фундаментальная мода.

Известно, что многие породы являются пористыми с различными свойствами пористости и проницаемости. При этом базовые математические модели фильтрации дополняются уравнением упругости Ламе для скорости перемещений среды. Важнейшей особенностью математических моделей пороупругости является сильная связь между уравнениями модели. Так, уравнение упругости включает объёмную силу, которая пропорциональна градиенту давления, а уравнение фильтрации, в свою очередь, содержит сжимаемость среды, пропорциональную дивергенции скорости перемещений в обратном гидродинамическом приближении.

Используемый в данной работе алгоритм решения поставленной динамической задачи на основе преобразования Лагерра по времени можно рассматривать как аналог известного спектрального метода при использовании Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр t — степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от преобразования Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость

от этого параметра. В отличие от конечно-разностного метода, в спектральном методе с помощью аналитического преобразования можно свести исходную задачу к решению дифференциальной системы уравнений, в которой имеются производные только по пространственным координатам. Это позволяет применить известные устойчивые разностные схемы для последующего решения подобных систем. Такой подход является эффективным при решении нестационарных динамических задач для резко-контрастных и пористых сред. Так как из-за наличия второй продольной волны с малой скоростью при использовании разностных схем по всем координатам для устойчивости решения необходимо задание согласованного малого шага дискретизации и по времени, и по пространству, что неизбежно увеличивает объём требуемых вычислений. В отличие от спектрально метода на основе преобразования Фурье используемый алгоритм решения динамических задач позволяет в итоге получить систему алгебраических уравнений, матрица системы которых имеет хорошую обусловленность, что улучшает сходимость итерационного метода их решения. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [4, 5], а затем развит для задач вязко-упругости [6, 7]. В указанных работах рассматриваются отличия описанного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения преобразования Лагерра в отличие от разностного метода и спектрального метода Фурье, а также приводится сравнение точности аналитического решения и решения, получаемого на основе преобразования Лагерра для решения прямых задач распространения колебаний в однородной среде.

В данной работе исследуются результаты численного моделирования распространения сейсмоакустических волн от сингулярного источника. Решена задача о возбуждении сейсмоакустических волн в системе однородного изотропного пористого полупространства, покрытого жидким слоем, при действии на поверхность пористой среды перпендикулярного к ней сингулярного источника, т. е. рассматривается идеальная среда. Детально проанализировано возбуждение мод с помощью численного моделирования. Обнаружена зависимость распределения энергии между разными типами волн от расположения источника относительно границы жидкого слоя и пористого полупространства.

1. Постановка задачи

Пусть слой жидкости $\Pi_L = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in R^1, 0 < x_2 < L\}$ лежит в полуплоскости $R_-^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R^1, x_2 < 0\}$, заполненной пористой средой, насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в жидком слое и пористом полу-пространстве при отсутствии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [8–12]: для слоя жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{F}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} - \rho c_p^2 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in \Pi_L,$$

и пористого полупространства

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0s}} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in R_-^2,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \left(\frac{\rho_{0l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\rho_{0s}}{\rho_0} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in R_-^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \left(K - (\gamma + K) \frac{\rho_{0s}}{\rho_0} \right) \operatorname{div} \vec{u} + (\gamma + K) \frac{\rho_{0l}}{\rho_0} \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in R_-^2,$$

$$u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = \sigma_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} = 0, \quad \vec{x} \in \Pi_L \bigcup R_-^2, \quad (2)$$

$$p|_{x_2=L} = 0, \quad t > 0, \quad x_1 \in R^1, \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости упругого пористого тела, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости жидкости в слое и в пористом полупространстве, p — давление в порах и в жидким слое, σ_{ik} — тензор напряжений двухскоростной среды, $\vec{F} = (F_1, F_2)$ — вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0l} + \rho_{0s}$ — плотность насыщенной пористой среды, $\rho_{0s} = \rho_{0s}^f(1 - d_0)$ — парциальная плотность пористого тела, $\rho_{0l} = \rho_{0l}^f d_0$ — парциальная плотность жидкости в порах, ρ_{0s}^f и ρ_{0l}^f — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 — пористость, ρ — плотность жидкости в слое, δ_{ik} — символ Кронекера, c_p — скорость продольной волны в жидкости, $K = \lambda + 2\mu/3$, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — коэффициенты Ламе, $\gamma > 0$ — упругий модуль гетерофазной среды. Упругие модули K , μ , γ выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и скорость продольных волн c_{p1} , c_{p2} [13, 14]:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_{0s} c_s^2, \\ K &= \frac{\rho_0}{2} \frac{\rho_{0s}}{\rho_{0l}} \left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0l}}{\rho_0} c_s^2 - \sqrt{\left(c_{p1}^2 - c_{p2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0l} \rho_{0s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right), \\ \gamma &= \frac{\rho_0}{2} \left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0s}}{\rho_0} c_s^2 + \sqrt{\left(c_{p1}^2 - c_{p2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0l} \rho_{0s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что на границе между слоем Π_L и полупространством R_-^2 выполняются условия склейки

$$[\Sigma_{i2}] = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \left[\frac{\rho_{0l}}{\rho_0} p \right] = 0, \quad [(1 - d_0)u_2 + d_0 v_2] = 0, \quad [v_2] = 0, \quad t > 0, \quad x_1 \in R^1,$$

где $\Sigma_{i2} = \sigma_{ik} + p \delta_{ik}$, $[u] = u|_{x_2=0+} - u|_{x_2=0-}$.

Вторая (медленная) продольная волна впервые зарегистрирована Т. Plona в 1980 г. [15] в водонасыщенных пористых средах искусственного происхождения. В пористой среде естественного происхождения с жестким скелетом, заполненной жидкостью, вторая продольная волна впервые зарегистрирована в работах О. Kelder, D. Smeulders [16, 17]. Из работ [9, 18, 19] следует, что величина второй продольной волны на порядок меньше первой продольной волны.

2. Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени [4, 5]

$$\vec{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht) \quad (4)$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2) l_m^{\alpha}(ht), \quad (5)$$

где $l_m^{\alpha}(ht)$ — функции Лагерра.

В результате данного преобразования исходная задача (1)–(3) в полупространстве сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho_{0s}} \frac{\partial \sigma_{ik}^m}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= f_i^m - h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \\ \frac{h}{2} v_i^m + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= f_i^m - h \sum_{n=0}^{m-1} v_i^n, \\ \frac{h}{2} \sigma_{ik}^m + \mu \left(\frac{\partial u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^m}{\partial x_k} \right) + \left(\lambda - \frac{\rho_s}{\rho_0} K \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u}^m - \frac{\rho_s}{\rho_0} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_{ik}^n, \quad (6) \\ \frac{h}{2} P^m - \left(K - (\gamma + K) \frac{\rho_{0s}}{\rho_0} \right) \operatorname{div} \vec{u}^m + (\gamma + K) \frac{\rho_{0l}}{\rho_0} \operatorname{div} \vec{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} P^n, \\ P^m |_{x_2=L} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что система (6) содержит в себе преобразованную линеаризованную систему Эйлера. Для решения полученной задачи (6) воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на сдвинутых сетках с четвертым порядком точности. Для этого в расчётной области введём в направлении координаты $z = x_1$ сетки ωz_1 и $\omega z_{1/2}$ с шагом дискретизации Δz , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta z/2$:

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z), \quad \omega z_{1/2} = \left(x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2} \right), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично, введём в направлении координаты $x = x_2$ сетки ωx_1 и $\omega x_{1/2}$ с шагом дискретизации Δx , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta x/2$:

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z), \quad \omega x_{1/2} = \left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z \right), \quad i = 0, \dots, N.$$

На данных сетках введём операторы дифференцирования D_x и D_z , аппроксимирующие производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ с четвертым порядком точности по координатам $z = x_1$ и $x = x_2$:

$$D_x u(x, z) = \frac{9}{8\Delta x} \left[u\left(x + \frac{\Delta x}{2}, z\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}, z\right) \right] - \frac{1}{24\Delta x} \left[u\left(x + \frac{3\Delta x}{2}, z\right) - u\left(x - \frac{3\Delta x}{2}, z\right) \right],$$

$$D_z u(x, z) = \frac{9}{8\Delta x} \left[u\left(x, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - u\left(x, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] - \frac{1}{24\Delta x} \left[u\left(x, z + \frac{3\Delta z}{2}\right) - u\left(x, z - \frac{3\Delta z}{2}\right) \right].$$

Определим искомые компоненты вектора решения в соответствующих узлах сеток:

$$u_1^m(x, z), \quad \nu_1^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_1,$$

$$u_2^m(x, z), \quad \nu_2^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2},$$

$$\sigma_{11}^m(x, z), \quad \sigma_{22}^m(x, z), \quad P^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_1,$$

$$\sigma_{12}^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}.$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения \vec{W} в следующем виде:

$$\vec{W}(m) = \left(\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_{M+N}(m) \right)^\top,$$

$$\vec{V}_{i+j} = \left(u_1^{i,j}, u_2^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \nu_1^{i,j}, \nu_2^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \sigma_{11}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{22}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{12}^{i,j+\frac{1}{2}}, P^{i+\frac{1}{2}, j} \right)^\top.$$

Тогда данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2} E \right) \vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1),$$

здесь A_Δ — квадратная матрица $(M + N + 1)$ -го порядка, E — единичная матрица $(M + N + 1)$ -го порядка, \vec{F}_Δ — известный вектор-столбец размерности $(M + N + 1)$. В силу громоздкости мы их опускаем. В результате матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов, типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций [5–7].

3. Численные результаты

В данной работе рассматриваются результаты численного моделирования распространения сейсмоакустических волн в системе однородного изотропного пористого полупространства, покрытого жидким слоем. Моделировалось возбуждение сейсмоакустических волн от сингулярного источника, расположенного на границе пористой среды и водного слоя и действующего перпендикулярно к границе раздела. Физические характеристики среды были заданы следующими:

- 1) верхний слой (вода): $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, $c_p = 1.5 \text{ км}/\text{с};$
- 2) нижние полупространство (песчаник Berea SandStone [19, 20]): $\rho_{0s}^f = 2 \text{ г}/\text{см}^3$, $\rho_{0l}^f = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, $c_{p1} = 2 \text{ км}/\text{с}$, $c_{p2} = 0.5 \text{ км}/\text{с}$, $c_s = 1.3 \text{ км}/\text{с}$, $d_0 = 0.1$.

Толщина верхнего водного слоя — 3 км.

Волновое поле моделировалось от точечного источника, типа “вертикальная сила”, расположенного на границе водного слоя и пористого полупространства. Временной сигнал в источнике задавался в виде

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_o(t-t_0)^2}{\tilde{\gamma}^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 10$ Гц, $t_0 = 0.15$ с.

На рисунке 1 представлены мгновенные снимки волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ в фиксированный момент времени $T = 2$ с для двух вариантов характеристики нижнего полупространства: в случае упругой (слева) и пористой (справа) сред. Координаты точки источника $x_0 = 4$ км, $z_0 = 3$ км.

Из рис. 1 видно, что при возбуждении волн источником, расположенным на границе раздела, образуются соответствующие типы волн для упругой и пористой среды. В случае пористой среды — две продольные волны (быстрая и медленная) и поперечная волна. По нижней границе водного слоя распространяется волна Стоунли, которая в пористой среде генерирует коническую медленную продольную волну.

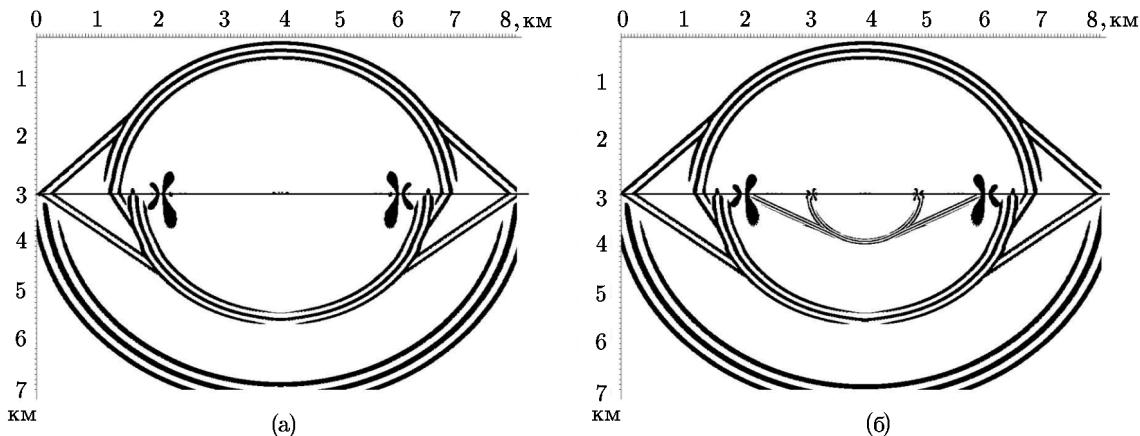


Рис. 1. Мгновенные снимки волнового поля для $u_z(x, z)$ компоненты в момент времени $T = 2$ с. Слева (а) — нижнее полупространство — упругая среда, справа (б) — пористая среда

На рис. 2 представлены мгновенные снимки волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ в фиксированный момент времени $T = 2$ с для двух случаев координат расположения источника. Слева (а) — источник расположен в воде на 10 метров выше границы раздела. Справа (б) — источник в пористой среде на 10 метров ниже границы раздела.

Из рис. 2 видно, что глубина проникновения волн Стоунли в слои выше и ниже границы раздела больше в случае расположения источника в воде, а значит, большая начальная амплитуда генерации этих волн. Граница раздела воды и пористой среды изображена на рис. 2 сплошной горизонтальной линией. При удалении точки возбуждения волн от границы раздела сред амплитуда генерируемых волн Стоунли значительно уменьшается.

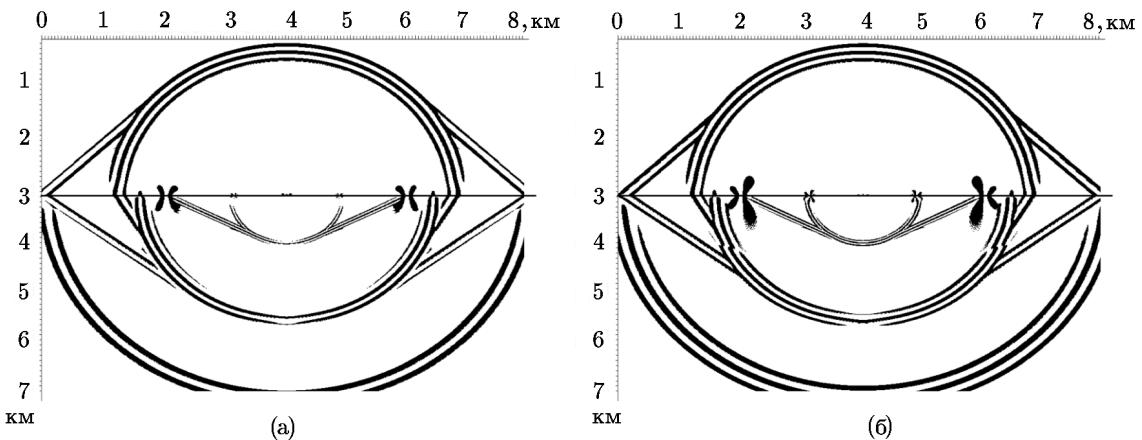


Рис. 2. Мгновенные снимки волнового поля для $u_z(x, z)$ компоненты в момент времени $T = 2$ с. Слева (а) — источник в воде, справа (б) — источник в пористой среде

На рис. 3 представлены расчётные сейсмопротяжности для вертикальной компоненты скорости смещений $u_z(x, z)$ для двух случаев координат точек расположения источника. Слева (а) — источник располагается на границе раздела воды и пористой среды с координатами $x_0 = 4$ км, $z_0 = 3$ км. Справа (б) — источник в воде на 10 метров выше границы раздела. Точки регистрации сейсмоакустических колебаний были расположены по линии, проходящей перпендикулярно границе раздела через точку расположения источника. Из представленных на рис. 3 сейсмопротяжностей видно, что амплитуда генерируемой в пористой среде медленной продольной волны больше в случае расположения источника в воде вблизи границы с пористой средой, чем в случае расположения источника на границе, так как тогда большая часть энергии находится в быстрой продольной волне.

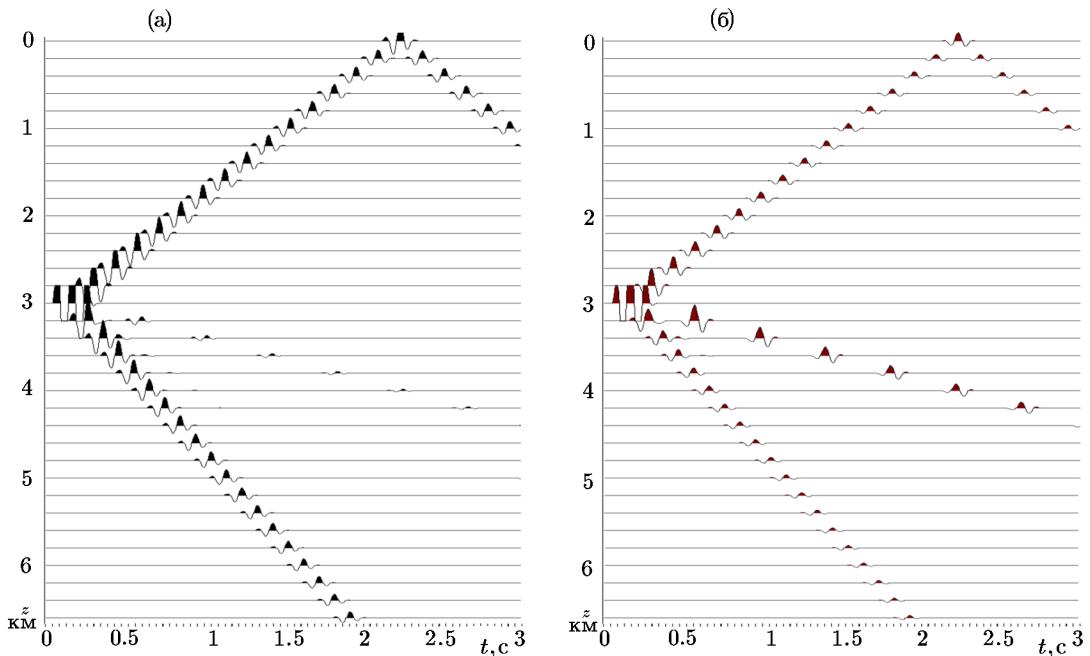


Рис. 3. Сейсмопротяжности для компоненты $u_z(x, z)$ для двух случаев координат источника. Слева (а) — источник на границе пористой среды. Справа (б) — источник в воде на 10 метров выше границы

Литература

1. **Петухов Ю.В., Разин А.В., Разин В.А.** Возбуждение сейсмоакустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе жидкого слоя и упругого полупространства // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 3. — С. 415–422.
2. **Лапин А.Д.** Волны в твердом полупространстве, покрытом жидким слоем // Акустический журнал. — 1992. — Т. 38, № 2. — С. 364–367.
3. **Лапин А.Д.** Возбуждение волн в упругом полупространстве дипольным источником, расположенным в покрывающем слое жидкости // Акустический журнал. — 1992. — Т. 38, № 3. — С. 559–562.
4. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — № 12. — P. 105–110.
5. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A.** Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9, № 4. — P. 1523–1541.
6. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.** Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // J. Pure and Applied Geophysics. — 2003. — № 160. — P. 1207–1224.
7. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.** Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. — 2003. — № 51. — P. 37–48.
8. **Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И.** Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. — 1993. — № 1. — С. 100–111.
9. **Blokhin A.M., Dorovsky V.N.** Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum. — New York: Nova Science, 1995.
10. **Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э., Омонов А.Т.** Прямая и обратная динамическая задача пороупругости // Вестник Томского гос. университета. Математика и механика. — 2022. — № 75. — С. 87–99.
11. **Bliyeva D., Baigereyev D., and Imomnazarov Kh.** Computer simulation of the seismic wave propagation in poroelastic medium // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, № 8. — Article № 1516. — DOI:10.3390/sym14081516.
12. **Imomnazarov Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium: I. Excitation of oscillations of the magnetic field by the surface rayleigh wave // Math. Comput. Modelling. — 1996. — Vol. 24, № 1. — P. 79–84. — DOI:10.1016/0895-7177(96)00082-9.
13. **Имомназаров Х.Х.** Несколько замечаний о системе уравнений Био // Докл. РАН. — 2000. — Т. 373, № 4. — С. 536–537.
14. **Imomnazarov Kh.Kh.** Some remarks on the biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. — 2000. — Vol. 13, № 3. — P. 33–35. — DOI:10.1016/S0893-9659(99)00182-2.
15. **Plona T.J.** Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. // Appl. Phys. Lett. — 1980. — Vol. 36. — P. 259–261.
16. **Kelder O., Smeulders D.M.J.** Measurement of ultrasonic bulk properties of water-saturated porous media. — EAGE Amsterdam'96 Extendend abstracts book, 1996. — DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201408645>.
17. **Kelder O., Smeulders D.M.J.** Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone // Geophysics. — 1997. — Vol. 62, № 6. — P. 1794–1796.

18. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — Vol. 28, № 2. — P. 168–178.
19. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — Vol. 28, № 2. — P. 179–191.
20. **Winkler K.W., Liu H.L., Johnson D.L.** Permeability and borehole Stoneley waves: comparison between experiment and theory // Geophysics. — 1989. — Vol. 54. — P. 66–75.

Поступила в редакцию 14 сентября 2023 г.

После исправления 3 ноября 2023 г.

Принята к печати 19 ноября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Petukhov Yu.V., Razin A.V., Razin V.A.** Vozbuzhdenie seismoakusticheskikh voln garmonicheskim silovym istochnikom, deistvuyushchim na granice zhidkogo sloya i uprugogo poluprostranstva // Akusticheskii zhurnal. — 2009. — T. 55, № 3. — S. 415–422.
2. **Lapin A.D.** Volny v tverdom poluprostranstve, pokrytom zhidkim sloem // Akusticheskii zhurnal. — 1992. — T. 38, № 2. — S. 364–367.
3. **Lapin A.D.** Vozbuzhdenie voln v uprugom poluprostranstve dipol'nym istochnikom, raspolozhennym v pokryvayushchem sloe zhidkosti // Akusticheskii zhurnal. — 1992. — T. 38, № 3. — S. 559–562.
4. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — № 12. — P. 105–110.
5. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A.** Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9, № 4. — P. 1523–1541.
6. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.** Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // J. Pure and Applied Geophysics. — 2003. — № 160. — P. 1207–1224.
7. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.** Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. — 2003. — № 51. — P. 37–48.
8. **Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Romenskii E.I.** Volnovye processy v nasyshchennykh poristykh uprugodeformiruemых sredakh // Fizika goreniya i vzryva. — 1993. — № 1. — S. 100–111.
9. **Blokhin A.M., Dorovsky V.N.** Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. — New York: Nova Science, 1995.
10. **Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E., Omonov A.T.** Pryamaya i obratnaya dinamicheskaya zadacha porouprugosti // Vestnik Tomskogo gos. universiteta. Matematika i mehanika. — 2022. — № 75. — S. 87–99.
11. **Bliyeva D., Baigereyev D., and Imomnazarov Kh.** Computer Simulation of the Seismic Wave Propagation in Poroelastic Medium // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, № 8. — Article № 1516. — DOI:10.3390/sym14081516.
12. **Imomnazarov Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium: I. Excitation of oscillations of the magnetic field by the surface rayleigh wave // Math. Comput. Modelling. — 1996. — Vol. 24, № 1. — P. 79–84. — DOI:10.1016/0895-7177(96)00082-9.
13. **Imomnazarov Kh.Kh.** Neskol'ko zamechanii o sisteme uravnenii Bio // Dokl. RAN. — 2000. — T. 373, № 4. — S. 536–537.

14. **Imomnazarov Kh.Kh.** Some remarks on the biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett.—2000.—Vol. 13, № 3.—P. 33–35.—DOI:10.1016/S0893-9659(99)00182-2.
15. **Plona T.J.** Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. // Appl. Phys. Lett.—1980.—Vol. 36.—P. 259–261.
16. **Kelder O., Smeulders D.M.J.** Measurement of Ultrasonic Bulk Properties of Water-Saturated Porous Media.—EAGE Amsterdam'96 Extendend abstracts book, 1996. Paper nr. C025.
17. **Kelder O., Smeulders D.M.J.** Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone // Geophysics.—1997.—Vol. 62, № 6.—P. 1794–1796.
18. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.—1956.—Vol. 28, № 2.—P. 168–178.
19. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.—1956.—Vol. 28, № 2.—P. 179–191.
20. **Winkler K.W., Liu H.L., Johnson D.L.** Permeability and borehole Stoneley waves: comparison between experiment and theory // Geophysics.—1989.—Vol. 54.—P. 66–75.

