УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧА О ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИНЫ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

С. Д. Алгазин, И. А. Селиванов*

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва, Россия
* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия
E-mails: algazinsd@mail.ru, shertors@gmail.com

Рассматривается решение задачи о флаттере пластины при смешанных граничных условиях. Математическая постановка задачи позволяет учитывать произвольные направления вектора набегающего потока. Для численного решения задачи предлагается использовать численный алгоритм без насыщения, который на редкой сетке позволяет с достаточной точностью определять критическую скорость флаттера. Представлены результаты расчетов для четырех материалов (титана, стали, алюминия, дюралюминия). На основе результатов расчетов получены аналитические зависимости критической скорости флаттера от направления вектора набегающего потока, а также от безразмерной скорости звука в пластине и толщины пластины. Приводятся собственные формы колебаний $\mathrm{Re}\,(\varphi)$, соответствующие критической скорости флаттера.

Ключевые слова: численные методы без насыщения, флаттер пластины, критическая скорость флаттера, аналитическая зависимость.

DOI: 10.15372/PMTF20220516

Введение. При проектировании современных летательных аппаратов особое внимание уделяется исследованию флаттера как одного из основных явлений аэроупругости. Для этого проводятся численное моделирование и физические эксперименты (см. [1]).

Прямоугольные ортотропные пластины часто применяются в конструкциях летательных аппаратов, поэтому изучение флаттера пластин и новых постановок задачи является актуальной проблемой.

Численному исследованию флаттера пластин посвящено большое количество работ (см., например, [2, 3]). В этих работах в основном изучаются определенные аспекты проблемы или строятся универсальные интерполяционные формулы, удовлетворяющие различным комбинациям граничных условий в классической постановке [4] в случае потока, направленного параллельно оси x. Исследованию флаттера пластин и оболочек посвящена работа [5].

В работах [6, 7] решалась задача о свободных колебаниях пластины при различных граничных условиях. Рассматривалась задача о флаттере пластины при смешанных граничных условиях в постановке, учитывающей произвольное направление вектора набегающего потока [8]. Для решения поставленной задачи разработан программный комплекс, позволяющий рассчитать критическую скорость флаттера v_{cr} и построить соответствующую ей собственную форму. С использованием предложенной интерполяционной формулы

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А20-120011690132-4.

может быть получено решение на различных сетках с достаточной сходимостью. Например, решения на сетках размером 9×9 и 19×19 совпадают с точностью до четвертого знака.

Не менее важной является проблема определения зависимостей критической скорости флаттера от различных параметров задачи (направления вектора скорости набегающего потока, характеристик материала пластины и ее толщины). С помощью таких зависимостей, в случае если подобраны необходимые коэффициенты, можно быстро и с высокой точностью определять критическую скорость, не проводя полное решение задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину с двумя жестко закрепленными и двумя свободно опертыми краями, которая в плоскости (x, y) занимает область S: $\{-a'/2 \leqslant x \leqslant a'/2,\ -b' \leqslant y \leqslant b'\}$.

Уравнение колебаний пластины, полученное с использованием поршневой теории для определения аэродинамического воздействия потока на колеблющуюся пластину, имеет вид [5]

$$\frac{Eh'^3}{12(1-\nu^2)}\,\Delta^2 w + \frac{\gamma p_0}{c_0}\,\boldsymbol{V}'\mathrm{grad}\,w + \frac{\gamma p_0}{c_0}\,\frac{\partial w}{\partial t} + \rho' h'\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где p_0, c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h' — толщина пластины; $\boldsymbol{V}'$ — вектор набегающего потока; ρ' — плотность материала пластины.

Полагая $w = \varphi'\,\mathrm{e}^{\omega' t}$, вводя собственное число λ' $(\rho' h' \omega'^2 + \omega'\gamma p_0/c_0 + \lambda' = 0)$ и дополняя уравнение колебаний соответствующими граничными условиями, получаем задачу на собственные значения [8].

Безразмерные параметры введем так же, как это сделано в [9]. В качестве характерного размера принимается половина длины в направлении x, т. е. $a = a'/2$, $b = b'/a$ (рис. 1), в качестве характерных параметров — величины p_0, c_0. В результате получаем задачу на собственные значения в области S: $\{-1 \leqslant x \leqslant 1, -b \leqslant y \leqslant b\}$:

$$L\varphi + k\boldsymbol{V}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \lambda\varphi, \qquad \rho h\omega^2 + k\omega + \lambda = 0, \qquad \boldsymbol{V} = (V_x, V_y),$$

$$L\varphi = D\Big(\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4}\Big),$$

$$\varphi(x,y)\big|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\Big|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x,y)\big|_{|y|=b} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial^2 y}\Big|_{|y|=b} = 0,$$

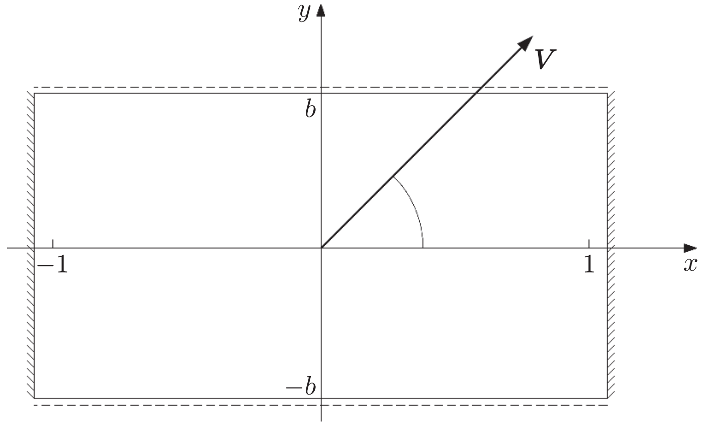

Рис. 1. Схема пластины

где k — показатель политропы газа; $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}'/c_0$; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)p_0]$ — безразмерная жесткость пластины; h — толщина пластины h', отнесенная к a; $\omega = \omega' a/c_0$ — безразмерная частота; $\lambda = \lambda' a/p_0$ — безразмерное собственное значение; $\varphi = \varphi(x, y) = \varphi'/a$ — безразмерная амплитуда прогиба.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h\omega^2 - k\omega, \tag{1}$$

где $\rho = \rho'/(p_0/c_0^2)$ — безразмерная плотность материала пластины.

Задача сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения, решение которой находится в виде комплексной функции $\varphi\,\mathrm{e}^{\omega t}$. Устойчивость колебаний пластины зависит от выполнения неравенства $\mathrm{Re}\,\omega < 0$ или $\mathrm{Re}\,\omega > 0$. При $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ имеют место быстро растущие решения, т. е. неустойчивость. Если $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ — наименьшее по модулю собственное значение, то в силу (1) неравенствам $\mathrm{Re}\,\omega < 0$ и $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ соответствуют неравенства $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ и $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 k^2 - \rho h\beta_1^2$. Поскольку $\alpha_1 = \alpha_1(\boldsymbol{V})$, $\beta_1 = \beta_1(\boldsymbol{V})$, уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую (параболу устойчивости) и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Следовательно, необходимо найти нули функции $F(\alpha_1(V), \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока (подробнее об этом см. [10]). Поиск решения осуществляется по следующему алгоритму: при фиксированном направлении $\boldsymbol{V}$ определяется величина v_{cr} по первому собственному значению, затем проводится анализ устойчивости по другим комплексным собственным значениям. Если вне параболы устойчивости появляется комплексное значение λ, то по этому значению вычисляется v_{cr}. Из всех определенных значений v_{cr} выбирается наименьшее [9].

2. Дискретизация. Для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в прямоугольнике применим интерполяционную формулу

$$\begin{gathered}\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{i0}(z) + l_1 y M(z) + l_2 M(z)) L_{j0}(x)\varphi(x_j, y_i),\\ bz_2 = y, \qquad z \in [-1, 1], \qquad x \in [-1, 1],\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \qquad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \qquad T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

$$x_j = \cos\theta_j, \qquad \theta_j = (2j - 1)\pi/(2n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \qquad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z), \qquad T_m(z) = \cos n \arccos z,$$

$$z_i = \cos\theta_i, \qquad \theta_i = (2i - 1)\pi/(2m), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Далее используем процедуру, описанную в [9]. Для получения матрицы дискретного оператора L требуется применить этот оператор к интерполяционной формуле (2). Коэффициенты l_1 и l_2 определяются с учетом граничных условий задачи. Граничные условия на защемленном крае удовлетворяются автоматически. В результате получаем несимметричную матрицу H размером $N \times N$, $N = mn$. Сначала пронумеруем узлы в прямоугольнике (x_j, y_i) по переменной y, затем — по x, т. е. сверху вниз и справа налево. В результате соотношение $L\varphi$ приближенно заменяется соотношением $H\varphi$, где φ — вектор значений функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в узлах сетки.

Применяемая дискретизация зависит от гладкости определяемого решения: ее точность тем выше, чем больше гладкость этого решения по переменным x и y. При этом априори гладкость определять не нужно, метод сам подстраивается под нее [11. С. 235]. Численные методы, обладающие таким свойством, предложено называть численными алгоритмами без насыщения [12]. Обзор численных методов без насыщения приведен в работе [13].

Получим необходимые коэффициенты для граничных условий при $y = \mathrm{const}$. Рассмотрим граничное условие с учетом интерполяционной формулы

$$\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}\Big|_{|z|=1} = 0: \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b^2}\, M''_{i0}\varphi(x_j, y_i) + l_1\Big(\frac{2}{b}\, M'(z) + \frac{1}{b}\, M''(z)y\Big)\varphi(x_j, y_i) + {} + l_2\,\frac{1}{b^2}\, M''(z)\varphi(x_j, y_i) = 0.$$

Подставляя в эту формулу $z = \pm 1$, получаем систему двух уравнений, из которой определяем коэффициенты:

$$l_1 = \frac{1}{d}\Big[-\frac{1}{b^2}\, M''(-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b^2}\, M''_{i0}(1) + \frac{1}{b^2}\, M''(1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b^2}\, M''_{i0}(-1)\Big],$$

$$l_2 = \frac{1}{d}\Big[\Big(\frac{2}{b}\, M'(-1) - \frac{1}{b}\, M''(-1)\Big)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b^2}\, M''_{i0}(1) - \Big(\frac{2}{b}\, M'(1) + \frac{1}{b}\, M''(1)\Big)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b^2}\, M''_{i0}(-1)\Big].$$

Здесь

$$d = \frac{1}{b^2}\, M''(-1)\Big(\frac{2}{b}\, M'(1) + \frac{1}{b}\, M''(1)\Big) - \frac{1}{b^2}\, M''(1)\Big(\frac{2}{b}\, M'(-1) - \frac{1}{b}\, M''(-1)\Big).$$

Приведем также выражения для M_{i0} и M''_{i0}:

$$M_{i0}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z)\,\frac{z^2-1}{z_i^2-1}, \qquad a_k^{(m)} = \frac{2}{m} T_k(z_i) = \frac{2}{m}\cos(k\theta_i), \qquad \theta_i = \frac{2i-1}{2m}\,\pi,$$

$$M''_{i0} = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z)\,\frac{2}{z_i^2-1} + \frac{1}{b}\,\frac{4z}{z_i^2-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T'_k(z) + \frac{z^2-1}{z_i^2-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T''_k(z).$$

Для получения всех необходимых производных требуется провести дифференцирование интерполяционной формулы четыре раза.

3. Вычислительные эксперименты. Рассматривалась квадратная пластина толщиной $h = 0{,}01$, занимающая в плоскости (x, y) область $\{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$. В качестве материалов пластины выбраны титан, сталь, алюминий и дюралюминий (табл. 1) (c_2 — скорость звука в пластине, отнесенная к c_0).

При моделировании угол наклона вектора скорости потока α варьировался в диапазоне от 0 до $\pi/4$. Результаты представлены в табл. 2. Критическая скорость флаттера соответствует первому собственному значению.

Далее определялось влияние направления вектора скорости потока на критическую скорость флаттера. По результатам численного моделирования строилась аналитическая зависимость

$$v_{cr} = C_1\alpha^3 + C_2\alpha^2 + C_3\alpha + C_4.$$

Погрешность расчета по аналитической формуле составляет менее 1 %.

Таблица 1

Характеристики материалов пластины

Материал	E, МПа	$\rho' \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	c_2	ν
Титан	107 873,15	4,5	14,777	0,32
Сталь	196 133,00	7,8	15,131	0,30
Алюминий	68 646,55	2,7	15,214	0,33
Дюралюминий	71 588,54	2,8	15,257	0,31

Таблица 2

Критические значения скорости для различных материалов и углов наклона α вектора скорости

$\alpha\pi$	v_{cr}			
	Титан	Сталь	Алюминий	Дюралюминий
0	4,549 03	8,127 60	2,941 77	3,021 73
1/180	4,549 16	8,127 84	2,941 86	3,021 82
1/90	4,549 56	8,128 54	2,942 11	3,022 08
1/36	4,552 29	8,133 42	2,943 89	3,023 91
1/18	4,561 80	8,150 38	2,950 06	3,030 25
1/9	4,595 64	8,210 75	2,972 01	3,052 79
1/6	4,637 07	8,284 70	2,998 88	3,080 37
2/9	4,666 11	8,336 54	3,017 68	3,099 68
1/4	4,670 23	8,343 90	3,020 34	3,102 42

На рис. 2 представлены зависимости v_{cr} от α для рассмотренных материалов и соответствующих коэффициентов.

Дальнейшее моделирование выполнялось для пластин из тех же материалов при различных значениях толщины h (табл. 3).

На рис. 3 представлены собственные формы колебаний $\mathrm{Re}\,(\varphi)$, соответствующие критической скорости флаттера для титана. Для остальных рассматриваемых материалов соответствующие собственные формы подобны.

С использованием результатов численных расчетов построена аналитическая зависимость критической скорости флаттера от двух параметров: безразмерной скорости звука в пластине $x = c_2$ и безразмерной толщины пластины $y = h \cdot 10^3$:

$$v_{cr} = \frac{C_1 + C_2x + C_3y + C_4y^2 + C_5y^3}{1 + C_6x + C_7x^2 + C_8y + C_9y^2}.$$

Здесь $C_1 = -0{,}001\,382\,106\,8$; $C_2 = 7{,}782\,761\,5 \cdot 10^{-5}$; $C_3 = 9{,}469\,151\,9 \cdot 10^{-5}$; $C_4 = -1{,}264\,953\,7 \cdot 10^{-5}$; $C_5 = 1{,}141\,346\,79 \cdot 10^{-6}$; $C_6 = -0{,}133\,502\,15$; $C_7 = 0{,}004\,456\,031\,4$; $C_8 = -1{,}374\,572\,3 \cdot 10^{5}$; $C_9 = 7{,}186\,824\,7 \cdot 10^{-7}$.

Полученная аналитическая зависимость $\mathrm{Re}\,(\varphi)$ отличается от предложенной в [14] зависимости $v_{cr} = a + bx + cy^3$ для защемленной по контуру пластины.

Заключение. В работе рассмотрено решение задачи о флаттере пластины при смешанных граничных условиях в постановке, позволяющей учитывать произвольное направление вектора скорости набегающего потока. Для решения задачи разработана дискретизация, которая зависит от гладкости определяемого решения: ее точность тем выше, чем больше гладкость этого решения по переменным x и y. Таким образом, предлагаемый алгоритм является алгоритмом без насыщения.

Определена критическая скорость флаттера для квадратных пластин из различных материалов при различных углах наклона вектора скорости потока. Представленные ре-

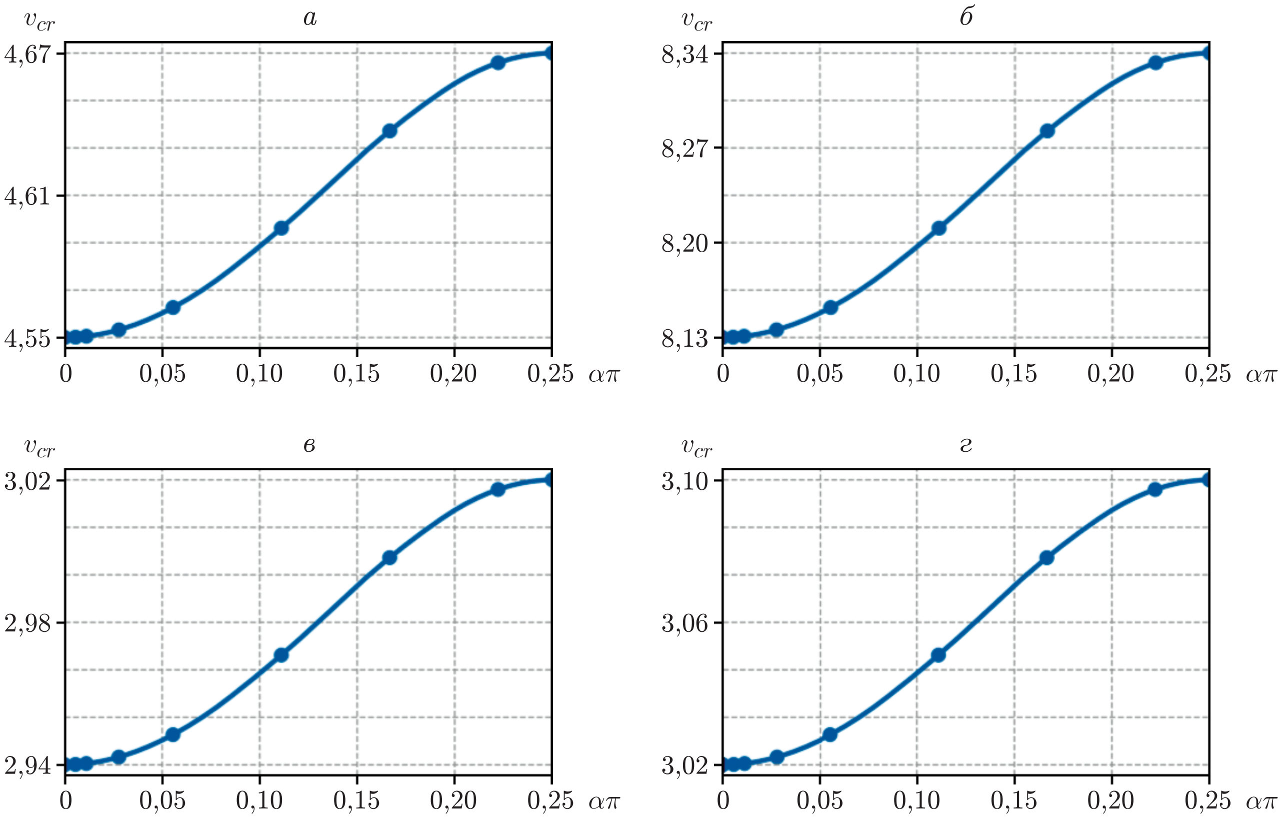

Рис. 2. Зависимость критической скорости v_{cr} от угла наклона вектора скорости α для различных материалов и различных значений констант в аналитической формуле:
а — титан ($C_1 = -16{,}618\,357$, $C_2 = 6{,}447\,345\,6$, $C_3 = -0{,}089\,297\,8$, $C_4 = 4{,}549\,542\,5$), *б* — сталь ($C_1 = -29{,}654\,833\,7$, $C_2 = 11{,}506\,922$, $C_3 = -0{,}159\,733\,5$, $C_4 = 8{,}128\,52$), *в* — алюминий ($C_1 = -10{,}784\,621\,8$, $C_2 = 4{,}181\,984\,62$, $C_3 = -0{,}057\,778\,6$, $C_4 = 2{,}942\,102\,6$), *г* — дюралюминий ($C_1 = -11{,}063\,036\,8$, $C_2 = 4{,}290\,126\,0$, $C_3 = -0{,}058\,939\,1$, $C_4 = 3{,}022\,068\,7$)

Таблица 3

Зависимость критической скорости от толщины пластины для различных материалов

h	v_{cr}							
	Титан		Сталь		Алюминий		Дюралюминий	
	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$
0,010	4,549 03	4,670 23	8,127 60	8,343 90	2,941 78	3,020 35	3,021 73	3,102 42
0,009	3,325 87	3,414 55	5,930 58	6,088 45	2,160 57	2,218 39	2,218 29	2,277 63
0,008	2,347 68	2,410 37	4,172 06	4,283 18	1,537 08	1,578 36	1,576 93	1,619 25
0,007	1,587 63	1,630 13	2,803 55	2,878 28	1,054 40	1,082 88	1,080 22	1,109 37

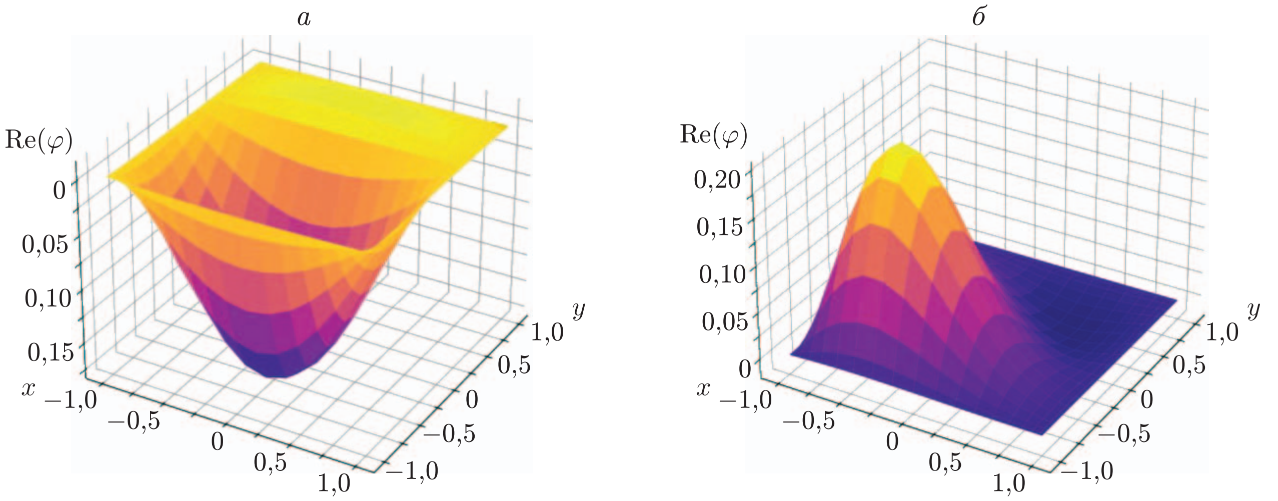

Рис. 3. Собственные формы колебаний пластины из титана:
а — $\alpha = 0$, *б* — $\alpha = \pi/4$

зультаты показывают, что для квадратной пластины критическая скорость флаттера постепенно возрастает при изменении угла наклона в интервале от 0 до $\pi/4$. Для зависимости критической скорости флаттера от угла наклона вектора потока получена аналитическая формула, которая позволяет, подобрав константы, быстро и с высокой точностью получать критическую скорость, не выполняя громоздкий расчет.

Исследовано изменение критической скорости флаттера при различной толщине пластины. Для зависимости критической скорости от безразмерных толщины пластины и скорости звука в ней также получена аналитическая формула, которая отличается от полученной ранее для пластины, защемленной по контуру.

Представлены собственные формы $\mathrm{Re}\,(\varphi)$, соответствующие критической скорости флаттера, при углах наклона потока, равных 0 и $\pi/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аэроупругость** / Под ред. П. Г. Карклэ. М.: Инновац. машиностроение, 2019.
2. **Папков С. О.** Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычисл. механика сплош. сред. 2017. Т. 10, № 4. С. 361–374.
3. **Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.** О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край // Изв. НАН Армении. 2014. Вып. 67, № 2. С. 14–44.
4. **Eisenberger M., Deutsch A.** Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // J. Sound Vibrat. 2019. V. 452. P. 1–12.
5. **Алгазин С. Д.** Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. М.: Ленанд, 2017.
6. **Алгазин С. Д., Селиванов И. А.** Колебания ортотропной защемленной прямоугольной пластины // Науч. вестн. Гос. науч.-исслед. ин-та гражд. авиации. 2020. № 31. С. 140–148.
7. **Алгазин С. Д., Селиванов И. А.** Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 2. С. 70–76.
8. **Ильюшин А. А., Кийко И. А.** Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. № 58, вып. 3. С. 167–171.

9. **Алгазин С. Д., Кийко И. А.** Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 35–42.
10. **Мовчан А. А.** О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 20, вып. 2. С. 211–222.
11. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
12. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Изд. 2-е, испр. и доп. / Под ред. А. Д. Брюно. М.; Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 2002.
13. **Гавриков М. Б.** Методы без насыщения в вычислительной математике. М., 2019. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН; № 75).
14. **Алгазин С. Д.** Вычислительный эксперимент в задаче о флаттере прямоугольной пластины // Мат. моделирование. 2021. Т. 33, № 6. С. 107–116.

Поступила в редакцию 11/X 2021 г.,
после доработки — 22/XI 2021 г.
Принята к публикации 27/XII 2021 г.