

УДК 539.3

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВЕСОМОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД
В ОКРЕСТНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ**

М. В. Курленя, В. Е. Миренков

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: mirenikov@misd.nsc.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрено деформирование массива горных пород с трещиной применительно к задаче управления разрушением. Классические аналитические решения, полученные для невесомого массива пород с трещиной дают бесконечные значения напряжений в вершинах, что не соответствует действительности. Предложена феноменологическая теория расчета полных смещений в окрестности трещины, построенная на качественных различиях действия веса пород: растяжения происходят выше трещины, а сжатие — ниже. Обоснован безразмерный параметр, характеризующий отношение смещений верхнего берега трещины к смещениям нижнего, применяемый для описания поведения массива горных пород.

Трещина, деформирование, аналитическое решение, теория, порода, вес, обратные задачи

DOI: 10.15372/FTPRPI20180602

Одной из задач геомеханики является оценка состояния трещиноватого массива горных пород, в котором присутствуют трещины природного происхождения либо создаются вновь при разработке полезных ископаемых. Чтобы установить их роль в процессе разрушения того или иного объема породного массива, необходимо аналитическое описание его напряженно-деформированного состояния. Это позволяет воспользоваться известными теориями прочности, предполагающими два подхода. Первый основан на знаниях образования и распространения трещин и других дефектов конечных размеров, вплоть до разрушения геоматериала. Второй — на накоплении микродефектов, критическое значение которых приводит к трещинообразованию [1–4]. Ниже остановимся на первом подходе, т. е. будем исследовать конечные прямолинейные трещины, моделируемые математическими разрезами.

Математическое моделирование массива пород с трещиной [1–7] предусматривает симметрию деформирования в линейном поле исходных напряжений, формулирующем соответствующие граничные условия. Существенным моментом является расчет напряженно-деформированного состояния, который осуществляется в [1, 2, 8] через постановку дополнительной задачи. В этой связи в механике горных пород имеет место вся совокупность двухмерных и трехмерных слу-

чаев. Согласно общей классификации уравнений математической физики, проблемы геомеханики попадают в класс задач Коши, корректное решение которых возможно только, если граничные условия исчезают на бесконечности, т. е. равны нулю. В [3] описаны сдвиговые разрушения и их процессы. Поведение материалов в данном случае характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Экспериментально показано образование на контактной области сдвига слоя с новыми механическими свойствами, отличными от исходных. Исследование изменений КИН от вида колебаний размеров трещин и углов между ними приведено в [4], а в [7] установлена нелинейность этой задачи и предложен алгоритм приближенного ее решения.

Таким образом, исходя из изложенного, состояние изученности данной проблемы, описание деформации для изолированного прямолинейного математического разреза следуют либо классическим представлениям [1–4] или являются ограниченными в вершинах [7]. В данной работе предлагается иной подход к решению задачи, основанный на определении влияния веса вмещающих пород на трещину.

Рассмотрим классическую трещину [1, 2], представляющую невесомую плоскость с конечным прямолинейным математическим разрезом на $|x| \leq a$, к берегам которого приложены постоянные нормальные усилия $\sigma_y = -\sigma_0 = \text{const}$, а касательные $\tau = 0$. Не уменьшая общности, считаем, что величины, имеющие размерность длины, отнесены к половине длины трещины, а с размерностью напряжений — к характерной величине внешних усилий σ_0 , т. е. перейдем к безразмерным переменным и функциям. На рис. 1 представлена расчетная схема кусочно-однородного массива пород с упругими характеристиками E_i , $i = 1, 2, 3, 4$ — модули Юнга и μ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ — коэффициенты Пуассона и γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ — удельные веса слоев, мощности которых обозначены H_i , $i = 1, 2, 3, 4$. На контактах слоев, в первом приближении примем сцепление (непрерывность нормальных и касательных напряжений и смещений при переходе через контакт), которое можно менять в процессе решения обратной задачи по уточнению приведенных параметров.

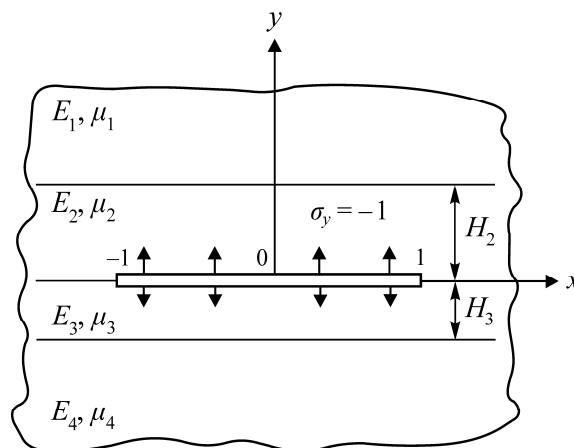


Рис. 1. Расчетная схема невесомой плоскости с математическим разрезом

Для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины воспользуемся системой сингулярных интегральных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений на берегах трещины [8], а именно

$$f(t_0) + 2\eta g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\eta g(t)}{t - t_0},$$

$$\overline{\alpha f(t_0) - 2\eta g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\alpha f(t) - 2\eta g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [f(t) + 2\eta g(t)] d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$
(1)

где $\alpha = 3 - 4\mu$, $\eta = E[2(1 + \mu)]^{-1}$, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$
(2)

Здесь X_n, Y_n — компоненты усилий в направлении осей x и y ; i — мнимая единица; черточка над функцией означает комплексно сопряженное значение; t_0 — аффикс точки границы Γ . Система (1), (2) решает одновременно и единообразно три основные задачи теории упругости. Существенно, что система (1), (2) позволяет применять любые предположения влияния на процесс деформирования, которые приводят к вырожденным уравнениям.

При расчете смещений и напряжений в окрестности трещины для невесомой плоскости необходимо знать механические характеристики слоев, условия на их контактах (граничные условия на ее берегах) (рис. 1). Все эти характеристики массива пород задаются произвольно. Контроль за их точностью предполагает рассмотрение дополнительной информации о деформировании пород в окрестности трещины и формулировку обратных задач по уточнению введенных априори параметров. В этом случае собственный вес горных пород добавляет новые сведения о смещениях. Ошибки, которые могут возникнуть на стадии идентификации параметров, не могут быть уменьшены подбором более эффективных численных алгоритмов. Классическим методом определения механических характеристик пород по-прежнему являются испытания стандартных образцов на растяжение – сжатие. В [8] впервые предложена общая схема идентификации обратных задач по результатам натуральных экспериментов.

Рассмотрим картину напряженно-деформированного состояния массива горных пород с трещиной (рис. 2). Аналогично [1–4] задаем механические величины слоев, образующих массив, и условия на контактах, например сцепление. Используя уравнения (1), (2), рассчитываем напряженно-деформированное состояние в окрестности заглубленной трещины. Приблизительно определяется зона влияния трещины, показанная на рис. 2 штриховой линией. Вернем каждой точке пород в этой зоне собственный вес γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и будем считать, что он направлен вертикально вниз. Если после расчета напряженно-деформированного состояния пород для невесомой плоскости рис. 1 учесть вес пород рис. 2, то произойдут дополнительные смещения, подлежащие определению. Пусть на $y = H_1 + H_2$ и $y = -H_3 - H_4$ вычисленные для невесомого массива пород смещения равны нулю, т. е. никакими приборами они не регистрируются. Выделим элементарное породное волокно длиной $H_1 + H_2$ выше и длиной $H_3 + H_4$ ниже трещины и закрепим в точках $y = H_1 + H_2$ и $y = -H_3 - H_4$ нагрузим собственным весом. Для расчета полных смещений в окрестности трещины предлагается феноменологическая теория, в которой безразмерный параметр k учитывает собственный вес пород. Он устанавливается экспериментально, равен отношению смещений верхнего берега трещины v_1 к смещениям нижнего v_2 :

$$k = \frac{v_1}{v_2}$$
(3)

и характеризует напряжения в трещине σ_0 , механические показатели пород, а также нелинейные эффекты, связанные с возможным проскальзыванием на контактах. Существенно, что k можно считать первичным и многофункциональным по сравнению с любыми другими сведениями о массиве (например, напряжения, электромагнитное излучение и т. п.), являющимися как минимум вторичными с точки зрения точности идентификации параметров.

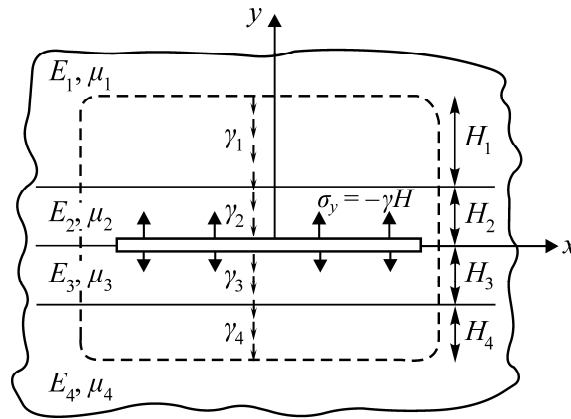


Рис. 2. Расчетная схема весомой плоскости с трещиной

Согласно рис. 2, породное волокно на участках $0 \leq y \leq H_1 + H_2$ растягивается собственным весом γ_1 и γ_2 , а на $0 \geq y \geq -(H_3 + H_4)$ сжимается равномерно распределенным весом γ_3 и γ_4 . На них так же действуют еще сжимающие напряжения $\sigma_y = -\gamma H$ на контуре трещины. Следовательно, удлинение выделенных волокон $y_1 = H_1 + H_2 - y$ при $0 \leq y \leq H_1 + H_2$ для точек выше оси x будет

$$\begin{aligned} v(y_1) &= \int_0^{H_1} \frac{-\gamma H + \gamma_1 y}{E_1 A} dy + \int_{H_1}^{y_1} \frac{-\gamma H + \gamma_2 y}{E_2 A} dy = \\ &= \frac{-\gamma H_1 H + 0.5 \gamma_1 H_1^2}{E_1 A} + \frac{-\gamma H (\gamma_1 - H_1) + 0.5 \gamma_2 (y_1^2 - H_1^2)}{E_2 A} \end{aligned} \quad (4)$$

и для точек ниже оси x укорочение волокон $y_2 = H_3 + H_4 + y$ при $0 \geq y \geq -(H_3 + H_4)$ будет

$$\begin{aligned} v(y_2) &= \int_0^{H_3} \frac{-\gamma H + \gamma_3 y}{E_3 A} dy + \int_{H_3}^{y_2} \frac{-\gamma H - \gamma_4 y}{E_4 A} dy = \\ &= \frac{-\gamma H_3 H - 0.5 \gamma_3 H_3^2}{E_3 A} + \frac{-\gamma H (\gamma_2 - H_3) - 0.5 \gamma_4 (y_2^2 - H_3^2)}{E_4 A}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $E_i A$ — жесткость волокна на растяжение–сжатие на i -участке; E_i — модуль Юнга; A — площадь сечения волокна.

Смещения берегов трещины определяются из (4), (5) при $y_1 = H_1 + H_2$ и $y_2 = H_3 + H_4$, т. е.

$$v_1 = \frac{-\gamma H_1 H + 0.5 \gamma_1 H_1^2}{E_1 A} + \frac{-\gamma H H_2 + 0.5 \gamma_2 (2H_1 H_2 + H_2^2)}{E_2 A}, \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{-\gamma H_3 H - 0.5 \gamma_3 H_3^2}{E_3 A} + \frac{-\gamma H H_4 - 0.5 \gamma_4 (2H_3 H_4 + H_4^2)}{E_4 A}. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (3), находим

$$k = \frac{\frac{-\gamma H_1 H + 0.5 \gamma_1 H_1^2}{E_1} + \frac{-\gamma H H_2 + 0.5 \gamma_2 (2H_1 H_2 + H_2^2)}{E_2}}{\frac{-\gamma H_3 H - 0.5 \gamma_3 H_3^2}{E_3} + \frac{-\gamma H H_4 - 0.5 \gamma_4 (2H_3 H_4 + H_4^2)}{E_4}}. \quad (8)$$

И с научной, и с практической точки зрения особое значение приобретает изучение поведения ослабленного трещиной массива пород с идеальной геометрической структурой, позволяющего оценить общий случай. Для изотропного массива пород с трещиной из (8), полагая $H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_0$, имеем

$$k = \frac{-1 + 0.5 \frac{\gamma_0 H_0}{\gamma H}}{-1 - 0.5 \frac{\gamma_0 H_0}{\gamma H}}. \quad (9)$$

При коэффициенте $k < 1$ верхний берег трещины смещается на меньшую величину, чем нижний. Отметим, что расчет велся для симметричного напряженного состояния вмещающих трещину пород. Если окажется, что величины k различны для значений $|x| \leq 1$, то всегда можно выбрать среднее его значение или считать $k = k(x)$ [6].

Обозначим через v смещения берегов трещины, как в [1–4], и пусть $\sigma_0 = -1$, v_0 — смещения от собственного веса пород. Тогда полные смещения верхнего берега примут вид

$$v_1 = v - v_0. \quad (10)$$

Аналогично для нижнего берега смещения можно представить соотношением

$$v_2 = v + v_0. \quad (11)$$

Подставив (10), (11) в (3), приходим к выражению

$$v_0 = \frac{1-k}{1+k} v, \quad (12)$$

которое характеризует укорочение (удлинение) от собственного веса пропорционально смещениям, полученным из классического решения. Из (10), (11) и (12) следует

$$v_1 = \frac{2k}{1+k} v, \quad v_2 = \frac{2}{1+k} v$$

или

$$v_1 + v_2 = 2v. \quad (13)$$

Другими словами, если известно k , то классическое решение определяет смещения берегов трещины. Верно и обратное, если известны натурные замеры смещений v_1 и v_2 , то это дает возможность находить соответствующие им значения v . Знание роли собственного веса пород развивает кинематический подход оценки деформирования пород в окрестности трещин. Обычно применяемый метод конечных элементов для этих целей не позволяет анализировать неточности при формулировке задачи.

В предлагаемом методе расчета полные смещения и напряжения в окрестности трещины напрямую однозначно не связаны. Эта же ситуация наблюдается и в классическом подходе [1–4], но в обоих случаях основная роль принадлежит дополнительной задаче по расчету смещений.

Значения $y = H_1 + H_2$ и $y = -H_3 - H_4$ определяются зоной влияния, получаемой из классического решения для кусочно-однородной плоскости с трещиной, и могут быть уточнены последовательными приближениями из решения, учитывающего вес горных пород, если известны натурные смещения v_1 и v_2 . Предполагается, что при $y \geq H_1 + H_2$ и $y \leq -H_3 - H_4$ смещения равны нулю, т. е. в точках $y = H_1 + H_2$ и $y = -H_3 - H_4$, а рассматриваемые волокна в слоистых породах жестко закреплены. Тогда представляется возможным вычислить их удлинение и укорочение для любой точки в диапазонах $0 \leq y \leq H_1 + H_2$ и $-H_3 - H_4 \leq y \leq 0$. Максимальные значения для $y = 0$ даются по формулам (6), (7). Зона влияния трещины в подработанных породах больше, чем в надработанных, и необходимо исследовать эту зависимость. Параметр k может характеризовать ее дополнительно, уточнив механические параметры пород, вмещающих трещину.

На рис. 3 приведены схемы раскрытия трещины в однородном массиве горных пород: кривая 1 представляет классическое аналитическое решение [1, 2]; 2 — приближенное решение из [7] без учета веса; 3 — численное приближенное решение с учетом веса.

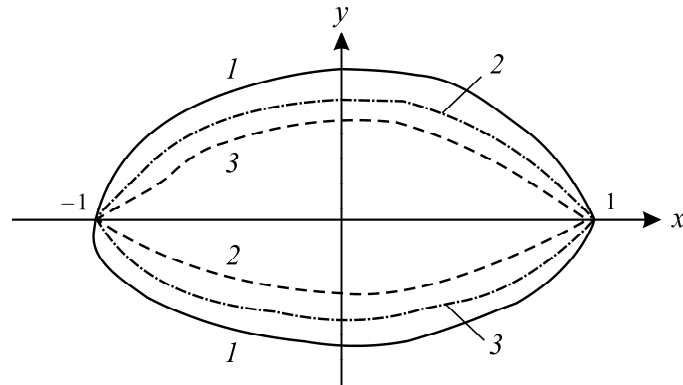


Рис. 3. Схема раскрытия трещины

Алгоритм расчета деформирования массива пород в окрестности трещины с учетом их веса сводится к следующей последовательности. Строится расчетная схема, для которой стандартным образом задаются геометрические, физические и граничные условия дополнительной задачи. В результате ее решения находятся область влияния трещины, вертикальные смещения берегов трещины соответственно для верхнего и нижнего v_{01} и v_{02} . Считаем известными натурные замеры смещений $v_1(x)$ и $v_2(x)$ на берегах трещины. Перебирая все параметры, устанавливаем их влияние на точность решения и, фиксируя последовательно их численные значения, заканчиваем первый цикл приближения. Число циклов зависит от наперед заданной точности совпадения $v_1(x)$ и $v_2(x)$ с v_{01} и v_{02} , отвечающим последнему циклу.

ВЫВОДЫ

Предложена модель деформирования пород в окрестности трещины с учетом веса вмещающего массива. Она включает экспериментальное определение параметра, характеризующего отношение смещений берегов трещины, который является одновременно дополнительной информацией к стандартным формулировкам граничных задач. Введение данного параметра — необходимое условие при решении обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михлин С. Г.** О напряжениях в породе над угольным пластом // Изв. АН СССР. ОТН. — 1942. — № 7–8. — С. 13–28.
2. **Баренблатт Г. И., Христианович С. А.** Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 11. — С. 73–86.
3. **Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.** Влияние радиуса вершины трещины продольного сдвига на структуру оперения // МТТ. — 2018. — № 1. — С. 19–31.
4. **Попов В. Г.** Две трещины, выходящие из одной точки под воздействием волны продольного сдвига // МТТ. — 2018. — № 2. — С. 91–100.
5. **Shen H. and Abbas S. M.** Rock slope reliability analysis based on distinct element method and random set theory, Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci., 2013, Vol. 61. — P. 15–22.
6. **Vazhbakht V. and Zsaki A. M.** A finite element mesh optimization method incorporating geologic features for stress analysis of underground excavations, Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci., 2013, Vol. 59. — P. 111–119.
7. **Миренков В. Е.** О некорректных задачах геомеханики // ФТПРПИ. — 2018. — № 3. — С. 3–10.
8. **Курленя М. В., Миренков В. Е.** Феноменологическая модель деформирования горных пород вокруг выработок // ФТПРПИ. — 2018. — № 2. — С. 3–9.

Поступила в редакцию 24/IX 2018

После доработки 3/X 2018

Принята к публикации 28/XI 2018