

О ТЕМПЕРАТУРЕ ТЕЛ В СРЕДЕ С ПУЛЬСИРУЮЩИМИ ТЕПЛОТДАЧЕЙ И ТЕМПЕРАТУРОЙ

М. А. Каганов, Ю. Л. Розеншток (Ленинград)

Задача нахождения температурного поля тел, обтекаемых пульсирующими потоками жидкости или газа переменной температуры, имеет ряд важных технических приложений. С такой задачей приходится сталкиваться, например, при измерении температуры в цилиндрах двигателей, при изучении явлений турбулентности и т. п.

Температурные поля неограниченного цилиндра и шара, находящихся в условиях гармонически изменяющихся температуры среды и теплоотдачи, описываются следующим уравнением (цилиндрическая и шаровая формы достаточно хорошо характеризуют используемые типы термодатчиков):

$$\frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T^{(\nu)}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial r} \right) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} T^{(\nu)} \right)_{r=R} = \frac{\alpha}{\lambda} \theta, \quad T^{(\nu)}|_{r \rightarrow 0} \neq \infty \quad (2)$$

Здесь λ и k — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности термометра, R — радиус цилиндра (шара), $\nu = 1$ для цилиндра, $\nu = 2$ для шара, α — коэффициент теплоотдачи, θ — температура среды.

При этом принимается, что колебания температуры среды и теплоотдачи являются синхронными с круговой частотой ω и со сдвигом фаз φ

$$\theta = A \cos \omega t, \quad \alpha = \alpha_0 [1 + \gamma \cos (\omega t - \varphi)] \quad (\gamma < 1) \quad (3)$$

(γ — относительная величина пульсаций теплоотдачи).

Задача об определении температурного поля термодатчика (неограниченный цилиндр) в условиях пульсирующей температуры среды и теплоотдачи была поставлена А. Н. Гордовым [1]. А. Н. Гордов применил к уравнению теплопроводности операционный метод с последующей подстановкой выражения для преобразованной температуры в преобразованное с учетом теоремы смещения граничное условие, характеризующее теплоотдачу на поверхности цилиндра. При этом постоянная интегрирования в пространстве изображений, подлежащая определению, оказалась функцией различных аргументов: $s, s \pm i\omega$ (s — параметр преобразования Лапласа). Это обстоятельство, не учтенное автором, приводит к невозможности определения искомой постоянной интегрирования при отличных от нуля частотах ω . В результате полученная в [1] зависимость $T(r, t)$ не удовлетворяет заданному граничному условию на поверхности цилиндра.

Для нахождения решения уравнения (1) в установившемся режиме с учетом условий (2), (3) представим искомую функцию $T(r, t)$ разложенной в ряд по степеням малого параметра γ , считая член, соответствующий пульсациям теплоотдачи в (3), малым возмущением

$$T^{(\nu)}(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n T_n^{(\nu)}(r, t) \quad (4)$$

После подстановки (4) в исходное уравнение и граничные условия с последующей группировкой членов, содержащих γ в одинаковой степени, получим систему уравнений

$$\frac{\partial T_n^{(\nu)}}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T_n^{(\nu)}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial T_n^{(\nu)}}{\partial r} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{\partial T_n^{(\nu)}}{\partial r} + T_n^{(\nu)} + T_{n-1}^{(\nu)} \cos (\omega t - \varphi) \right]_{r=R} = A [\delta_{n0} \cos \omega t + \delta_{n1} \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi)] \quad (6)$$

$$T_n^{(\nu)}|_{r \rightarrow 0} \neq \infty \quad (7)$$

причем

$$T_{-1}^{(\nu)} = 0, \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \quad (8)$$

Решение уравнения (5) с граничными условиями (6) и (7) для неограниченного цилиндра и шара при $n = 0$ известны [2]

$$T_0^{(\nu)} = \frac{A}{2} \{ Q^{(\nu)}(r, P) e^{i\omega t} + Q^{(\nu)}(r, -P) e^{-i\omega t} \} \quad (9)$$

Здесь

$$Q^{(1)}(x, y) = \frac{B_0 I_0(\sqrt{iy}x/R)}{B_0 I_0(\sqrt{iy}) + \sqrt{iy} I_1(\sqrt{iy})}$$

$$Q^{(2)}(x, y) = \frac{B_0 \operatorname{sh}(\sqrt{iy}x/R)}{(B_0 - 1) \operatorname{sh} \sqrt{iy} + \sqrt{iy} \operatorname{ch} \sqrt{iy}} \frac{R}{x} \quad (10)$$

I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя, $B_0 = \alpha_0 R / \lambda$ и $P = (\omega/k) R^2$ — критерии Био и Предводителяева.

Используя преобразование Лапласа, можно найти последующие приближения. Так, первое приближение ($n = 1$) оказывается равным

$$T_1^{(v)} = \frac{A}{4} \left\{ \left[1 - Q^{(v)}(R, P) \right] Q^{(v)}(r, 2P) e^{i(2\omega t - \varphi)} + \left[1 - Q^{(v)}(R, -P) \right] \times \right.$$

$$\left. \times Q^{(v)}(r, -2P) e^{-i(2\omega t - \varphi)} + \left[1 - Q^{(v)}(R, P) \right] e^{i\varphi} + \left[1 - Q^{(v)}(R, -P) \right] e^{-i\varphi} \right\} \quad (11)$$

Последующие члены ряда (4) с нечетным индексом $T_{2n+1}^{(v)}$ содержат гармоники с частотами, кратными четным числам от $n = 0$ до $2n + 2$, а члены с четным индексом $T_{2n}^{(v)}$ — гармоники с частотами, кратными нечетным числам от 1 до $2n + 1$. Таким образом, температура тела, помещенного в среду с температурой и теплоотдачей, изменяющимися по закону косинуса, может быть представлена в виде ряда Фурье с полным набором гармоник, начиная с нулевой. Коэффициенты ряда Фурье являются, в свою очередь, рядами, члены которых располагаются по возрастающим степеням γ (через одну). При этом первый член степенного ряда для всех гармоник, кроме нулевой, содержит γ^{n-1} ; первый член ряда нулевой гармоники пропорционален γ в первой степени. Эти ряды быстро сходятся при $\gamma < 1$, и для практических целей достаточно ограничиться первым членом ряда.

Следовательно, термометр не только дает искаженное представление о частотных характеристиках процесса, но и, как уже указывалось в [1], смещает величину постоянной составляющей измеряемой температуры среды.

В тех случаях, когда наряду с определением частотных характеристик процесса необходимо измерить среднюю температуру среды, важно оценить влияние отдельных факторов на величину смещения средней температуры термометра. Из формулы (11) следует, что в первом приближении величина смещения средней температуры ΔT в случае цилиндра

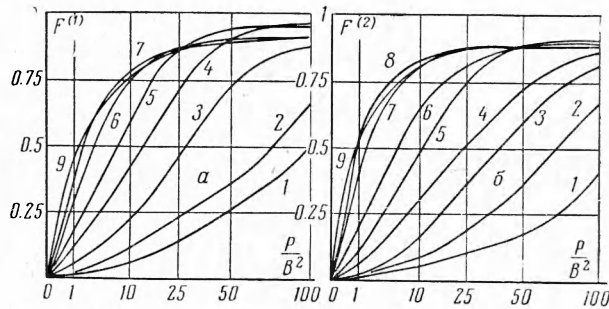
$$\Delta T^{(1)} = \frac{1}{4} A \gamma \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{\sqrt{iP}}{B_0} \frac{I_1(\sqrt{iP})}{I_0(\sqrt{iP})} \right)^{-1} \right] e^{i\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \left(1 + \frac{\sqrt{-iP}}{B_0} \frac{I_1(\sqrt{-iP})}{I_0(\sqrt{-iP})} \right)^{-1} \right] e^{-i\varphi} \right\} \quad (12)$$

в случае шара

$$\Delta T^{(2)} = \frac{1}{4} A \gamma \left\{ \left[1 - \frac{B_0}{(B_0 - 1) + \sqrt{iP} \operatorname{cth} \sqrt{iP}} \right] e^{i\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{B_0}{(B_0 - 1) + \sqrt{-iP} \operatorname{cth} \sqrt{-iP}} \right] e^{-i\varphi} \right\} \quad (13)$$

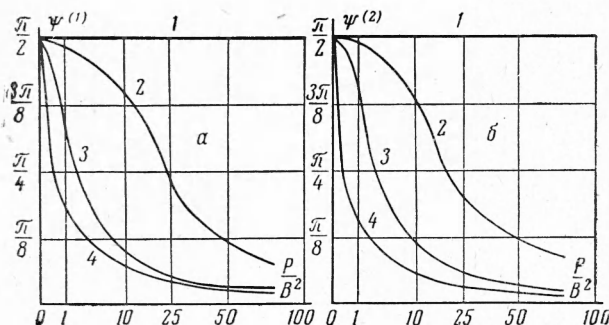


Фиг. 1: а — цилиндр, б — шар; 1 — $B_0 = 0.01$, 2 — $B_0 = 0.02$, 3 — $B_0 = 0.05$, 4 — $B_0 = 0.1$, 5 — $B_0 = 0.2$, 6 — $B_0 = 0.5$, 7 — $B_0 = 1.0$, 8 — $B_0 = 10$, 9 — $B_0 \rightarrow \infty$

Из (12) и (13) видно, что как абсолютная величина $\Delta T^{(v)}$, так и ее знак зависят от сдвига фаз φ между колебаниями теплоотдачи и температуры среды. При этом величина ΔT пропорциональна произведению амплитуды колебаний температуры среды и относительной амплитуды колебаний теплоотдачи γ , а также зависит от критериев B_0 и P

$$\Delta T = \frac{1}{2} A \gamma F^{(v)}(B_0, P) \cos[\varphi + \psi(B_0, P)] \quad (14)$$

Графики функций F для цилиндра и шара представлены на фиг. 1, при этом на оси абсцисс отложены значения $P/B_0^2 = \lambda^2 \omega / k \alpha_0^2$. Из анализа формул (12) и (13), а также рассмотрения графиков следует, что при заданной частоте пульсаций для данного материала термометра и условий теплоотдачи F имеет максимум при определенном значении радиуса термометра. С увеличением частоты положение максимума смещается в область малых B_0 . Как следует из (12) и (13), функция F с увеличением P монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к единице.



Фиг. 2: а — цилиндр, б — шар, 1 — $B_0 = 0$, 2 — $B_0 = 0.1$, 3 — $B_0 = 1.0$, 4 — $B_0 \rightarrow \infty$.

ры среды $\Delta T/A$ не может превышать половины относительной амплитуды колебаний теплоотдачи. Величина ΔT равна нулю при $P = 0$ или $B_0 \rightarrow \infty$.

На фиг. 2 представлены графики, характеризующие зависимость угла ψ для цилиндра и шара от критерия P/B_0^2 при различных B_0 . Максимум ΔT имеет место при $\varphi = -\psi$. Таким образом, так как $0 \leq \psi \leq \pi/2$, то наибольшие положительные значения $\Delta T^{(v)}$ будут наблюдаться в тех случаях, когда колебания теплоотдачи опережают по фазе колебания температуры на угол, равный ψ .

Поступила 24 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

- Г о р д о в А. Н. Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующей скоростью и температурой. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 2, стр. 240.
- Л ы к о в А. В. Теория теплопроводности. М. — ГИ, ГТТИ, 1954.

РАСЧЕТ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА

И. И. Межиров

(Москва)

В работе рассматриваются одномерные течения газа в канале переменного сечения при наличии сил трения и теплообмена с внешней средой. В частности, изучается влияние этих факторов на полное давление газа; приводится решение задачи об определении закона площадей канала, обеспечивающего заданное распределение чисел M при заданном законе теплообмена; решается задача об определении закона изменения температуры торможения газа, обеспечивающего заданное распределение чисел M в канале заданной формы; излагается численный метод расчета распределения чисел M по длине канала заданной формы при заданном законе теплообмена.

Предположение об одномерности течения широко используется в прикладной газовой динамике, так как оно существенно упрощает расчетные методы и позволяет учитывать достаточно сложные внешние воздействия на газовый поток. При этом обеспечивается удовлетворительное приближение расчетных данных к действительности при рассмотрении течений в трубопроводах, сверхзвуковых соплах, конфузорах, слабых безотрывных диффузорах. Поэтому результаты, полученные в работе, могут найти применение при решении различных практических задач газовой динамики и теплотехники.