Теплофизика и аэромеханика, 2013, том 20, № 1

УДК 532.51

Скорость всплывания газового пузыря в трубе

Ю.Б. Зудин

Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского

E-mail: yzudin@gmail.com

При анализе задачи о гравитационном всплывании газового пузыря в трубе, заполненной идеальной жидкостью (пузырь Тейлора), в классических работах используются решения уравнения Лапласа, содержащие расходящиеся бесконечные ряды. В настоящей работе предлагается приближенный метод корректного анализа указанной задачи. Методом суперпозиции элементарных течений построено обтекание идеальной жидкостью тела вращения в трубе. Выполнение условия свободной поверхности в окрестности критической точки и предельный переход по основному параметру приводят к искомому выражению для безразмерной скорости всплывания пузыря — числу Фруда.

Ключевые слова: гравитационное всплывание, пузырь Тейлора, уравнение Лапласа, корректный анализ, метод суперпозиции, предельный переход, число Фруда.

Введение

Первые теоретические исследования задачи о всплывании пузыря Тейлора выполнены в классических работах [1, 2]. Насколько известно автору, эти работы оказались также и единственными аналитическими исследованиями указанной задачи. Основанные на экспериментальных исследованиях полуэмпирические формулы, описывающие влияние гравитации, вязкости и капиллярных сил на скорость всплывания пузыря Тейлора, приводятся в монографии [3] и статьях [4, 5]. В работе [6] проведено детальное численное исследования задачи для конкретных диапазонов параметров.

В работах [1, 2] при анализе задачи о всплывании пузыря Тейлора сделаны следующие допущения: вязкость не оказывает влияния на течение жидкости, капиллярным давлением на межфазной поверхности можно пренебречь, плотность газа в пузыре ничтожно мала по сравнению с плотностью жидкости. Тогда задача сводится к определению скорости всплывания пустой полости в гравитационном поле в вертикальной трубе, заполненной идеальной жидкостью. Течение жидкости описывается потенциалом скоростей φ, удовлетворяющим уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0. \qquad (1)$$

Здесь z, r — соответственно безразмерные осевая и радиальная координаты с радиусом трубы R в качестве масштаба длины. Метод разделения переменных дает два альтернативных типа решений уравнения (1):

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_k J_0\left(\beta_k r\right)\exp\left(\beta_k z\right), \tag{2}$$

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_k I_0\left(\beta_k r\right)\cos\left(\beta_k z\right). \tag{3}$$

Здесь $J_0(x)$, $I_0(x)$ — соответственно обычная и модифицированная функции Бесселя нулевого порядка [7], α_k, β_k — собственные числа.

Рассмотрим обтекание покоящегося пузыря идеальной жидкостью с образованием критической точки. На границе пузыря должно выполняться условие свободной поверхности [8]. Из уравнения Бернулли для точки поверхности пузыря, находящейся на расстоянии $|z|$ от критической точки, следует:

$$U_s^2+V_s^2=2\,g\,R_0\,|z|. \tag{4}$$

Здесь U_s, V_s — соответственно осевая и радиальная скорости жидкости, нижний индекс s обозначает условия на межфазной границе. На стенке трубы должно выполняться условие непротекания:

$$V_s\big|_{r=1}=0. \tag{5}$$

В работах [1, 2] используется решение уравнения Лапласа типа (2). Вычисляя из (2) радиальную скорость $V=\partial\varphi/\partial r$

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_k\beta_k J_1\left(\beta_k r\right)\exp\left(\beta_k z\right) \tag{6}$$

и подставляя ее в (5), авторы [1, 2] получают уравнение для определения собственных чисел β_k: $J_1\left(\beta_k\right)=0$.

Следует специально подчеркнуть, что в работах [1, 2] выражение (2) используется для описания течения жидкости во всем бесконечном интервале изменения осевой координаты: $-\infty<z<\infty$. Легко видеть, что при этом выражение вида (2) обнаруживает двойную расходимость: каждый член бесконечного ряда экспоненциально расходится на одном из двух полубесконечных интервалов (в зависимости от выбора направления оси z). Однако указанная некорректность не проявляется в явном виде в работах [1, 2], где были получены известные выражения для скорости всплывания пузыря Тейлора, хорошо согласующиеся с результатами экспериментальных исследований [3–5]. Возможной причиной этого является тот факт, что в своих выкладках авторы работ [1, 2] использовали лишь несколько первых членов бесконечного ряда (2). В настоящей работе излагается возможный приближенный метод корректного анализа указанной проблемы, отдельные этапы которого изложены в работах [9–11].

Суперпозиция элементарных течений

Расположим в начале координат источник интенсивностью Q с потенциалом скоростей φ_1 :

$$\varphi_1 = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}. \tag{7}$$

Осевая U_1 и радиальная V_1 компоненты скорости течения от источника будут иметь вид

$$U_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}, \tag{8}$$

$$V_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi}\frac{r}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}. \tag{9}$$

Если поместить источник в гипотетическую трубу радиусом R, то ее стенки окажутся проницаемыми (рис. 1, *a*). Наложим на течение от источника течение вдува, удовлетворяющее условию

$$V_1\big|_{r=1} + V_2\big|_{r=1} = 0. \tag{10}$$

Выражение (10) представляет собой условие непротекания на стенке трубы.

Будем искать потенциал течения вдува в трубу φ_2 в виде

$$\varphi_2 = \int\limits_0^\infty A(y) I_0(yr)\cos(yz)\,dy, \tag{11}$$

где $A(y)$ — неизвестная функция. Определяя из (11) радиальную скорость $V_2 = \partial\varphi_2/\partial r$ и подставляя ее в (10), получаем:

$$\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^{3/2}} = \int\limits_0^\infty A(y) I_1(y)\, y\cos(yz)\,dy. \tag{12}$$

Вводя обозначения

$$f(z) = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^{3/2}}, \tag{13}$$

$$A(y) I_1(y)\, y = A_1(y), \tag{14}$$

перепишем (13) в виде

$$f(z) = \int\limits_0^\infty A_1(y)\cos(yz)\,dy. \tag{15}$$

Равенство (15) есть представление функции $f(z)$ в виде косинус-интеграла Фурье [12]. Тогда функция

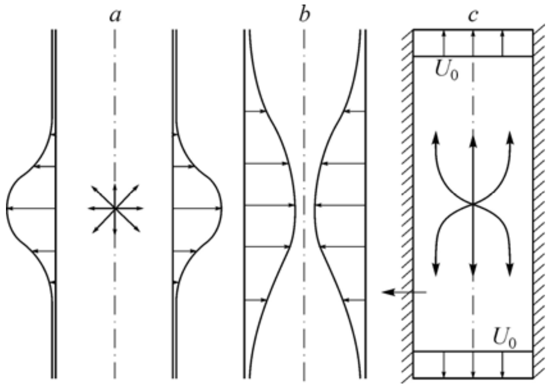

Рис. 1.

$A(y)$ может быть найдена из обратного преобразования Фурье:

$$A_1(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\sigma)\cos(\sigma y)\,d\sigma=\frac{Q}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos(\sigma y)}{\left(1+\sigma^2\right)^{3/2}}\,d\sigma. \quad (16)$$

С учетом значения табличного интеграла [13]

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\sigma y)}{\left(1+\sigma^2\right)^{3/2}}\,d\sigma = y\,K_1(y), \quad (17)$$

из (14), (17) получаем:

$$A_1(y)=\frac{Q}{2\pi^2}\,y\,K_1(y), \quad (18)$$

$$A(y)=\frac{Q}{2\pi^2}\frac{K_1(y)}{I_1(y)}. \quad (19)$$

Здесь $K_1(y)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка [7]. С учетом (19) перепишем выражение (11) для потенциала скоростей течения вдува в виде

$$\varphi_2=\frac{Q}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}I_0(yr)\cos(yz)\,dy. \quad (20)$$

Используя свойство линейности уравнения Лапласа, определим течение от источника в трубе как суперпозицию течений от двух элементарных течений: $\varphi_1+\varphi_2$ (рис. 1, *b*). При $z\to\pm\infty$ это течение асимптотически переходит в однородный поток, скорость которого U_0 связана с интенсивностью источника Q условием баланса массы: $U_0=Q/(2\pi)$. Накладывая на полученное симметричное течение однородный поток интенсивностью U_∞

$$\varphi_3=-U_\infty z, \quad (21)$$

получаем картину обтекания тела вращения в непроницаемой трубе. Таким образом, путем суперпозиции трех элементарных течений мы построили суммарное течение идеальной жидкости в трубе, потенциал скоростей которого $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$ запишется в виде (рис. 1, *c*):

$$\varphi=-\frac{U_0}{2}\frac{1}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}-\frac{U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}I_0(yr)\cos(yz)\,dy-U_\infty z. \quad (22)$$

Найдем из (22) осевую $(U=\partial\varphi/\partial z)$ и радиальную $(V=\partial\varphi/\partial r)$ скорости суммарного течения:

$$U=\frac{U_0}{2}\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}+\frac{U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)\,y}{I_1(y)}I_0(yr)\sin(yz)\,dy-U_\infty z, \quad (23)$$

$$V=\frac{U_0}{2}\frac{r}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}-\frac{U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)\,y}{I_1(y)}I_1(yr)\cos(yz)\,dy. \quad (24)$$

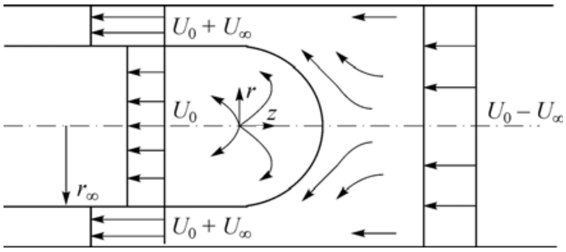

Рис. 2.

Функция тока суммарного течения запишется в виде

$$\psi = \frac{U_0}{2}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/2}}\right] + \frac{U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)} r\, I_1(yr)\sin(yz)\,dy - \frac{U_\infty}{2} r^2. \tag{25}$$

Полагая в (25) $\psi = 0$, получаем уравнение, определяющее контур тела вращения (рис. 2):

$$r_s^2 = f^{-1}\left[1 - \frac{z_s}{\left(z_s^2 + r_s^2\right)^{1/2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)} r_s\, I_1(yr_s)\sin(yz_s)\,dy\right], \tag{26}$$

где

$$f = U_\infty / U_0 \text{ —} \tag{27}$$

параметр интенсивности источника.

Скорость натекания на тело при $z \to \infty$ будет равна $U_\infty - U_0 = U_0(f-1)$. Скорость течения в зазоре между телом и стенкой трубы при $z \to -\infty$ составит $U_\infty + U_0 = U_0(f+1)$. Тогда из условия баланса массы жидкости при $z \to \pm\infty$

$$U_\infty - U_0 = \left(U_\infty + U_0\right)\left(1 - r_{s\infty}^2\right) \tag{28}$$

получаем асимптотический радиус тела вращения при $z \to -\infty$ (рис. 2):

$$r_\infty = \sqrt{2/f + 1}. \tag{29}$$

Как видно из рис. 2, во внутренней области тела также будет иметь место течение с критической точкой и асимптотической скоростью U_0 при $z \to -\infty$. Однако ниже рассмотрим только внешнее обтекание тела. Из условия равенства нулю скорости в критической точке [8] из (23) имеем

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)\,y}{I_1(y)} \sin(\lambda y)\,dy, \tag{30}$$

где λ — расстояние от тела вращения до источника (рис. 2). Величина λ играет роль основного параметра рассматриваемой задачи.

Течение в окрестности критической точки

Перейдем к осевой координате $\hat{z} = \lambda - z$, отсчитываемой от критической точки в сторону источника. Запишем разложения в ряд Тейлора при $\hat{z} << 1$ (с точностью до линейных членов) следующих величин:

осевой U и радиальной V скоростей:

$$U = -U'_z\,\hat{z} + U'_\rho\,\rho, \tag{31}$$

$$V = V'_r\,\hat{z} + U'_\rho\,r, \tag{32}$$

квадрата полной скорости на граничной линии тока:

$$U_s^2 + V_s^2 = -2\frac{\left(U'_z\right)^3}{U''_z}\hat{z}, \tag{33}$$

уравнения граничной линии тока:

$$\rho_s = 2\,r_k\,\hat{z}. \tag{34}$$

Здесь $\rho \equiv r^2$, штрих обозначает производную по координате, обозначенной нижним индексом. С учетом уравнения неразрывности в окрестности критической точки ($V'_r = U'_z/2$) выражение (32) можно переписать в виде:

$$V = -U'_z r/2. \tag{35}$$

Вместо (26) будем использовать асимптотическое уравнение контура тела (рис. 2), полученное из интеграла

$$\psi = \int_0^\infty U r dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty U d\rho = 0. \tag{36}$$

Из (31), (36) получаем безразмерный радиус кривизны r_k в критической точке:

$$r_k = 2U'_z/U'_\rho. \tag{37}$$

Используя тождество $U'_\rho = -U''_{zz}/4$, перепишем (37) в виде:

$$r_k = -4U'_z/U''_{zz}. \tag{38}$$

Для того, чтобы перейти от обтекания твердого тела к обтеканию газового пузыря, необходимо удовлетворить условию свободной поверхности (4). Тогда с учетом (33) получаем:

$$-(U'_z)^3/U''_{zz} = g\,R_0. \tag{39}$$

Введем новую функцию $h(\lambda)$, связанную с функцией $f(\lambda)$ соотношением

$$h(\lambda) = f(\lambda) - 1, \tag{40}$$

или, с учетом (30),

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} - 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)\,y}{I_1(y)}\sin(y\lambda)\,dy. \tag{41}$$

Из (23), (30), (41) следует: $U'_z = U_0 h',\ U''_{zz} = U_0 h''$. Здесь штрих означает производную по параметру λ. Скорость натекания жидкости W_∞ на пузырь при $z \to +\infty$ будет равна

$$W_\infty = U_\infty - U_0 = U_0 h. \tag{42}$$

В системе координат, в которой жидкость при $z \to +\infty$ покоится, величина W_∞ будет равна искомой скорости всплывания пузыря Тейлора. Определим число Фруда известным соотношением [1–5]:

$$\mathrm{Fr} = W_\infty \big/ \sqrt{g\,R}\,. \tag{43}$$

С учетом уравнений (41), (42) соотношения (29), (37), (43) принимают вид:

$$r_\infty = \sqrt{2/(2+h)}, \tag{44}$$

$$r_k = -4\,h'/h'', \tag{45}$$

$$\mathrm{Fr} = \sqrt{h^2 h''/(h')^3}\,. \tag{46}$$

Асимптотики решения

Рассмотрим асимптотики соотношений (44)–(46) по параметру λ.
При $\lambda \to 0$ из (41) следует:

$$h(x) = 1/2\,\lambda^2 \to \infty. \tag{47}$$

Тогда из (43)–(45) получаем:

$$r_\infty \to 2\,\lambda, \tag{48}$$

$$r_k \to 4\lambda/3, \tag{49}$$

$$\mathrm{Fr} \to \sqrt{3\lambda/4}\,. \tag{50}$$

Согласно (27), (30), при $\lambda \to 0$ интенсивность источника будет исчезающе мала по сравнению с интенсивностью однородного потока: $U_0 << U_\infty$.

Найдем теперь асимптотики соотношений (44)–(46) при $\lambda \to \infty$. Запишем разложение функции $I_1(y)$ в ряд Тейлора [13]:

$$I_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}. \tag{51}$$

Определим функцию $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\frac{y}{2}\sin(\lambda y)\,dy, \tag{52}$$

связанную с функцией $f(\lambda)$ соотношением

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{2}{\pi}F(\lambda). \tag{53}$$

Найдем из выражения (52) четные производные функции $F(\lambda)$ по основному параметру $F^{(2k)} = \partial^{2k}F/\partial\lambda^{2k}$:

$$\left.\begin{aligned}
&F^{(2)}=-\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\frac{y^3}{2}\sin(\lambda y)\,dy,\\
&F^{(4)}=\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\frac{y^5}{2}\sin(\lambda y)\,dy,\\
&F^{(6)}=-\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\frac{y^7}{2}\sin(\lambda y)\,dy,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F^{(2k)}=(-1)^k\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\frac{y^{2k+1}}{2}\sin(\lambda y)\,dy,\\
&k=0,1,2,3,\ldots .
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Домножая левую и правую части рекуррентного соотношения (54) на $\dfrac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}$ и складывая почленно члены $\dfrac{(-1)^k F^{(2k)}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}f^{(2k)}=\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\right\}\sin(\lambda y)\,dy. \tag{55}$$

Мы видим, таким образом, что выражение в фигурных скобках под интегралом в (55) тождественно равно бесконечному ряду (51). Поэтому цепочка уравнений (54) может быть переписана в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}F^{(2k)}=\int_0^\infty K_1(y)\sin(\lambda y)\,dy. \tag{56}$$

Интеграл в правой части уравнения (56) — табличный [13], следовательно:

$$\int_0^\infty K_1(y)\sin(\lambda y)\,dy=\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \tag{57}$$

Из (56), (57) следует линейное неоднородное дифференциальное уравнение бесконечного порядка:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}F^{(2k)}=\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \tag{58}$$

В рекуррентном соотношении (58) справедливо тождество: $F^{(0)}\equiv F$. Из уравнения (58) получаем дифференциальное уравнение для функции $f(\lambda)$, определяемой соотношением (53):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}f^{(2k)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\frac{1}{\lambda^{2(k+1)}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \tag{59}$$

Запишем разложение последнего члена в правой части уравнения (59) в степенной ряд при $\lambda >> 1$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{\lambda^4} - \frac{5}{16}\frac{1}{\lambda^6} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\frac{1}{\lambda^{2(k+1)}} + \ldots . \tag{60}$$

Переписывая (60) в виде

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\frac{1}{\lambda^{2(k+1)}}, \tag{61}$$

убеждаемся в том, что два бесконечных ряда в правой части (59) при $\lambda \to \infty$ равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки. В результате получаем дифференциальное уравнение бесконечного порядка относительно функции $h(\lambda)$, определяемой (40):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!} h^{(2k)} = 0. \tag{62}$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения (62) может быть формально записано в виде бесконечного экспоненциального ряда [14]:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(\pm \beta_k \lambda) = 0. \tag{63}$$

Здесь β_k — корни уравнения $J_1(\beta_k) = 0$, C_k — свободные числовые коэффициенты. Сходящееся при $\lambda \to \infty$ решение уравнения (62) будет выражаться рядом (63) с отрицательными показателями экспонент:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\beta_k \lambda) = 0. \tag{64}$$

Переходя в (64) к пределу при $\lambda \to \infty$ и ограничиваясь первым членом ряда, получаем:

$$h = C_1 \exp(-\beta_1 \lambda), \tag{65}$$

где $\beta_1 = 3{,}83170597$ — первый нуль функции Бесселя первого порядка. С учетом асимптотического соотношения (65) формулы (29), (37), (46) принимают следующий вид:

$$r_\infty \approx 1 - (C_1/4)\exp(-\beta_1 \lambda) \approx 1, \tag{66}$$

$$r_k = 4/\beta_1 \approx 1{,}04, \tag{67}$$

$$\mathrm{Fr} = \sqrt{1/\beta_1} \approx 0{,}511. \tag{68}$$

Формулы (66)–(68) описывают предельный случай: асимптотическая скорость от источника при $z \to \infty$ равна скорости однородного потока $(U_0 = U_\infty)$, критическая точка $\hat{z} = \lambda$ удалена от координаты источника $\hat{z} = 0$ на бесконечное расстояние.

Уравнения (40), (59) для каждого значения основного параметра λ однозначно определяют функцию $h(\lambda)$, а следовательно, и интересующие нас остальные параметры, полученные в соотношениях (44)–(46). Отметим, что уравнение (62) справедливо лишь асимптотически при $\lambda \to \infty$, поэтому постановка для него задачи Коши с начальными условиями при $\lambda = 0$ принципиально невозможна. Следовательно, является невозможным также и определение коэффициентов C_k для (64). Однако при переходе от бесконечного ряда (64) к асимптотическому решению (65) соотношения (29), (37), (46) оказываются однородными по коэффициенту C_1, поэтому последний при вычислении параметров r_∞, r_k, Fr сокращается.

Так как пузырь Тейлора по определению должен заполнять все сечение трубы [1–5], естественно приянять за искомое выражение для числа Фруда асимптотическое значение (68). Последнее с точностью до 3 % совпадает с классическим результатом [1] $\mathrm{Fr} = 0{,}496$.

Заключение

Для решения задачи о всплывании пузыря Тейлора в круглой трубе использован метод суперпозиции элементарных течений, удовлетворяющих уравнению Лапласа: источника в объеме, вдува и однородного потока. Построено течение идеальной жидкости в трубе относительно тела вращения. Переход к задаче обтекания пузыря осуществлен путем выполнения условия свободной поверхности в окрестности критической точки. После выполнения предельного перехода по основному параметру (безразмерному расстоянию от критической точки до координаты источника) получено соотношение для искомой безразмерной скорости всплывания пузыря — числа Фруда.

Список литературы

1. **Dumitrescu D.T.** Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr // Z. angew. Math. Mech. 1943. Bd. 23. P. 139–149.
2. **Davies R.M., Taylor G.I.** The mechanics of large bubbles rising through liquids in tubes // Proc. Royal Soc. London. 1950. A 200: 375–390.
3. **Уоллис Г.** Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 436 с.
4. **Viana F., Pardo R., Yanez R., Trallero J., Joseph D.D.** Universal correlation for the rise velocity of long gas bubbles in round pipes // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 494. P. 379–398.
5. **Fonda T., Joseph D.D., Mathura T., Yamashita S.** Ellipsoidal model of the rise of a Taylor bubble in a round tube // Int. J. Multiphase Flow. 2004. Vol. 31. С. 473–491.
6. **Волков П.К.** Расчет локальных характеристик жидкости с пузырьками газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, № 8. С. 180–194.
7. **Грей Э., Мэтьюз Г.Б.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. 372 с.
8. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
9. **Зудин Ю.Б.** Аналог уравнения Релея для задачи о динамике пузыря в трубе // ИФЖ. 1992. Т. 63, № 1. С. 28–32.
10. **Зудин Ю.Б.** Расчет скорости всплывания крупных газовых пузырей // ИФЖ. 1995. Т. 68, № 1. С. 13–17.
11. **Zudin Y.B.** Theory of periodic conjugate heat transfer. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. 264 p.
12. **Винер Н.** Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматлит, 1963. 258 с.
13. **Градштейн И.С. Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.
14. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 331 с.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2011 г.