

# МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ К НИЗКОЧАСТОТНЫМ КОЛЕБАНИЯМ ПЛАЗМЫ

*А. А. Рухадзе, В. С. Саводченко, С. А. Тригер*

(Москва)

Теория колебаний пространственно неоднородной плазмы [1] существенно опирается на метод геометрической оптики применительно к дифференциальным уравнениям второго порядка. В настоящее время теория асимптотических решений для уравнений второго порядка хорошо разработана [2]. Квазиклассические правила квантования, определяющие спектр собственных значений таких уравнений, записываются в виде известных интегралов Бора — Зоммерфельда [3]. Однако во многих случаях при анализе спектров колебаний неоднородной плазмы недостаточно ограничиваться уравнениями второго порядка. Так, например, в неоднородной магнитоактивной плазме даже при пренебрежении тепловым движением частиц уравнения поля, вообще говоря, сводятся к дифференциальному уравнению четвертого порядка. Уравнения четвертого порядка возникают также при исследовании устойчивости гидродинамического течения вязкой жидкости [4].

Некоторые частные виды уравнений четвертого порядка были изучены в работах [4–6]. В работах [6] было получено квазиклассическое правило квантования для уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. В настоящей работе исследуется общее уравнение четвертого порядка с действительными коэффициентами. Получены асимптотические решения такого уравнения с точностью до членов первого порядка в приближении геометрической оптики и установлены квазиклассические правила квантования для различных конкретных случаев. При помощи развитой теории определен новый спектр колебаний, характерный лишь для неоднородной плазмы в магнитном поле.

1. В наиболее общем виде уравнение четвертого порядка, возникающее при исследовании малых колебаний неоднородной плазмы во внешнем магнитном поле, без учета диссипативных процессов в первом приближении геометрической оптики можно записать так:

$$y^{IV} + 2p(\omega, x)y'' + 2\varepsilon(\omega, x)y' + q(\omega, x)y = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $p(\omega, x)$  и  $q(\omega, x)$  — медленно меняющиеся действительные функции координаты  $x$ , так что  $\delta \sim p'p^{-3/2} \sim q'q^{-3/2} \ll 1$  во всей области изменения  $x$ , действительная функция  $\varepsilon(\omega, x)$ , малая по сравнению с  $p(\omega, x)$  и  $q(\omega, x)$ , имеет первый порядок малости по параметру  $\delta$  и, наконец,  $\omega$  — собственное значение. Функции  $p(\omega, x)$ ,  $q(\omega, x)$  и  $\varepsilon(\omega, x)$  являются действительными при действительных  $x$  (или почти действительных).

Будем искать решения уравнения (1.1) с точностью до членов первого порядка по параметру  $\delta$ . Искомые решения запишем в виде

$$y = C \exp \left\{ i \int^x k(\omega, x) dx \right\} \quad (1.2)$$

Тогда в нулевом приближении геометрической оптики (т. е. по параметру  $\delta$ ) для функции  $k(\omega, x)$ , называемой волновым вектором, получим

$$k_{1,2}^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (1.3)$$

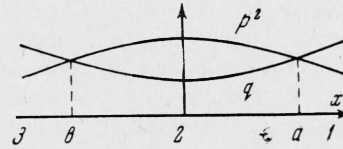
В первом приближении находим поправку

$$\delta k = \frac{i}{2} \left\{ [\ln k(p^2 - q)]' + \frac{p' - \varepsilon}{k^2 - p} \right\} \quad (1.4)$$

Из этого выражения видно, что геометрическая оптика нарушается вблизи точек

$$k(\omega, x) = 0, \quad p^2(\omega, x) = q(\omega, x) \quad (1.5)$$

Первая из этих особых точек уже встречалась в теории дифференциальных уравнений второго порядка и называется точкой поворота. Особые же точки второго типа характерны лишь для уравнений четвертого порядка. Ниже такие особые точки будут называться точками ветвления. Как будет показано, наличие точек ветвления в некоторых случаях может привести к появлению малой мнимой части у собственных значений, что соответствует слабому (в первом приближении геометрической оптики) затуханию, либо нарастанию колебаний, описываемых уравнением (1.4). Кроме того, вследствие совпадения волновых векторов  $k_1$  и  $k_2$  в точках ветвления происходит трансформация различных собственных решений, соответствующих волновым векторам  $k_1$  и  $k_2$ , что, в свою очередь, приводит к зацеплению волновых векторов различных волн в правилах квантования уже в нулевом приближении геометрической оптики.



Фиг. 1

Рассмотрим случай, когда точки ветвления лежат на действительной оси и между ними нет других особых точек, в которых нарушается геометрическая оптика (фиг. 1). Будем считать также, что  $p(\omega, x) > 0$ . В области 2 (область прозрачности) вдали от точек ветвления общее решение уравнения (1.1) с точностью до членов первого порядка в приближении геометрической оптики запишется в виде

$$\begin{aligned} y^{(2)} = & \frac{C_1}{\sqrt[4]{k_1^2(p^2 - q)}} \exp \left( i \int_a^x k_1 dx - \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\ & + \frac{C_2}{\sqrt[4]{k_1^2(p^2 - q)}} \exp \left( -i \int_a^x k_1 dx - \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\ & + \frac{C_3}{\sqrt[4]{k_2^2(p^2 - q)}} \exp \left( i \int_a^x k_2 dx + \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\ & + \frac{C_4}{\sqrt[4]{k_2^2(p^2 - q)}} \exp \left( -i \int_a^x k_2 dx + \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В областях 1 и 3 (области непрозрачности), в соответствии с финитностью решений при  $x = \pm \infty$ , должны быть отброшены нарастающие решения. При этом имеем

$$\begin{aligned} y^{(1)} = & \frac{C_1'}{\sqrt[4]{k_1^2(q - p^2)}} \exp \left( i \int_a^x \bar{k}_1 dx + \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) + \\ & + \frac{C_4'}{\sqrt[4]{k_2^2(q - p^2)}} \exp \left( -i \int_a^x \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$y^{(3)} = \frac{C_2'}{\sqrt[4]{k_1^2(q-p^2)}} \exp\left(i \int_x^b \bar{k}_1 dx - \frac{i}{2} \int_0^x \frac{p'-\varepsilon}{\sqrt{q-p^2}} dx\right) +$$

$$+ \frac{C_3'}{\sqrt[4]{k_2^2(q-p^2)}} \exp\left(-i \int_x^b \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_0^x \frac{p'-\varepsilon}{\sqrt{q-p^2}} dx\right)$$

$$\bar{k}_{1,2}^2 = p \pm i \sqrt{q-p^2}$$

Чтобы сшить решения (1.6) и (1.7), справедливые по разные стороны от точек ветвления  $a$  и  $b$ , распространим эти решения формально на комплексную плоскость  $x$  и обойдем точки  $a$  и  $b$  по такому контуру, на котором соблюдаются условия применимости приближения геометрической оптики. Ниже дается доказательство справедливости такого метода сшивания решений. Совершая обходы вокруг точек ветвления по полуокружностям большого радиуса, расположенным в верхней и в нижней полуплоскостях, получим связь между коэффициентами  $C_i$ ,  $C_i'$  и  $C_i^\circ$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Коэффициенты  $C_i$  соответствуют решению (1.6) вблизи точки  $a$ , а коэффициенты  $C_i^\circ$  — вблизи точки  $b$  (см., например, [7], § 47). Находим при обходах вокруг точки  $a$

$$C_1' e^{-i/4\pi} = C_3, \quad C_4' e^{-i/4\pi} = C_2, \quad C_1' e^{i/4\pi} = C_1, \quad C_4' e^{i/4\pi} = C_4$$

при обходах вокруг точки  $b$

$$C_2' e^{i/4\pi} = C_2^\circ, \quad C_3' e^{i/4\pi} = C_3^\circ, \quad C_2' e^{-i/4\pi} = C_4^\circ, \quad C_3' e^{-i/4\pi} = C_1^\circ$$

При этом каждое из двух линейно независимых решений в области непрозрачности при обходе точки ветвления разлагается лишь по двум независимым решениям в области прозрачности. В результате в области прозрачности получим два асимптотических решения уравнения (1.1), отождествление которых приводит к системе четырех линейных уравнений для коэффициентов  $C_i'$ . Из условия разрешимости этой системы и получаем искомые правила квантования, определяющие спектр собственных значений уравнения (1.1) при наличии двух точек ветвления

$$\int_b^a (k_1 - k_2) dx \pm i \int_b^a \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.8)$$

где  $n$  — целые числа. Для существования нетривиальных решений уравнения (1.1) достаточно выполнение одного из соотношений (1.8). Это означает, что данные соотношения определяют два набора собственных значений  $\omega$ , соответствующих двум различным системам собственных решений уравнения (1.1). Из соотношений (1.8) следует, что если  $p' \neq \varepsilon$  во всей области прозрачности, то спектр собственных значений  $\omega$  обладает малой мнимой частью (порядка  $\delta$ ), соответствующей затухающим либо нарастающим во времени решениям.

2. Приведем теперь более строгое математическое обоснование изложенного выше метода сшивания решений. Изложенный метод существенно опирается на предположение, что при обходе особых точек в комплексной плоскости  $x$  всегда можно выбрать такой контур, на котором нигде не нарушается условие применимости геометрической оптики. Покажем, что это действительно так. Без ограничения общности доказательства положим  $\varepsilon(\omega, x) = 0$ . Тогда уравнение (1.1) в окрестности точки ветвления

можно приближенно записать в виде

$$y^{IV} + (2p_0 - \beta x) y'' + (p_0^2 + \alpha x) y = 0 \quad (2.1)$$

где  $\beta = -2p_0'$ , а  $\alpha = q_0'$ . Для определенности будем считать, что  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ . Точное решение уравнения (2.1) находится методом Лапласа (см., например, [7])

$$y(x) = \int_C \frac{Z(t)}{Q(t)} dt \quad (2.2)$$

где

$$Z(t) = \exp \left\{ xt + \int \frac{P(t')}{Q(t')} dt' \right\} \quad (2.3)$$

$$P(t) = (p_0 + t^2)^2, \quad Q(t) = \alpha - \beta t^2$$

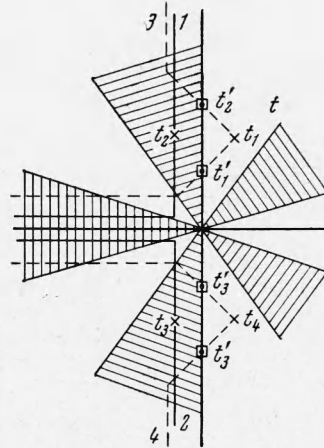
Интегрирование в формуле (2.2) ведется в комплексной плоскости по таким контурам  $C$ , на которых функция  $Z(t)$  возвращается к своему начальному значению, после того как опишет всю линию  $C$ . В рассматриваемом случае таких линейно независимых контуров четыре, что соответствует четырем линейно независимым решениям уравнения (2.1). При больших значениях  $x$  интегралы (2.2) можно вычислить методом перевала. Обозначив перевальные точки через  $t_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), асимптотические значения  $y(x)$  запишем в виде

$$y(x) = \sum_i \frac{i}{\alpha - \beta t_i^2} \exp \left( \int t_i(x) dx \right) \int_C dt \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{P}{Q} \right)'_{t_i} (t - t_i)^2 \right\} \quad (2.4)$$

Рассмотрим сначала случай  $p'(\omega, x) = 0$ . Контурные интегрирования в плоскости  $t$  для этого случая изображены на фиг. 2 — (1) и (2) при  $x > 0$  и (3) и (4) — при  $x < 0$ . Чтобы интегралы (2.2) были конечны, контуры выбраны таким образом, что уходят в бесконечность в заштрихованных секторах, в которых  $Z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Точки перевала при  $x > 0$  (область непрозрачности) отмечены на фиг. 2 звездочкой, а при  $x < 0$  (область прозрачности) — квадратиком, причем контуры интегрирования проведены через них в направлении скорейшего спуска. Решения, соответствующие контурам, проходящим через точки  $t_1$  и  $t_4$  при  $x > 0$ , расходятся на бесконечности. Поэтому такие контуры на фиг. 2 не изображены. Наконец, заметим, что при приближении к точке ветвления

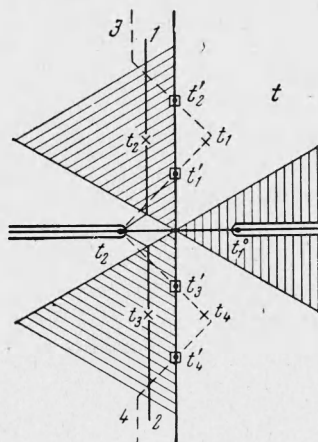
$$\begin{aligned} \pm k_2 &\rightarrow t_{1,3}, & \pm k_1 &\rightarrow t_{2,4} & \text{при } x > 0 \\ \pm k_2 &\rightarrow t_{1,3}', & \pm k_1 &\rightarrow t_{2,4}' & \text{при } x < 0 \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление (2.4) по контурам, указанным на фиг. 2, приводит к решениям, которые при учете этих соотношений переходят в соответствующие квазиклассические решения (1.6) и (1.7), сшитые изложенным выше методом. Нам остается доказать, что решения, полученные путем интегрирования по контурам (1) и (2) при  $x > 0$ , переходят соответственно в решения, получаемые путем интегрирования по контурам (3) и (4) при  $x < 0$ . Задание решения при  $x > 0$  (что эквивалентно заданию контура интегрирования) при условии конечности однозначным образом определяет решение при  $x < 0$ , если концы контуров, определяющих эти решения, уходят на бесконечность в комплексной плоскости  $t$  в одних и тех же секторах. Это имеет место для выбранных нами контуров



Фиг. 2

(1), (3), (2), (4). Для доказательства конечности решений было показано, что на отрезках прямых, составляющих эти контуры, действительная часть подынтегральной экспоненты в формуле (2.2) имеет максимум в точках перевала и экспоненциально спадает при удалении от них в направлении скорейшего спуска. Это свидетельствует о правильности асимптотического выражения (2.4) и тем самым подтверждает изложенный выше метод сшивания квазиклассических решений уравнения (1.1). Таким образом, формулы (1.6), (1.7) и (2.2) определяют решения уравнения (1.1) (при  $p' = \epsilon = 0$ ) во всей области изменения  $x$ .



Фиг. 3

В случае  $p' \neq 0$  принцип рассмотрения остается тот же, но контуры имеют несколько иной вид, что связано с наличием точек ветвления у подынтегральной функции (2.2) при  $\beta \neq 0$ ,  $t_{1,2}^0 = \pm (\alpha / \beta)^{1/2}$  с интегрируемой особенностью в точке  $t_2^0$ . Для однозначности подынтегральной функции на плоскости  $t$  приведены разрезы по действительной оси (см. фиг. 3). Жирной и пунктирной кривой указаны выбранные нами контуры интегрирования соответственно при

$x > 0$  и  $x < 0$ , которые уже не уходят на бесконечность параллельно действительной оси, а заканчиваются в точке  $t_2^0$ , в которой  $Z(t_2^0) = 0$ .

3. Выше получены правила квантования, определяющие спектр собственных значений уравнения (1.1) в случае, когда в области изменения  $x$  имеются лишь две точки ветвления и область прозрачности расположена между ними. Приведем теперь без вывода правила квантования для других случаев. Такие правила квантования легко получаются изложенным выше методом сшивания при использовании квазиклассических решений (1.6) и (1.7).

Если в области изменения  $x$  имеется лишь одна точка ветвления  $a$ , а на второй границе области прозрачности заданы недиссипативные граничные условия  $y(b) = y'(b) = 0$ , то правило квантования имеет вид

$$\int_b^a (k_1 - k_2) dx = \pi n \quad (3.1)$$

где  $n$  — целое число, значительно превосходящее единицу. В соотношении (3.1) опущены малые члены первого порядка в приближении геометрической оптики. В рассматриваемом случае, в отличие от (1.8), они оказываются действительными и приводят к несущественным поправкам.

В случае, когда между точкой ветвления  $a$  и границей области изменения  $x$ , на которой задано условие  $y(b) = 0$ , имеется точка поворота  $q(\xi) = 0$  (в этой точке  $k_2^2$  меняет знак), правило квантования, определяющее спектр собственных значений (1.1), записывается в виде

$$\int_b^a k_1 dx - \int_{\xi}^a k_2 dx = \pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \quad (3.2)$$

Это соотношение записано с точностью до членов первого порядка включительно.

Наконец, если области прозрачности ограничены лишь точками поворота или границей, на которой заданы недиссипативные условия, то правила квантования для каждого из волновых векторов  $k_1$  и  $k_2$  имеют такой же вид, как и в случае уравнения второго порядка [3].

4. Применим теперь полученные выше правила квантования к реальным колебаниям пространственно неоднородной плазмы. Естественно наибольший интерес представляет случай, когда в области изменения  $x$  (область, занятая плазмой) существуют точки ветвления. Как отмечалось выше, в точках ветвления происходит зацепление различных мод колебаний, что должно приводить к качественному изменению спектра колебаний неоднородной плазмы по сравнению с однородной.

Рассмотрим потенциальные колебания магнитоактивной максвелловской плазмы в области частот  $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$  ( $\Omega$  — ларморовская частота частиц, индексы  $e$  и  $i$  относятся соответственно к электронам и ионам), когда электроны сильно замагничены, а ионы свободны. Магнитное поле направим вдоль оси  $z$  и примем, что  $\omega \gg k_z v_e$ ,  $k v_i$ , а  $k_{\perp} = \sqrt{k_y^2 + k_x^2} \gg k_z$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а  $v = \sqrt{T/m}$  — тепловая скорость частиц). Наконец, плазма считается неизотермической, в которой ионы горячее электронов, т. е.  $T_i \gg T_e$ . В этих условиях диэлектрическая проницаемость, описывающая спектр потенциальных колебаний пространственно однородной плазмы, записывается в [8]

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_i^2}{\omega^2} \right) \quad (4.1)$$

где  $\omega_e$  и  $\omega_i$  — ленгмюровские частоты электронов и ионов. Спектр колебаний плазмы определяется нулями этого выражения и имеет вид

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 \omega_e^2 + k_{\perp}^2 \omega_i^2}{k_{\perp}^2 (1 + \omega_e^2 / \Omega_e^2)} + 3 \frac{\omega_i^2 k_{\perp}^4 v_i^2}{k_z^2 \omega_e^2 + k_{\perp}^2 \omega_i^2} \quad (4.2)$$

Покажем теперь, что в пространственно неоднородной плазме в рассматриваемых условиях при наличии точек ветвления появляется новый спектр, отличный от (4.2). Ограничимся рассмотрением слабонеоднородной плазмы с неоднородностью вдоль оси  $x$ . Исходя из уравнений двужидкостной магнитной гидродинамики со слабым ионным давлением [8], для потенциала псля колебаний в рассматриваемой области частот получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & 3 \frac{\omega_i^2 v_i^2}{\omega^4} \Phi^{IV} + 6 \left( \frac{\omega_i^2 v_i^2}{\omega^4} \right)' \Phi''' + \left[ 1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - 6(k_y^2 + k_z^2) \frac{\omega_i^2 v_i^2}{\omega^4} \right] \Phi'' + \\ & + \left[ 1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - 6(k_y^2 + k_z^2) \frac{\omega_i^2 v_i^2}{\omega^4} \right]' \Phi' - \left[ k_z^2 \left( 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \right) - k_y \left( \frac{\omega_e^2}{\omega \Omega_e} \right)' + \right. \\ & \left. + k_y^2 \left( 1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \right) - 3 \frac{\omega_i^2 v_i^2}{\omega^4} (k_y^2 + k_z^2)^2 \right] \Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

При помощи замены переменных это уравнение легко сводится к уравнению вида (1.1). При этом оказывается, что  $p' = \varepsilon$ . Поэтому правило квантования (1.8) для этого уравнения запишется в виде

$$\int_b^a (k_1 - k_2) = 2\pi n \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 = & -k_y^2 + \frac{\omega^4}{6\omega_i^2 v_i^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \pm \right. \\ & \left. \pm \left[ \left( 1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \right)^2 - 12 \frac{k_z^2 v_i^2 \omega_e^2 \omega_i^2}{\omega^6} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

При написании этих соотношений было пренебрежено членами первого порядка по параметру геометрической оптики и учтены указанные выше ограничения на частоту колебаний. Как видно из выражения (4.5),

в неоднородной плазме со спадающим к границе плазмы давлением, либо с нарастающим магнитным полем возможно наличие двух точек ветвления, между которыми расположена область прозрачности. Воспользовавшись теоремой о среднем значении интеграла, из формул (4.4) и (4.5) можно показать, что собственные частоты колебаний неоднородной плазмы, запертых между точками ветвления, в рассматриваемых нами условиях с хорошей степенью точности определяются нулями подкоренного выражения (4.5). Учитывая, кроме того, что  $p > 0$  для определения положительных решений  $\omega^2 > 0$  (только при этом существуют точки ветвления), получаем приближенное уравнение

$$\left(1 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2}\right) \omega^4 - \omega_i^2 \omega^2 - \sqrt{12 \omega^2 k_z^2 v_i^2 \omega_e^2 \omega_i^2} = 0 \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что с ростом волнового числа  $k_z$  частоты запертых между точками ветвления колебаний неоднородной плазмы изменяются в пределах

$$\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_e^2 / \Omega_e^2} \lesssim \omega^2 \lesssim \left[ \frac{12 k_z^2 v_i^2 \omega_e^2 \omega_i^2}{(1 + \omega_e^2 / \Omega_e^2)^2} \right]^{1/3} \lesssim 12 k_z^2 v_e^2 \frac{T_i}{T_e} \quad (4.7)$$

При  $k_z \rightarrow 0$  исследуемый спектр колебаний неоднородной плазмы близок к спектру колебаний однородной плазмы (4.2). Однако с ростом  $k$  он все больше отклоняется от спектра (4.2), причем в пределе коротких длин волн, когда

$$k_z^2 v_i^2 \geq \frac{m}{M} \omega_i^2$$

существенным образом зависит от температуры ионов. В однородной плазме такие колебания отсутствуют.

В заключение авторы благодарят В. П. Силина, подсказавшего идею спливания квазиклассических решений, а также Ю. Н. Днестровского и Д. П. Костомарова за обсуждение работы и ценные критические замечания.

Поступила 3 III 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. Колебания слабонеоднородной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 1271; Коврижных Л. М., Рухадзе А. А., Силин В. П. О колебаниях неоднородной плазмы низкого давления. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 1953; Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Успехи физ. наук, 1964, т. 82, стр. 499.
2. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Изд. иностр. лит., 1962; Langer R. E. On the connection formulas of the Solution of the wave equation. Phys. Rev., 1937, vol. 51, p. 669; Langer R. E. On the stability of the laminar flow of a viscous fluid. Bull. Amer. Math. Soc., 1940, vol. 46, p. 257.
3. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, стр. 267.
4. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
5. Wasow W. The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation. Ann. Math., 1948, vol. 49, p. 852; A study of the solution of a fourth order differential equation. Ann. Math., 1950, vol. 52, p. 350; A asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability. Ann. Math., 1953, vol. 58, p. 195.
6. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотический метод решения уравнения четвертого порядка с двумя малыми параметрами в гидродинамической теории устойчивости. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, стр. 1295; Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. ПМТФ, 1964, № 5, стр. 44.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
8. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1961.