

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.376; 622.23.01

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ, ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

А. М. Коврижных, В. Д. Барышников, А. П. Хмелинин

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: amkovr@mail.ru, v-baryshnikov@yandex.ru, hmelinin@misd.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Для металлов, грунтов и горных пород рассматривается неассоциированная с пирамидой Треска–Кулона модель ползучести, определяющие соотношения которой содержат углы внутреннего трения и дилатансии. Предложена методика нахождения углов внутреннего трения и дилатансии по экспериментально полученным кривым ползучести на цилиндрических образцах в условиях сжатия с боковым давлением. При определении времени разрушения для различных скоростей необратимых деформаций и при разных уровнях начальных напряжений используются деформационный и энергетический критерии, которые могут применяться как к однородным, так и неоднородным напряженным состояниям при длительном действии нагрузок.

Ползучесть горных пород, длительная прочность, предельная удельная работа диссипации, внутреннее трение, дилатансия, время разрушения, ассоциированный и неассоциированный законы течения

DOI: 10.15372/FTPRPI20250301
EDN: BQTZIB

Известно, что геоматериалы проявляют свойство ползучести даже при нормальных температурах и напряжениях ниже предела текучести. При увеличении глубины разработки месторождений полезных ископаемых происходит увеличение горного давления, напряжений, деформаций и одновременно с этим повышение температуры породного массива. Указанные факторы при создании подземных сооружений на больших глубинах приводят к увеличению скорости ползучести и разрушению горных пород вокруг выработок. При разработке твердых полезных ископаемых на глубоких горизонтах свойство ползучести оказывает существенное влияние на процессы необратимого деформирования и разрушения горного массива. Интерес к изучению процессов ползучести, длительной прочности и разрушения металлов, грунтов и горных пород вызван востребованностью этих знаний во многих отраслях промышленности:

наземном и подземном строительстве; добыче полезных ископаемых; машиностроении; самолетостроении и др. Изучению ползучести и длительной прочности различных материалов посвящено большое число работ, в которых обсуждаются как теоретические, так и экспериментальные результаты для металлов, грунтов и горных пород [1 – 14].

Для определения долговечности нагруженного образца или элемента конструкции в условиях ползучести при различных видах напряженных состояний необходимо знать критерий длительной прочности, который устанавливается по результатам проведения многочисленных опытов на растяжение, сжатие или кручение. Для грунтов и горных пород наиболее приемлемыми являются опыты на сжатие при различных уровнях сжимающих напряжений, меньших предела прочности. После испытания образцов и статистической обработки результатов экспериментов строятся зависимости пределов длительной прочности от времени разрушения. В теориях пластичности и ползучести первоначально принималась гипотеза об отсутствии изменения объема для необратимых деформаций [14 – 16]. С учетом этого предположения в [15] получено решение задачи для определения времени разрушения цилиндрического стержня при растяжении. Полученное теоретическое решение удовлетворительно согласуется с данными экспериментов на длительную прочность, но не подтверждается результатами опытов на кручение и сжатие, что связано с неучетом образования трещин и пор при деформировании металлов, грунтов и горных пород. Для объяснения процесса роста трещин и пор в условиях ползучести предложено кинетическое уравнение для параметра поврежденности [1, 2]. Оказывается, что трещинообразование при необратимом деформировании в геоматериалах можно объяснить явлением дилатансии, когда под действием касательного напряжения происходит увеличение нормальной деформации перпендикулярно соответствующему необратимому сдвигу [17 – 22].

В данном подходе образование в теле трещин и пор при росте необратимых деформаций моделируется с помощью применения неассоциированных моделей горных пород [18, 20, 22]. Аналогичные соотношения для описания процессов пластичности и ползучести могут быть получены как результат сдвигов по конечному числу систем скольжения, связанных с предельными плоскостями Треска – Кулона – Мора. Известно, что в горных породах необратимая деформация осуществляется по границам зерен, что вызывает разрыхление. Если для жестко-ползучего материала учесть дилатансию и уравнение неразрывности, то можно определять плотность горных пород при необратимом деформировании в зависимости от характеристического сдвига в любой момент времени. Считается, что при потере сдвиговой прочности твердые тела начинают разрушаться, когда сдвиги и плотность достигают критического значения. При всестороннем сжатии в стесненных условиях относительное изменение объема разрушенного материала происходит упруго. Если разрушение начинается со свободной границы, то весь разрушенный материал отделяется от тела и удаляется с его поверхности. В результате фронт разрушения становится новой свободной границей тела.

На основании изложенного можно утверждать, что теории пластичности и ползучести должны быть тесно связаны между собой и представлять две стороны единой теории необратимых деформаций. Однако при современном состоянии изучения вопроса о необратимых процессах деформирования раздельное изложение обеих теорий пока остается целесообразным и оправданным [11].

ДИЛАТАНСИОННО-СДВИГОВАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Рассмотрим сдвиговой механизм необратимого деформирования, в котором простой сдвиг γ в направлениях l_i ($i = 1, 2$) вызывает разрыхление (рис. 1а). Такую дилатансионно-сдвиговую модель впервые применили в [18], где представлены ассоциированные и неассоциированные с по-

верхностью Кулона–Мора законы течения. Эти теории можно также рассматривать как физические теории с конечным числом систем скольжения (рис. 1), в каждой из которых по нормали к плоскости сдвига происходит изменение нормальной деформации по закону

$$\epsilon'_{ni} = \alpha \gamma'_{ni}, \quad (1)$$

здесь $\alpha = \operatorname{tg}(\psi)$ — коэффициент дилатансии; ψ — угол дилатансии.

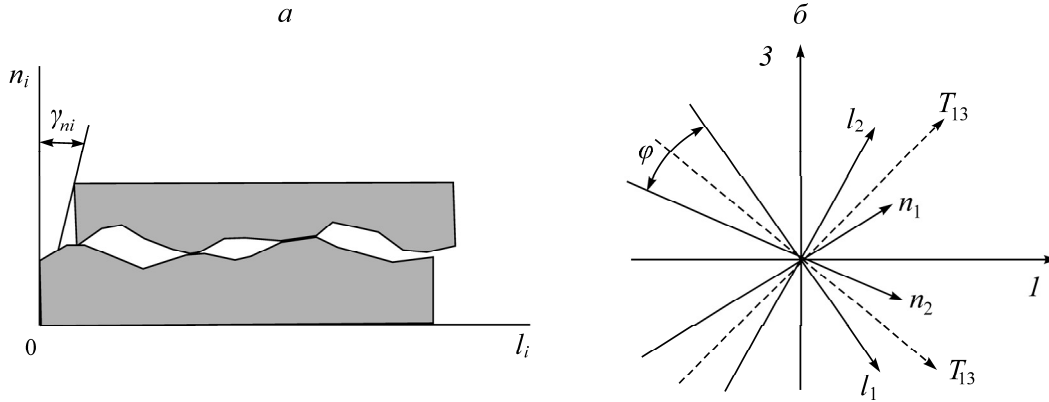


Рис. 1. Дилатансионно-сдвиговая модель деформирования (а) и направления необратимых сдвигов по предельным плоскостям Кулона–Мора (б): $l, 3$ — главные оси напряжений

На рис. 2 показаны линии пересечения поверхностей Кулона–Мора и Треска с девиаторной плоскостью. Учет влияния нормального напряжения на предельное значение максимального касательного напряжения T_{13} приводит к критерию длительной прочности Кулона–Мора. Применение данного критерия для разрушения в условиях ползучести рассматривалось в [19, 22]:

$$\tau_{2e} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \varphi} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \varphi = C(t_*) = \frac{D^{1/n}}{t_*^{1/n}}, \quad (2)$$

где φ — угол внутреннего трения; $C(t_*)$ — функциональная зависимость параметра ползучести от времени разрушения t_* ; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; τ_{2e} — левая часть критерия (2).

Из (2) зависимость t_* от начального напряжения имеет вид

$$t_* = D \tau_{2e}^{-n}, \quad (3)$$

D, n — параметры прочности горных пород, вычисляемые по результатам опытов.

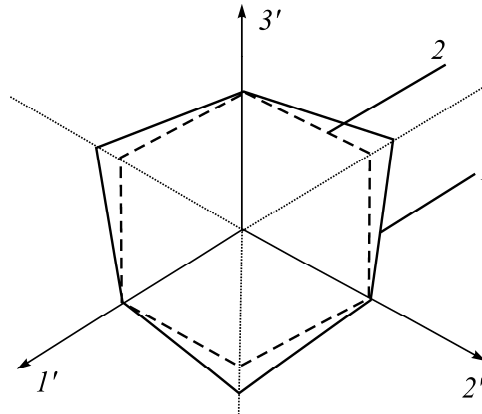


Рис. 2. Пересечение граней неправильной пирамиды Кулона–Мора (1) и призмы Треска (2) с девиаторной плоскостью

В пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ критерий прочности (2) представляет собой неправильную шестигранную пирамиду с вершиной на гидростатической оси. Этот критерий определяет две предельные плоскости, которые отклоняются от плоскостей действия T_{13} на угол $\varphi/2$ в направлении оси наибольшего сжатия. Предельные плоскости образуют с направлением σ_1 углы $\pi/4 \pm \varphi/2$ (рис. 1б). При $\varphi=0$ обе системы скольжения совпадают с направлениями действия максимального касательного напряжения T_{13} (рис. 3).

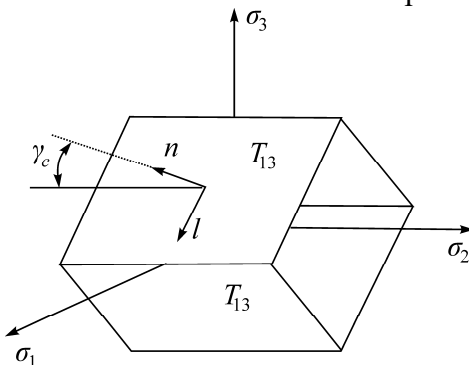


Рис. 3. Сдвиговая модель, основанная на максимальном касательном напряжении

Если $\varphi \neq 0$, то имеем две несовпадающие системы скольжения, связанные с предельными плоскостями, для которых применяется механизм двойного скольжения. Суммарный необратимый сдвиг по этим системам скольжения обозначается γ_c и называется характеристическим сдвигом. При $\varphi=0$ сдвиг γ_c совпадает с максимальным необратимым сдвигом и определяется на основе результатов опытов на одноосное нагружение. Проецируя этот простой сдвиг на главные оси напряжений при $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, получим:

$$e'_1 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha \sin \varphi + \cos \varphi}{2} \right) \gamma'_c, \quad e'_2 = 0, \quad e'_3 = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha \sin \varphi + \cos \varphi}{2} \right) \gamma'_c, \quad (4)$$

где e_1, e_2, e_3 — главные деформации ползучести.

НЕАССОЦИИРОВАННАЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ КУЛОНА – МОРА МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрим предельную поверхность нагружения (2), где за эквивалентное напряжение принимается левая часть критерия длительной прочности Кулона – Мора, т. е. $\tau_{2e} = C(t_*)$. Если потенциал ползучести принять в виде

$$T_2 = (\alpha \sin \varphi + \cos \varphi) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \alpha \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (5)$$

то определяющие соотношения, полученные на основе неассоциированного с критерием (2) закона течения, запишутся так:

$$e'_1 = \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_1} \gamma'_c, \quad e'_2 = \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_2} \gamma'_c, \quad e'_3 = \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_3} \gamma'_c. \quad (6)$$

С другой стороны, соотношения (6) представляют собой закон градиентальности, ассоциированный с потенциалом ползучести (5). Соотношения (6) в точности совпадают с (4). Если в (6) принять $\alpha = \operatorname{tg}(\varphi)$, т. е. угол дилатансии равен углу внутреннего трения $\psi = \varphi$, то из (2) и (5) получим, что $T_2 = \tau_{2e}$ и (6) совпадает с законом течения, ассоциированным с поверхностью нагружения Кулона – Мора (2).

В рассматриваемом предельном состоянии рост деформаций ползучести обусловлен увеличением сдвига γ и коэффициентом дилатансии α . Оба параметра ползучести при их росте могут привести к разрушению: если $\alpha=0$, то разрушение происходит, когда $\gamma=\gamma_*$, поэтому конечное время разрушения получается для всех видов однородного напряженного состояния, а не только для одноосного растяжения, как по схеме [15], когда $\gamma=\infty$. Если $\alpha>0$, то одновременно с ростом деформаций ползучести происходит увеличение трещин и пор. Таким образом, в предлагаемой дилатансионно-сдвиговой механической модели имеется два параметра поврежденности: характеристический сдвиг γ_* , связанный с двойным скольжением по смежным предельным плоскостям, и коэффициент дилатансии $\alpha=\operatorname{tg}(\psi)$, где ψ — угол дилатансии. Кинетическое уравнение для параметра поврежденности можно найти из уравнения неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho (e'_x + e'_y + e'_z) = -\rho (e'_1 + e'_2 + e'_3). \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \alpha(\tau_{2e}, \gamma_c) \frac{d\gamma_c}{dt}. \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha(\tau_{2e}, \gamma_c) d\gamma_c. \quad (8)$$

Предположим, что $\alpha=\operatorname{const}$, тогда дифференциальное уравнение можно проинтегрировать. Учитывая, что при $t=0$, $\gamma_c=0$, $\rho=\rho_0$, определим зависимость изменения плотности от γ_c . При разрушении сдвиг $\gamma_c=\gamma_*$ и плотность $\rho=\rho_*$ одновременно достигают предельного критического значения:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\exp(\alpha\gamma_c)}, \quad \rho_* = \frac{\rho_0}{\exp(\alpha\gamma_*)}. \quad (9)$$

При использовании критерия (2) для решения задач с неоднородным распределением напряжений наиболее распространенными являются закон подобия и степенной закон.

Рассмотрим теперь два других потенциала ползучести, связанные с главными касательными напряжениями $T_{12}=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ и $T_{23}=(\sigma_2-\sigma_3)/2$:

$$T_1 = (\alpha \sin + \cos \varphi) \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \alpha \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad T_3 = (\alpha \sin + \cos \varphi) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \alpha \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (10)$$

Привлечение потенциалов ползучести T_1 и T_3 позволяет получить определяющие соотношения ползучести для всех видов напряженного состояния — одноосного и двухосного растяжения, сжатия и кручения. Соответствующие этим потенциалам критерии длительной прочности имеют вид

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cos \varphi} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \operatorname{tg} \varphi = C(t_*) , \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2 \cos \varphi} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \varphi = C(t_*). \quad (11)$$

Для состояния полной ползучести $\tau_2 \geq \tau_3 > \tau_1$ закон течения, неассоциированный с критерием Кулона–Мора, но ассоциированный с поверхностями T_2 и T_3 в главных осях напряжений, запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_1} \gamma'_2 + \frac{\partial T_3}{\partial \sigma_1} \gamma'_3 = \frac{1}{2} [\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] (\gamma'_2 + \gamma'_3), \\ e'_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_2} \gamma'_2 + \frac{\partial T_3}{\partial \sigma_2} \gamma'_3 = \frac{1}{2} [\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] \gamma'_3, \\ e'_3 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_3} \gamma'_2 + \frac{\partial T_3}{\partial \sigma_3} \gamma'_3 = \frac{1}{2} [\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] \gamma'_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для одноосного растяжения $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma > 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_c$, $e_2 = e_3$, где e_i ($i = 1, 2, 3$) — деформации ползучести, $\gamma_c(\tau_e)$ — характеристический сдвиг, зависящий от своего сдвигающего напряжения, если $\tau_e \neq \tau_3$. При $\tau_e = \tau_3$ имеем $\gamma_c = \gamma_c(\tau_e)$. В результате, учитывая (12), получим:

$$e'_1 = [\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] \gamma'_c, \quad e'_2 = e'_3 = \frac{\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi}{2\gamma'_c}. \quad (13)$$

При определении угла внутреннего трения по результатам опытов на растяжение (или сжатие) и кручение образцы предварительно нагружаются разными по значению силами и для каждого условного напряжения (сила делится на первоначальную площадь поперечного сечения образца) определяются времена разрушения. Путем статистической обработки результатов этих опытов в логарифмических координатах определяются параметры критерия длительной прочности (2). Если в опытах на одноосное растяжение в условиях ползучести измерялись деформации e'_1 и e'_2 то из (13) найдем

$$\alpha = \frac{\cos \varphi \left(1 + \frac{2e'_2}{e'_1} \right)}{1 - \sin \varphi - 4(1 + \sin \varphi) \frac{e'_2}{e'_1}}, \quad \gamma'_c = \frac{e'_1}{\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi}. \quad (14)$$

Если при одноосном растяжении в условиях ползучести материал является несжимаемым, то $e'_1 + e'_2 + e'_3 = e'_1 + 2e'_2 = 0$, поэтому $e'_2 / e'_1 = -1/2$. Подставляя это значение для коэффициента поперечной деформации в (14), получим $\alpha = 0$. На рис. 4а приведены кривые ползучести $e_1 = e_1(t, \sigma_1)$ при одноосном растяжении для различных уровней напряжений σ_1 , на рис. 4б — для характеристической функции сдвига $\gamma_c(t, \tau_{2e})$. Предполагается, что характеристическая функция $\gamma_c(t, \tau_{2e})$ является единой кривой и может определяться из опытов на растяжение, сжатие или кручение.

Рассмотрим состояния полной ползучести $\tau_e \geq \tau_1 > \tau_3$ и закон течения, неассоциированный с критерием Кулона–Мора, но ассоциированный с поверхностями T_2 и T_1 (11) в главных осях напряжений:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_1} \gamma'_2 + \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_1} \gamma'_1 = \frac{1}{2} [\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] \gamma'_2, \\ e'_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_2} \gamma'_2 + \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_2} \gamma'_1 = \frac{1}{2} [\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] \gamma'_1, \\ e'_3 &= \frac{\partial T_2}{\partial \sigma_3} \gamma'_2 + \frac{\partial T_1}{\partial \sigma_3} \gamma'_1 = \frac{1}{2} [\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] (\gamma'_2 + \gamma'_1). \end{aligned} \quad (15)$$

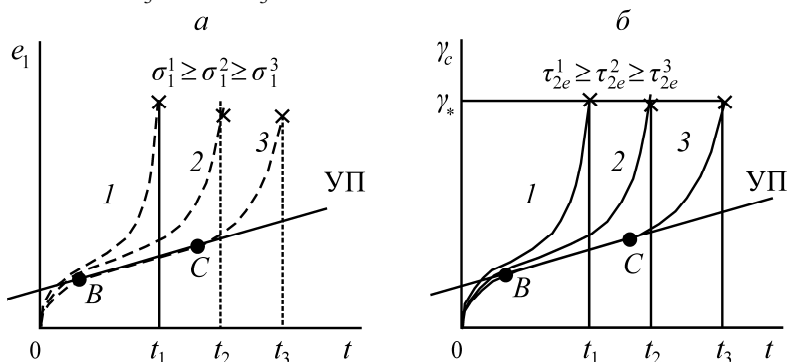


Рис. 4. Кривые ползучести: а — при различных начальных напряжениях; б — для характеристической функции сдвига от времени и эквивалентного сдвигающего напряжения τ_{2e} (УП — установившаяся ползучесть)

Для одноосного сжатия $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 > \sigma_3 = -\sigma$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_c$, $e_1 = e_2$, где e_i ($i = 1, 2, 3$) — деформации ползучести, $\gamma_c(\tau)$ — характеристический сдвиг, зависящий от своего сдвигающего напряжения, если $\tau \neq \tau_c$. При $\tau = \tau_c$ имеем $\gamma_c = \gamma_c(\tau_c)$. В результате, учитывая (15), получим:

$$e'_1 = e'_2 = \frac{\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi}{2\gamma'_c}, \quad e'_3 = [\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] \gamma'_c. \quad (16)$$

Если кривые ползучести определяются из опытов на одноосное сжатие, то аналогичным образом по замеренным деформациям ползучести e_2 и e_3 находятся характеристическая функция сдвига и коэффициент дилатансии γ_c и α . Путем статистической обработки результатов опытов на одноосное сжатие и растяжение в логарифмических координатах вычисляются параметры критерия длительной прочности (2). Для определения скорости сдвига γ'_c и дилатансии α по результатам опытов на одноосное сжатие в условиях ползучести необходимо измерять деформации e'_3 и e'_2 , тогда из (16) находим:

$$\alpha = -\frac{\cos \varphi \left(1 + \frac{2e'_2}{e'_3}\right)}{1 + \sin \varphi - 2(1 - \sin \varphi) \frac{e'_2}{e'_3}}, \quad \gamma'_c = \frac{e'_3}{\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi}. \quad (17)$$

Если при одноосном сжатии в условиях ползучести материал является несжимаемым, то $e'_1 + e'_2 + e'_3 = 2e'_2 + e'_3 = 0$, поэтому $e'_2 / e'_3 = -1/2$. Подставляя это значение для коэффициента поперечной деформации в (17), получим $\alpha = 0$. Аналогичным образом, как и для одноосного растяжения, можно построить кривые ползучести при одноосном сжатии $e_3 = e_3(t, \sigma_3)$ и $\gamma_c(t, \tau_c)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ РАЗРУШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Путем статистической обработки результатов опытов на одноосное сжатие и растяжение в логарифмических координатах определяются параметры критерия длительной прочности (2): показатель ползучести, коэффициент ползучести и угол внутреннего трения φ . Далее при обработке кривых ползучести находится коэффициент дилатансии $\alpha = \tan(\psi)$, где ψ — угол дилатансии. Направления разрушения в условиях ползучести будем связывать с гиперболичностью системы уравнений для поля скоростей. Рассмотрим уравнения жесткоползучего материала с внутренним трением и дилатансией для одноосного растяжения и сжатия. Записывая (13) и (16) в произвольной системе координат x, y, z , а затем исключая из (13) $\gamma'_2 = \gamma'_3 = \gamma'_c$, из (16) $\gamma'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_c$, получим дифференциальные уравнения для компонент вектора скорости v_x и v_z :

$$(a \cos 2\theta - b) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (a \cos 2\theta + b) \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

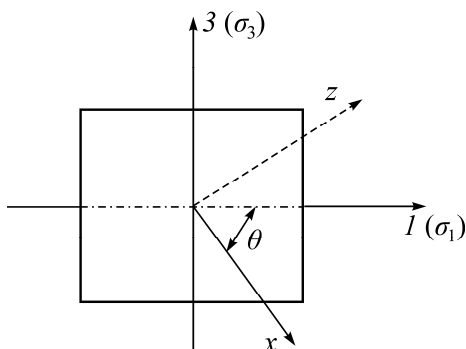
где θ — угол, который составляет первое главное направление с осью x (рис. 5); a, b — параметры ползучести, которые для состояний одноосного растяжения и сжатия имеют вид:

$$a = 3 \pm \alpha \frac{1 \pm 3 \sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad b = \pm 1 + \alpha \frac{3 \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad (19)$$

верхний знак в (19) отвечает одноосному растяжению, нижний — одноосному сжатию.

Для определения направлений разрушения при однородном напряженном состоянии, при известных направлениях главных осей напряжений, нет необходимости выводить систему дифференциальных уравнений. Достаточно предположить, что ось x совпадает с характеристикой и тогда из (18) и условия $e'_x = \partial v_x / \partial x = 0$ следует, что

$$\cos 2\theta = -\frac{b}{a}. \quad (20)$$

Рис. 5. Произвольные (x, z) и главные $(I, 3)$ оси напряжений

При одноосном растяжении образца в направлении σ_1 (рис. 5), когда $\sigma_1 = \sigma > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, для несжимаемого в условиях ползучести материала $\alpha=0$ и из (20) имеем $\cos 2\theta = -1/3$, $\theta = 54.7^\circ$. Этот результат согласуется с известными результатами экспериментов при статическом и усталостном разрушении металлических материалов [14, 20, 22]. Рассмотрим состояние одноосного сжатия в направлении σ_3 : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 > \sigma_3 = -\sigma$. В этом случае направление разрушения совпадает с характеристикой системы уравнений ползучести и определяется из (20). При $\alpha=0$ имеем $\cos 2\theta = 1/3$, $\theta = 35.3^\circ$. Так как направление сжатия совпадает с направлением $3 (\sigma_3)$, то по формулам (19) и (20) для материалов, у которых $\psi=0$, направления сжатия и растяжения должны составлять одинаковые углы с направлением разрушения. При этом угол внутреннего трения ϕ может быть отличным от нуля, т. е. материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕЙСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Простая форма теории течения, в которой скорость ползучести пропорциональна степенной зависимости действующего напряжения, рассматривалась в работах Бейли в 1929 г. Наиболее общая формулировка, когда коэффициент пропорциональности является функцией времени предложена Дейвенпортом в 1938 г. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах Л. М. Качанова [1]. Степенной закон ползучести и гипотеза подобия имеют вид:

$$\gamma_c = \Omega(t) \tau_e^n, \quad \gamma'_c = B \tau_e^n = \frac{d\Omega}{dt} \tau_e^n, \quad (21)$$

где n, B — показатель и коэффициент ползучести.

Для металлов $n=1-12$ [1], для горных пород $n=1-9$, для соляных пород $n=1-5$, конкретные значения n для различных горных пород приводятся в [8]. Степенной закон применительно к горным породам в зарубежной литературе называют законом Глена. В [8] сообщалось о многочисленных экспериментах по определению постоянных в (7). Обнаружено, что значения n , которые представляют наибольший интерес, для дунита составляют $\sim 2-3$, для сухого кварцита — 6.5, для мрамора — 8.3, для доломита — 9.1. Аналогичные эмпирические зависимости логарифма истинной деформации от логарифма истинного напряжения характерны для некоторых пластичных металлов при кратковременном нагружении. В этом случае n — показатель деформационного упрочнения, B — коэффициент прочности.

Процесс ползучести можно разделить на три стадии (см. рис. 4). В первой стадии $0B$ скорость деформации ползучести убывает. Во второй стадии BC ползучесть протекает с минимальной постоянной во времени скоростью. В третьей стадии скорость деформации возрастает, пока не наступает разрушение образца. На втором участке при установившейся ползучести $B = \text{const}$ в логарифмических координатах из (21) имеем

$$\ln \gamma'_c = n \ln \tau_e + \ln B. \quad (22)$$

Если в (22) ось абсцисс связывать с напряжением, а ось ординат со скоростью ползучести, то в значительном интервале напряжений экспериментальные точки в логарифмических координатах группируются около некоторой прямой линии. Тангенс угла наклона этой прямой к оси напряжений будет совпадать с показателем ползучести n , а при известных скорости и напряжении коэффициент ползучести B находится из (22).

При определении времени разрушения, когда развиты деформации ползучести, можно пренебречь деформацией, накапливаемой в первом периоде, тогда $\gamma = Bt \tau_e^n$. Для грунтов деформационный критерий длительной прочности предложен С. С. Вяловым и М. Н. Гольдштейном, согласно которому разрушение породы наступает, если накопление деформации ползучести достигает предельной величины $\gamma(t) = \gamma_*$ [4, 9]. Учитывая (2) и (3), можно найти величину D в критерии длительной прочности при известной предельной деформации ползучести γ_* . Рассмотрим степенной закон и гипотезу подобия в общем виде для установившейся и неустановившейся ползучести:

$$D = \frac{\gamma_*}{B}, \quad D = \frac{t_* \gamma_*}{\Omega(t_*)}. \quad (23)$$

Поскольку в логарифмических координатах зависимость предела длительной прочности от времени разрушения является линейной, то зависимость времени разрушения от предела длительной прочности принимается степенной (3), а параметр прочности $D = \text{const}$ может зависеть от деформационных или энергетических параметров поврежденности. Это предельное значение необратимого характеристического сдвига γ_* [22] или предельной удельной работы рассеяния A_* [7, 10]. В (23) получены значения параметра D для установившейся ползучести $B = \text{const}$ и произвольной зависимости функции $\Omega = \Omega(t_*)$. Графики функций $\Omega(t)$ и $B(t)$ показаны на рис. 6. В (23) приводится метод определения времени разрушения природных склонов и бортов карьеров для установившейся ползучести с применением деформационного критерия, когда характеристический сдвиг γ достигает предельной величины γ_* .

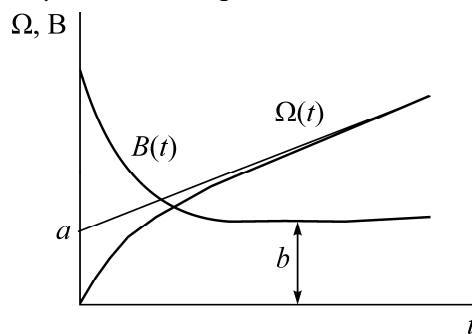


Рис. 6. Графики функций $\Omega(t)$ и $B(t)$

Далее рассмотрим энергетический вариант теории ползучести, в котором удельная работа диссипации $A(t)$ при разрушении достигает предельной величины A_* . В теории пластичности такой критерий был предложен Тейлором и Куинни (1931 г.), Шмидтом (1932 г.) Большой объем экспериментальных и теоретических исследований по ползучести и длительной прочности различных металлов и сплавов при сложном напряженном состоянии проведен в Институте гидродинамики СО АН СССР О. В. Сосниным и сотрудниками. Они сформулировали вариант соотношений Работнова для случая, когда в качестве параметра состояния принимается рассе-

янная энергия [7]. Авторы этого варианта исходят из того, что вся работа напряжений на деформациях ползучести затрачивается на разрушение материала и явным образом учитывают ее. Ползучесть и разрушение исследованы как два сопутствующих и влияющих друг на друга процесса. За меру интенсивности процесса ползучести принята удельная мощность рассеяния $W = s_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}$, а за меру поврежденности материала — удельная работа рассеяния:

$$A = \int_0^t W dt = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} dt. \quad (24)$$

В [7] приведены результаты большой серии экспериментов, в которых изучены изотропные и первоначально анизотропные материалы. В качестве основной характеристики процесса ползучести, развивающегося вплоть до разрушения материала, рассматривается удельная работа диссипации $A(t)$; за время разрушения t_* принимается время, при котором $A(t)$ достигает значения A_* , являющегося характеристикой материала. Проверка этого предположения проводилась для простого напряженного состояния (растяжения, сжатия или кручения) на различных материалах. Получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов. Так как кривые ползучести для простых напряженных состояний получаются при постоянных значениях номинальных напряжений, то, учитывая (24), степенной закон ползучести, гипотезу подобия и критерий длительной прочности (2), для одноосного напряженного состояния запишем:

$$D = \left(\frac{A_*}{B} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{t_*^{n+1}}, \quad D = \left(\frac{A_*}{\Omega(t_*)} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{t_*}. \quad (25)$$

В [22] даны решения прикладных задач по разрушению горных пород в условиях установившейся ползучести, определены времена разрушения и напряжения в предельных зонах на основе критерия длительной прочности Кулона–Мора. Время разрушения определяется из критерия, что характеристический сдвиг γ достигает при разрушении величины γ_* . В качестве примера обратимся к потере устойчивости борта карьера в условиях ползучести под действием постоянной равномерно распределенной нагрузки $q = P/AB$ (рис. 7).

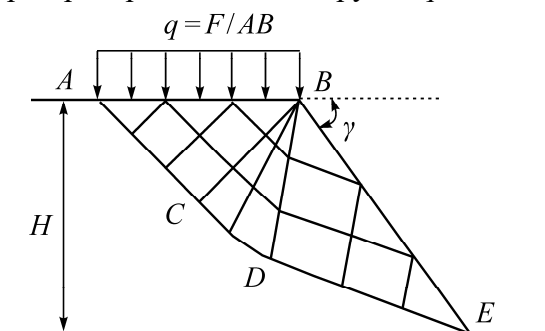


Рис. 7 Потеря устойчивости борта карьера при действии постоянной распределенной нагрузки в условиях ползучести

Выберем систему координат: ось x имеет горизонтальное направление, z — вертикальное, y — перпендикулярна плоскости (x, z) . Будем считать, что для главных осей напряжений 1, 2 и 3 выполняется неравенство $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Следовательно, главные оси 1 и 3 находятся в плоскости (x, z) , а ось y совпадает с направлением действия σ_2 . В таком случае в направлении y реализуется плоская деформация и состояние неполной ползучести, для которого имеем критерий длительной прочности (2) и два уравнения равновесия. Для данного предельного состояния в условиях ползучести задача является статически определимой, а система дифференциальных уравнений имеет гипербо-

лический тип [19, 20, 22]. В пластической постановке в (2) $C(t_*) = k$, где k — пластическая постоянная, и задача интерпретируется следующим образом: нагрузка q на AB увеличивается и как только достигает предельного значения q_* , образуются предельные зоны $ACDEB$, которые сдвигаются по линии $ACDE$. В аналогичной задаче ползучести считается, что на AB приложена длительно действующая постоянная нагрузка $q < q_*$ и в некоторый момент $t = t_*$ возникает предельное состояние, приводящее к разрушению и потере устойчивости борта карьера. В задаче ползучести необходимо определить время t_* . Применяя критерий (2) и метод характеристик, получим [20, 22]:

$$q = C(t_*) Q, \quad (26)$$

где $Q = \operatorname{ctg} \varphi (\operatorname{ctg}^2 (\pi / 4 - \varphi / 2)) (e^{(\pi - 2\gamma) \operatorname{tg} \varphi} - 1)$.

Используя (2), (23) и (25) для установившейся и неуставившейся ползучести, находим время до разрушения по деформационному критерию:

$$t_* = \frac{\gamma_*}{B} \left(\frac{Q}{q} \right)^n, \quad \Omega(t_*) = \gamma_* \left(\frac{Q}{q} \right)^n.$$

Далее определяем время разрушения борта карьера по энергетическому критерию разрушения и критерию длительной прочности (2) с учетом (25) для процессов установившейся и неуставившейся ползучести:

$$t_* = \frac{A_*}{B} \left(\frac{Q}{q} \right)^{n+1}, \quad \Omega(t_*) = A_* \left(\frac{Q}{q} \right)^{n+1}.$$

ВЫВОДЫ

Определяющие соотношения в теории ползучести могут быть построены как на основе неассоциированного закона течения, так и с применением дилатансионно-сдвиговой модели деформирования, основанной на критерии Треска–Кулона. Учет дилатансии в выбранном потенциале ползучести и ассоциированный с ним закон течения приводят к одним и тем же определяющим соотношениям.

Для необратимых деформаций горных пород применим закон течения, ассоциированный с поверхностью предложенного потенциала ползучести, но он не применим при построении определяющих соотношений, основанных на поверхности Кулона–Мора, так как направления трещинообразования и разрушения горных пород не подтверждаются наблюдениями в лабораторных и натурных условиях.

Испытания на растяжение и сжатие образцов позволили определить параметры ползучести: угол внутреннего трения, характеристическую функцию необратимого сдвига и угол дилатансии. Угол внутреннего трения получен по результатам опытов, в которых образцы предварительно нагружались разными по значению силами, и для каждого напряжения рассчитывались времена разрушения. Путем статистической обработки результатов этих опытов в логарифмических координатах определены параметры критерия длительной прочности Кулона–Мора. Характеристический сдвиг и угол дилатансии получены по кривым ползучести.

Предложены соотношения для определения направлений разрушения в случаях однородных и неоднородных напряженных состояний при известных направлениях главных осей напряжений, углах внутреннего трения и дилатансии в момент разрушения, а также для времени разрушения при установившейся и неуставившейся ползучести, основанной на условии длительной прочности Кулона–Мора с применением деформационного и энергетического критериев разрушения горных пород.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. — М.: Физматлит, 1960. — 455 с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
3. Ержанов Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. — Алма-Ата: Наука, 1964. — 175 с.
4. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. — М.: Наука, 1978. — 432 с.
5. Цытович Н. А. Механика грунтов. — М.: Высш. шк., 1979. — 272 с.
6. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. — М.: Недра, 1984. — 232 с.
7. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. — Новосибирск: Институт гидродинамики АН СССР, 1986. — 96 с.
8. Шейдеггер А. Основы геодинамики. — М.: Недра, 1987. — 384 с.
9. Булычев Н. С. Механика подземных сооружений. В примерах и задачах. — М.: Недра, 1989. — 270 с.
10. Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. — М.: МГИУ, 2007. — 264 с.
11. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Теория ползучести строительных материалов и ее приложения. — М.: Госстройиздат, 1960. — 255 с.
12. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001. — 343 с.
13. Mogi K. Experimental rock mechanics, Geomech. Res. Series 3, London, 2007. — 361 p.
14. Терентьев В. Ф. Усталость металлических материалов. — М.: Наука, 2002. — 248 с.
15. Hoff N. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads, J. Appl. Mech., 1953, Vol. 20, No. 1.
16. Сдобырев В. П. Длительная прочность сплава ЭИ437Б при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 4. — С. 92–97.
17. Зарецкий Ю. К., Городецкий С. Э. Дилатансия мерзлого грунта и построение деформационной теории ползучести // Гидротехническое строительство. — 1975. — № 2. — С. 15–18.
18. Коврижных А. М. Вариант теории пластической деформации горных пород // ФТПРПИ. — 1983. — № 1. — С. 3–8.
19. Коврижных А. М. Длительная прочность металлов и предельное состояние в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. — 2009. — № 2. — С. 121–129.
20. Коврижных А. М. О единой сдвиговой модели в теориях пластичности, ползучести и разрушения горных пород // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2021. — Т. 8. — № 2. — С. 82–90.
21. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3. — С. 130–133.
22. Коврижных А. М., Барышников В. Д., Хмелинин А. П. Определение времени разрушения горных пород по деформационному критерию длительной прочности // ФТПРПИ. — 2023. — № 6. — С. 42–51.

Поступила в редакцию 21/I 2025

После доработки 14/V 2025

Принята к публикации 16/V 2025