

суммарным вкладом мод с  $j = \overline{2,6}$ , при  $F = 0,0175$  в случае 1 — третьей модой, а в случае 2 — вкладом мод с  $j = \overline{3,10}$ . На рис. 4 представлена только область значений  $0,013 \leq F \leq 0,3$ , где существует еще не более 3 мод в случае 1 и не более 18 мод в случае 2.

Таким образом, в работе показано, что аномальные дисперсионные зависимости могут приводить к “чехарде” мод внутренних волн, когда возбуждение высших мод происходит более интенсивно, чем низших.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоздат, 1981.
2. Завольский Н.А. Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 1.
3. Стурова И.В. Рассеяние поверхностных и внутренних волн на погруженном теле // Вычислительные технологии. — Новосибирск, 1993. — Т. 2, № 4.
4. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 21.
5. Стурова И.В. Влияние регулярного волнения на погруженное тело, движущееся в стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. — Новосибирск, 1992. — Т. 1, № 3.
6. Городцов В.А., Теодорович Э.В. К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны) // Н.Е. Кочин и развитие механики. — М.: Наука, 1984.

г. Новосибирск

Поступила 9/VII 1993 г.

УДК 533.69

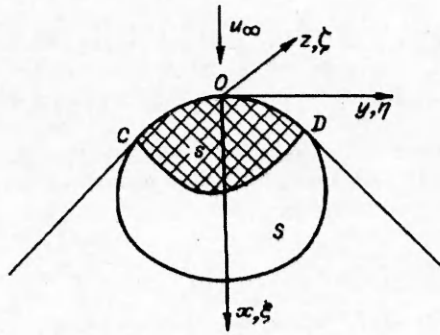
Н.Ф. Воробьев

#### ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Задачи обтекания невязким сверхзвуковым потоком тонкого слабоизогнутого крыла конечного размаха в линейной постановке сводятся к решению волнового уравнения для потенциала скорости с данными на базовой плоскости временно-ориентированного типа и на головной характеристической поверхности. Представление решения волнового уравнения в форме Вольтера позволяет в этом случае задания исходных данных выбрать в качестве определяющего параметра на базовой плоскости либо выводящую производную — геометрию крыла (прямая задача аэродинамики), либо функцию-нагрузку на крыле (обратная задача аэродинамики). Вместе с тем формула Вольтера устанавливает связь между решениями этих задач — устраняет неоднозначность решения обратной задачи [1].

Потенциал скорости в прямой и обратной задачах записывается в виде двойных интегралов, подынтегральные выражения (ядра интегральных операторов) которых содержат особенности. При нахождении газодинамических параметров потока (производных потенциала скорости) степень подынтегральных особенностей возрастает, при этом иногда бывает невозможно проведение в рамках ограниченных функций формальных операций дифференцирования, а иногда дифференцирование приводит к появлению таких особенностей, при которых интегралы становятся расходящимися. Часто используется прием признания существования интегралов в смысле Адамара [2]. Введение такой символики вносит не только осложнение в реализацию

© Н.Ф. Воробьев, 1994



алгоритмов решения, но и требует иногда оправдания физически абсурдных результатов. Для задач теории крыла это означает признание разрывности газодинамических параметров при переходе из возмущенной области на поверхность крыла. Однако при строгом учете характера особенностей ядер интегральных операторов, а также при некоторых условиях гладкости, накладываемых на определяющие параметры задачи, возможно представление газодинамических параметров потока в

классе ограниченных функций и на самой поверхности крыла. В работе это принципиальное положение проиллюстрировано на решениях прямой и обратной задач аэродинамики крыла с полностью сверхзвуковыми передними кромками. Задачи обтекания крыльев конечного размаха с частично дозвуковыми передними кромками в общем формулируются сразу в терминах прямой и обратной задач аэродинамики, и проблемы операций с несобственными интегралами остаются. Кроме того, возникает необходимость решения сингулярных интегральных уравнений. Известны точные решения задач обтекания крыльев конечного размаха с дозвуковыми кромками, сводящихся к интегральному уравнению с ядром Абеля [1, 3, 4], в том числе решение в классе ограниченных функций [5].

1. При обтекании сверхзвуковым потоком ( $M > 1$ ) тел пространственной конфигурации, слабовозмущающих набегающий поток, уравнения газовой динамики могут быть сведены к волновому уравнению для потенциала скорости [1]

$$(1.1) \quad \Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} = 0,$$

где направление оси  $x$ , связанной с телом прямоугольной декартовой системы координат, совпадает с направлением набегающего потока на бесконечности (см. рисунок).

Рассматриваются задачи обтекания тонкого слабоизогнутого крыла, средняя поверхность которого мало отклоняется от некоторой плоскости, параллельной скорости набегающего потока. Эту плоскость назовем базовой и будем сносить граничные условия с поверхности крыла на базовую плоскость  $S(\eta = 0)$ . Возмущенная крылом область находится внутри поверхности  $\Gamma_0$ , которая является огибающей характеристических конусов с вершинами на сверхзвуковой части передней кромки крыла. Поверхность, ограничивающая область зависимости точки  $M(x, y, z)$  над крылом, состоит из части поверхности характеристического конуса  $\Gamma$  с вершиной в точке  $M$  до ее пересечения с головной характеристической поверхностью  $\Gamma_0$  и базовой плоскостью  $S$  и частей  $\Gamma_0$  и  $S$ , вырезаемых конусом  $\Gamma$ .

Используя формулу Остроградского—Гаусса, можно получить представление решения волнового уравнения (1.1) в форме Вольтерра [1, 6]. При этом если в качестве известного решения волнового уравнения выбрать функцию Вольтерра

$$(1.2) \quad w = \int \varphi d\xi = \ln\{[(x - \xi) - r] / \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}\},$$

$$\varphi = 1/r, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 - [(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]},$$

то в формуле Остроградского—Гаусса интеграл по поверхности  $\Gamma$  обратится в нуль. А если предположить, что на головной характеристической поверхности  $\Phi|_{\Gamma_0} = 0$ , то формула Вольтерра принимает вид

$$(1.3) \quad \Phi(M) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S (w\Phi'_n - \Phi w'_n) ds.$$

Здесь  $s$  — область зависимости точки  $M$  на базовой плоскости  $S(\eta = 0)$ ;

$$(1.4) \quad w'_N \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi \Big|_{\eta=0} = - \frac{\gamma(x - \zeta)}{r[(z - \zeta)^2 + y^2]}$$

— конормальная производная функции Вольтерра; причем с точностью до малых второго порядка в формуле (1.3) конормальная производная  $\Phi'_N \Big|_S$  заменена нормальной производной  $\Phi'_n \Big|_S$ .

Формула (1.3) представляет потенциал возмущений через значения потенциала  $\Phi \Big|_S$  и нормальной производной  $\Phi'_n \Big|_S$  на базовой плоскости  $S(\eta = 0)$  временно-ориентированного типа. На временно-ориентированной поверхности существует зависимость между потенциалом  $\Phi$  и его нормальной производной  $\Phi'_n$ , определяемая в общем случае цилиндрической базовой поверхности интегродифференциальным соотношением, которое получается из формулы Вольтерра при предельном переходе точки  $M$  на базовую поверхность. В рассматриваемом случае обтекания тонкого крыла, когда базовой поверхностью является плоскость  $\eta = 0$ , согласно (1.2), (1.4), имеют место равенства

$$(1.5) \quad w(x, y, z) \Big|_{\eta=0} = w(x, -y, z) \Big|_{\eta=0}, \quad w'_N(x, y, z) \Big|_{\eta=0} = - w'_N(x, -y, z) \Big|_{\eta=0}.$$

С учетом (1.5) методом компенсирующих особенностей [1] в формуле (1.3) можно исключить либо член, зависящий от значения потенциала в плоскости  $\eta = 0$ , и представить потенциал в точке  $M(x, y, z)$  в терминах нормальной производной потенциала скорости:

$$(1.6) \quad \Phi_1(M) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \Phi'_\eta \int \varphi d\xi ds,$$

либо член, зависящий от нормальной производной потенциала в плоскости  $\eta = 0$ , и представить потенциал в точке  $M(x, y, z)$  в терминах потенциала скорости:

$$(1.7) \quad \Phi_2(M) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \Phi \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi ds.$$

Решения задач обтекания крыла (1.6), (1.7) даны в форме интегродифференциальных операторов. Для осуществления операции дифференцирования по  $x$  над интегральными операторами с переменными пределами необходимо учитывать особенности ядер. Так, в формуле (1.7) из-за особенности на линии  $r = 0$  непосредственное дифференцирование невозможно, и с целью снижения степени особенности следует провести предварительное интегрирование по переменной  $\xi$ , это требует наложения дополнительного условия на гладкость определяющего параметра  $\Phi$  — существования производной  $\Phi'_\xi$ . После проведения дифференцирования по  $x$  с учетом особенностей ядер и обращения потенциала скорости на границе с невозмущенной областью в нуль формулы (1.6), (1.7) преобразуются к виду [1]

$$(1.8) \quad \Phi_1 = - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi'_\eta \varphi ds = - \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{\Phi'_\eta(\xi, \zeta)}{r} ds;$$

$$(1.9) \quad \Phi_2 = \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi'_\xi \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi ds = \frac{y}{\pi} \iint_S \frac{\Phi'_\xi(\xi, \zeta) (x - \xi)}{r[(z - \zeta)^2 + y^2]} ds.$$

Потенциал  $\Phi_1$  определяет поле течения в возмущенной области через значение производной  $\Phi'_\eta$  в базовой плоскости и представляет собой решение прямой задачи. Потенциал  $\Phi_2$  определяет поле течения через значение производной  $\Phi'_\xi$  в базовой плоскости. Линеаризованное уравнение Бернулли дает следующее соотношение между производной  $\Phi'_\xi$  и перепадом давления на базовой плоскости:

$$\Phi'_\xi|_{\eta=0} = \Delta p, \quad \Delta p = [p|_{\eta=-0} - p|_{\eta=+0}] / 2\rho_\infty u_\infty.$$

Здесь  $u_\infty, \rho_\infty$  — скорость и плотность невозмущенного потока. Формула (1.9) представляет решение обратной задачи — определение геометрии по заданной нагрузке. Согласно (1.3), (1.6), (1.7),  $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ . А так как возмущение создается одним и тем же объектом — крылом, то потенциалы  $\Phi_1, \Phi_2$  описывают одно поле в разных терминах:  $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ . Потенциалу  $\Phi_2$  обратной задачи отвечает потенциал  $\Phi_1$  прямой задачи, т.е. конфигурация крыла, определяющая поток  $\Phi_1$ .

В общем же решение обратной задачи неоднозначно. Например, пусть на базовой плоскости  $\eta = 0$ , на которую сносятся условия с поверхности крыла, расположены особенности  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi$  (ядро уже известного потенциала  $\Phi_2$ ) и  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\eta$  (ядро потенциала  $\Phi_3$ ) с интенсивностями  $c_2(\xi, \zeta), c_3(\xi, \zeta)$  соответственно. Потенциалы возмущений, создаваемых этими особенностями, определяются формулами

$$(1.10) \quad \Phi_2 = y \iint_s c_2(\xi, \zeta) \frac{(x - \xi)}{r[(z - \zeta)^2 + y^2]} ds;$$

$$(1.11) \quad \Phi_3 = y \iint_s c_3(\xi, \zeta) \frac{(x - \xi)}{r[(x - \xi)^2 - y^2]} ds,$$

где для упрощения выкладок без нарушения общности пределы интегрирования области зависимости  $s \in \eta = 0$  точки  $M(x, y, z)$  ограничены линией  $\xi = 0$ :

$$0 \leq \xi \leq x - y, \quad z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2} \leq \zeta \leq z + \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}.$$

На плоскости  $\eta = 0$  вводится новая система координат [3]  $\xi = \xi, \zeta = z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2} \cos \theta$ , и формулы (1.10), (1.11) переписутся в виде

$$(1.12) \quad \Phi_2 = y \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{c_2(\xi, z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2} \cos \theta) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta} d\theta d\xi;$$

$$(1.13) \quad \Phi_3 = y \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{c_3(\xi, z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2} \cos \theta) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta} d\theta d\xi.$$

Если потенциалы (1.12), (1.13) продифференцировать по  $x$ , а затем перейти к пределу при  $y \rightarrow 0$ , то из предельного выражения устанавливается гидродинамический смысл особенностей:  $c_2(\xi, \zeta) = c_3(\xi, \zeta) = \frac{1}{y} \Phi'_\xi|_{\eta=0}$ . Потенциал  $\Phi_3$ , так же как и потенциал  $\Phi_2$ , определяется в терминах нагрузки  $\Phi'_\xi|_{\eta=0}$ , но при одинаково заданной нагрузке на крыле параметры потока, вычисляемые по потенциалам  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , будут различны, в том числе геометрия крыла.

Исходя из соответствия потенциалов прямой и обратной задач ( $\Phi_1 = \Phi_2$ ), можно установить связи между производными  $\Phi'_\eta, \Phi'_\xi$  на базовой плоскости  $\eta = 0$ .

2. Для нахождения по формулам для потенциалов  $\Phi_1, \Phi_2$  газодинамических параметров потока (скорости, давления) необходимо проводить операции дифференцирования по переменным  $x, y, z$  интегральных операторов, ядра которых содержат особенности на некоторых многообразиях, не позволяющие выполнять непосредственное дифференцирование. Для устранения этих особенностей ядер применяется [1, 3] прием предварительного интегрирования по частям по одной из переменных в операторах двойных интегралов, что требует наложения дополнительных условий на гладкость

определяющих параметров на поверхности крыла. Иногда [2] при проведении некорректных в рамках ограниченных функций операций дифференцирования пользуются приемом введения понятия конечной части расходящегося интеграла, что дает возможность формально проводить необходимые операции, но физическая сущность результатов бывает абсурдна. Зачастую само появление расходящегося интеграла — результат либо ошибочной оценки некоторых членов при предельных переходах, либо пренебрежения правилом перехода в особых интегралах, зависящих от параметра. В самом деле, формулы для потенциалов  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и получаемые после операций дифференцирования над функционалами  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  выражения для газодинамических параметров потока представлены через определяющие параметры на поверхности крыла в возмущенном пространстве около крыла, вне самой поверхности крыла. При предельном переходе на поверхность крыла ( $y \rightarrow 0$ ) следует помнить, что не всегда для интегралов, зависящих от параметра, выполнимо правило

$$(2.0) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x, \varepsilon) dx = \int f(x, 0) dx.$$

Бесконтрольное применение этого правила для интегралов, ядра которых содержат особенности, приводит к появлению расходящихся интегралов. Соблюдение правил дифференцирования интегралов с переменными пределами и требование необходимой гладкости определяющих параметров на поверхности крыла позволяют получать значения газодинамических параметров потока в классе ограниченных функций и на самой поверхности крыла ( $y = 0$ ).

Вначале покажем неправомочность широко используемой (см., например, [2]) формулы

$$(2.1) \quad \Phi'_y|_{y=0} = -\Phi'_x|_{y=0} + \frac{1}{\pi} \iint_s \frac{\Phi'_\xi(\xi, \zeta) (x - \xi)}{(z - \zeta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 - (z - \zeta)^2}} d\zeta d\xi,$$

устанавливающей связь между  $\Phi'_y$  и  $\Phi'_x$  на базовой плоскости  $y = 0$ , исходя из решения обратной задачи  $\Phi_2$  (см. (1.9)). Интеграл, стоящий в правой части (2.1), расходится, но его предлагается рассматривать в смысле Адамара. Появление в формуле (2.1) расходящегося интеграла является результатом отхода от правил дифференцирования особых интегралов с переменными пределами, что повлекло за собой неверную оценку отбрасываемых членов при предельном переходе  $y \rightarrow 0$ .

Потенциал  $\Phi_2$  (1.12) запишем в виде

$$(2.2) \quad \Phi_2 = \frac{y}{\pi} \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{\Phi'_\xi(\xi, z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2 \cos^2 \theta}) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta} d\theta d\xi.$$

Как говорилось выше, без нарушения общности суждений о характере особенностей интегралов за границу возмущенной области примем линию  $\xi = 0$ .

Запись потенциала  $\Phi_2$  в форме (2.2) допускает операцию дифференцирования по  $y$  (как и по  $x$ ) непосредственно. Проведем последовательно дифференцирование по верхнему пределу, зависящему от  $y$ , по множителю  $y$ , стоящему перед интегралом, подынтегральной функции (сначала ядра, затем множителя  $\Phi'_\xi(\xi, z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2 \cos^2 \theta})$ ):

$$(2.3) \quad \Phi'_{2y} = -\frac{y^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi'_\xi(x - y, z) d\theta}{y^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{\Phi'_\xi(\xi, z - \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2 \cos^2 \theta}) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta} d\theta d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2y^2}{\pi} \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{\Phi'_\xi(\xi, z - \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} \cos\theta) (x-\xi) \sin^2\theta}{[(x-\xi)^2 \cos^2\theta + y^2 \sin^2\theta]^2} d\theta d\xi + \\
& + \frac{y^2}{\pi} \int_0^{x-y} \int_0^\pi \frac{\Phi''_{\xi\xi}(\xi, z - \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} \cos\theta) (x-\xi) \cos\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} [(x-\xi)^2 \cos^2\theta + y^2 \sin^2\theta]} d\theta d\xi.
\end{aligned}$$

Переходя в (2.3) от переменных интегрирования  $\xi, \theta$  к переменным  $\xi, \zeta$ , имеем

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad \Phi'_y(x, y, z) &= -\Phi'_\xi(x-y, z) + \frac{1}{\pi} \iint_s \frac{\Phi'_\xi(\xi, \zeta) (z-\xi)}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]} d\zeta d\xi - \\
& - \frac{2y^2}{\pi} \iint_s \frac{\Phi'_\xi(\xi, \zeta) (x-\xi)r}{[(z-\zeta)^2 + y^2][(x-\xi)^2 - y^2]} d\zeta d\xi + \\
& + \frac{y^2}{\pi} \iint_s \frac{\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \zeta) (x-\xi) (z-\zeta)}{r[(z-\zeta)^2 + y^2] [(x-\xi)^2 - y^2]} d\zeta d\xi,
\end{aligned}$$

где пределы области зависимости  $s$  следующие:

$$0 \leq \xi \leq x-y, \quad z - \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} \leq \zeta \leq z + \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}.$$

Если в (2.4) сразу положить  $y=0$ , то получим формулу (2.1) (в [2] она выведена другим способом). Однако отбрасываемые в (2.4) интегральные операторы с множителем  $y^2$  имеют особенности такого высокого порядка, что не только не обращаются в нуль при  $y \rightarrow 0$ , но и сопоставимы с расходящимся интегралом в (2.1).

Для упрощения получения оценок вначале предположим  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = f_0(\xi)$  и проведем интегрирование в (2.4). Учитывая существенность этого момента, процесс интегрирования изложим более детально.

Первый интегральный оператор

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad J_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{x-y} f_0(\xi) (x-\xi) J_1^* d\xi, \quad J_1^* = \int_{z-\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}^{z+\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \frac{d\zeta}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]} = \frac{\pi}{y(x-\xi)}, \\
J_1 &= \frac{1}{y} \int_0^{x-y} f_0(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Второй интегральный оператор

$$\begin{aligned}
(2.6) \quad J_2 &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_0^{x-y} \frac{f_0(\xi)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 - y^2]} J_2^* d\xi, \quad J_2^* = \\
& = \int_{z-\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}^{z+\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \frac{rd\zeta}{[(z-\zeta)^2 + y^2]^2} = \frac{[(x-\xi)^2 - y^2]}{2y^2} J_1^*, \\
J_2 &= -\frac{1}{y} \int_0^{x-y} f_0(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Третий интегральный оператор  $J_3$ , в силу того что рассматривается случай постоянной нагрузки по размаху  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = f_0(\xi)$  и  $\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \zeta) = 0$ , равен нулю.

Первый интегральный оператор  $J_1$ , соответствующий расходящемуся интегралу из (2.1), стремится к бесконечности при  $y \rightarrow 0$ , но он компенсируется оператором  $J_2$ :  $J_1 + J_2 = 0$ .



Таким образом, согласно (2.4), при  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = f_0(\xi)$  и передней границе области зависимости  $\xi = 0$

$$\begin{aligned}\Phi'_y(x, y, z) &= -\Phi'_x(x - y, 0, z), \quad \Phi'_y(x, y) = -\Phi'_x(x - y, 0), \\ \Phi'_y(x, 0) &= -\Phi'_x(x, 0),\end{aligned}$$

что и соответствует плоскопараллельной картине течения.

Согласно формуле (2.1), в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}\Phi'_y(x, 0, z) &= -\Phi'_x(x, 0, z) + \frac{1}{\pi} \int_0^x f_0(\xi) (x - \xi) J_0^* d\xi, \\ J_0^* &= \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{d\zeta}{(z-\zeta)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2}} = 2 \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(x-\xi)^2}.\end{aligned}$$

С точностью до  $\varepsilon^2$ , где  $\varepsilon$  — интервал выделенной особенности ( $z - \varepsilon \leq \zeta \leq z + \varepsilon$ ), имеем  $J_0 = 2/\varepsilon(x - \xi)$ . Тогда

$$\Phi'_y(x, 0, z) = -\Phi'_x(x, 0, z) + \frac{2}{\varepsilon\pi} \int_0^x f_0(\xi) d\xi.$$

Первый член правой части совпадает с первым членом формулы (2.4), а про второй член, стремящийся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , волевым способом говорят: «отбросим его». Так что это не компромисс линейной теории, а результат некорректных операций с несобственными интегралами.

В случае линейного закона изменения нагрузки вдоль размаха крыла ( $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = f_1(\xi)\zeta$ ) соотношение между первым и вторым интегральными операторами из (2.4) остается прежним.

Первый интегральный оператор

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{x-y} f_1(\xi) (x - \xi) J_{11}^* d\xi, \quad J_{11}^* = \int_{z-\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}^{z+\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}} \frac{\zeta d\zeta}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]} = zJ_1^*$$

( $J_1^*$  определено в (2.5)). Тогда

$$J_1 = \frac{z}{y} \int_0^{x-y} f_1(\xi) d\xi.$$

Второй интегральный оператор

$$J_2 = -\frac{2y^2}{\pi} \int_0^{x-y} \frac{f_1(\xi)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 - y^2]} J_{21}^* d\xi, \quad J_{21}^* = \int_{z-\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}^{z+\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}} \frac{\zeta r d\zeta}{[(z-\zeta)^2 + y^2]} = zJ_2^*$$

( $J_2^*$  определено в (2.6)). Тогда

$$J_2 = -\frac{z}{y} \int_0^{x-y} f_1(\xi) d\xi.$$

Третий интегральный оператор при  $\Phi''_{\xi\zeta}(\xi, \zeta) = f_1(\xi)$  имеет вид

$$J_3 = \frac{y^2}{\pi} \int_0^{x-y} \frac{f_1(\xi)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 - y^2]} J_{31}^* d\xi, \quad J_{31}^* = \int_{z-\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}^{z+\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}} \frac{(z-\zeta) d\zeta}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]} = 0,$$

следовательно,  $J_3 = 0$ .

В рассматриваемом случае линейного закона изменения нагрузки по размаху операторы  $J_1, J_2$  также компенсируют друг друга:  $J_1 + J_2 = 0$ . Формула (2.4) дает следующую связь между геометрией и нагрузкой на

крыле:  $\Phi'_y(x, 0, z) = -\Phi'_x(x, 0, z)$ . Локальная взаимосвязь объясняется антисимметрией величины нагрузки относительно плоскости  $\zeta = z$ .

Согласно формуле (2.1), при  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = f_1(\xi)\zeta$  получим

$$\Phi'_y(x, 0, z) = -\Phi'_x(x, 0, z) + \frac{2z}{\pi} \int_0^x f_1(\xi) d\xi.$$

Закон изменения нагрузки можно представить в довольно общем виде

$\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi)\zeta^i$  или в виде, удобном для оценки особенностей интегральных операторов:

$$\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi) [z - (z - \zeta)]^i = \sum_{i=0}^n g_i(\xi) (z - \zeta)^i.$$

Поведение интегральных операторов при  $i = 0, 1$  было рассмотрено выше. При  $i \geq 2$  в числителях интегральных операторов формулы (2.4) появятся еще члены вида  $(z - \zeta)^i$ , снижающие степень особенностей ядер  $[(z - \zeta)^2 + y^2]^{-1}$ ,  $[(z - \zeta)^2 + y^2]^{-2}$  при  $y \rightarrow 0$ , интегральные операторы становятся регулярными.

Таким образом, связь между производными  $\Phi'_y, \Phi'_x$ , вычисляемая на основе потенциала  $\Phi_2$ , представима в классе ограниченных функций как в потоке, так и при предельном переходе на крыле.

Анализ возможности получения регулярного решения обратной задачи был проведен на основе представления потенциала  $\Phi_2$  в виде (2.2) для установления связи с некорректным решением (2.1) из [2]. Но, как уже отмечалось в начале п. 2, рациональным способом нахождения производных потенциалов, выраженных через несобственные интегралы, является путь снижения степени особенности посредством предварительного интегрирования по частям по одной из переменных. Это позволяет проводить затем дифференцирование интегралов с переменными пределами без введения условной символики дифференцирования, ведущей к получению нефизических решений.

В [1] над интегральными операторами потенциалов  $\Phi_1, \Phi_2$  были проведены операции предварительного интегрирования по частям как по переменной  $\zeta$ , так и по  $\xi$ , что дало возможность выполнить операции дифференцирования по  $x$  потенциала  $\Phi_1$  (решение прямой задачи) и по  $y$  потенциала  $\Phi_2$  (решение обратной задачи). Причем при проведении предварительного интегрирования по частям на определяющие параметры  $\Phi'_\eta|_{\eta=0}, \Phi'_\xi|_{\eta=0}$  необходимо накладывать дополнительные условия — существование соответствующих вторых производных  $\Phi''_{\eta\zeta}, \Phi''_{\xi\zeta}, \Phi''_{\eta\xi}, \Phi''_{\xi\xi}$ .

Производные  $\Phi'_{1x}$ , определенные в прямой задаче, имеют вид

$$(2.7) \quad \Phi'_{1x}(x, y, z) = -\Phi'_y(x - y, 0, z) - \frac{1}{\pi} \int_{COD} \left[ \Phi'_\eta \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta \right]_{\zeta=f(\xi)} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_s \Phi''_{\eta\zeta} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta d\xi d\xi;$$

$$(2.8) \quad \Phi'_{1x}(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{COD} [\Phi'_\eta \varphi]_{\zeta=\varphi(\xi)} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_s \Phi''_{\eta\zeta} \varphi d\xi d\zeta,$$

а производные  $\Phi'_2$ , определенные в обратной задаче:

$$(2.9) \quad \Phi'_2(x, y, z) = -\Phi'_x(x - y, 0, z) + \frac{1}{\pi} \int_{COD} \left[ \Phi'_\xi \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\zeta \right]_{\zeta=f(\xi)} d\xi -$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi} \iint_s \Phi''_{\xi\xi} \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\zeta d\xi; \\
(2.10) \quad \Phi'_y(x, y, z) = & - \frac{1}{\pi} \int \left[ \Phi'_\xi \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\xi \right]_{\xi=\psi(\zeta)} d\zeta - \\
& - \frac{1}{\pi} \iint_s \Phi''_{\xi\xi} \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\xi d\zeta.
\end{aligned}$$

Здесь  $s$  — область зависимости точки  $M(x, y, z)$ ;  $COD(\zeta = f(\xi), \xi = \psi(\zeta))$  — граница области зависимости с невозмущенной областью (см. рисунок).

Ядра интегральных операторов в формулах (2.7) — (2.10) в развернутом виде записываются следующим образом:

$$(2.11) \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta = \frac{(x - \xi)(z - \zeta)}{r[(x - \xi)^2 - y^2]};$$

$$(2.12) \quad \varphi = r^{-1};$$

$$(2.13) \quad \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\zeta = \frac{(x - \xi)(z - \zeta)(r^2 - y^2)}{r[(z - \zeta)^2 + y^2][(x - \xi)^2 - y^2]};$$

$$(2.14) \quad \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\xi = \frac{y^2(x - \xi)^2 - r^2(z - \zeta)^2}{r[(z - \zeta)^2 + y^2]^2}.$$

Все эти ядра имеют особенность на линии  $r = 0$ . При переходе точки  $M(x, y, z)$  на базовую плоскость ( $y = 0$ ) особыми становятся линия  $\zeta = z$  и точка  $\xi = x$ ; причем в некоторых случаях особенность ядра такова, что интеграл будет расходящимся. Но это не означает отсутствия решения в обычном смысле. Для доказательства существования решения в этом случае при вычислении интегралов следует совершать предельный переход  $y \rightarrow 0$  после выполнения операции интегрирования. Ядра отражают характер воздействия гидродинамической особенности (вихревого отрезка, источника, возмущения более сложного характера и т.д.) на точку  $M(x, y, z)$  в пространстве вне плоскости расположения гидродинамических особенностей. Для каждой из гидродинамических особенностей присущ свой допустимый путь перехода точки  $M(x, y, z)$  на плоскость особенностей. Для некоторых особенностей (источник) безразличен порядок перехода точки  $M$  на возмущающую плоскость и порядок интегрирования в двойном интеграле. В некоторых случаях особенностей (вихревой отрезок) результат зависит от порядка интегрирования в двойном интеграле, а в некоторых более сложных — и от порядка предельного перехода  $y \rightarrow 0$  до или после интегрирования.

Характер особенностей интегральных операторов в (2.7) — (2.10) без нарушения общности проанализируем для крыла, у которого граница  $COD$  области зависимости с невозмущенной областью задана уравнением  $\xi = 0$  (см. рисунок).

Интегральный оператор из (2.7), в котором гидродинамическая особенность  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta$  связана с вихревым отрезком в направлении оси  $\zeta$ , согласно (2.11), записывается при  $y = 0$  следующим образом:

$$J_7(x, 0, z) = \int_0^x \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \Phi''_{\eta\xi} \frac{(z - \zeta)}{r(x - \xi)} d\zeta d\xi.$$

Представим закон изменения угла наклона нормали в виде ряда

$$\Phi''_{\eta\xi}(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi) \zeta^i \quad \text{или} \quad \Phi''_{\eta\xi}(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\xi) (z - \zeta)^i$$

(при представлении в ряд по  $\zeta$  функции  $\Phi''_{\xi\zeta}$ , как и других функций, используются одни и те же буквенные обозначения коэффициентов:  $f_i(\xi)$ ,  $g_i(\xi)$ ). Тогда при  $i = 0$

$$J_{70}(x, 0, z) = \int_0^x \frac{f_0(\xi)}{(x-\xi)} \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{(z-\zeta)}{r} d\zeta d\xi = 0;$$

при  $i = 1$

$$J_{71}(x, 0, z) = \int_0^x \frac{f_1(\xi)}{(x-\xi)} \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{[z - (z-\zeta)](z-\zeta)}{r} d\zeta d\xi = \frac{\pi}{z} \int_0^x f_1(\xi)(x-\xi) d\xi.$$

При  $i \geq 2$  во внутреннем интеграле по  $\zeta$  появляются члены с нечетной и четной степенью множителя  $(z-\zeta)$ . Интегралы с членами в нечетной степени  $(z-\zeta)^{2i+1}$  обращаются в нуль, а интегралы с членами  $(z-\zeta)^{2i+2}$  имеют после нахождения первообразной сомножитель  $\pi(x-\xi)^2$ , так что особенность  $(x-\xi)^{-1}$  у внешнего интеграла по  $\xi$  исчезает, а все  $J_{7i}$  пропорциональны интегралу  $\pi \int_0^x f_i(\xi)(x-\xi) d\xi$ . Можно убедиться, что для  $J_7$  выполнимо правило (2.0).

Интегральный оператор из (2.8), в котором гидродинамическая особенность  $r^{-1}$  — сверхзвуковой источник, имеет интегрируемую особенность, допускающую перестановку порядка интегрирования и использование правила (2.0).

Ядро интегрального оператора из (2.9) в силу  $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$  и (2.13) представимо как

$$(2.15) \quad \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} d\xi d\zeta = \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta = \\ = \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]} - \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r[(x-\xi)^2 - y^2]},$$

оно связано с вихревыми отрезками направлений  $\xi$  и  $\zeta$ . Особенности интегрального оператора с ядром  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta$  проанализированы выше. А часть интегрального оператора с ядром  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi$ , согласно (2.9), (2.11), (2.13), (2.15), при  $y = 0$  имеет вид

$$J_9(x, 0, z) = \int_0^x \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \Phi''_{\xi\zeta} \frac{(x-\xi)}{r(z-\zeta)} d\zeta d\xi.$$

Представим  $\Phi''_{\xi\zeta}(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi) \zeta^i$ . Тогда при  $i = 0$

$$J_{90}(x, 0, z) = \int_0^x f_0(\xi)(x-\xi) \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{d\zeta}{r(z-\zeta)} d\xi = 0;$$

при  $i = 1$

$$J_{91}(x, 0, z) = \int_0^x f_1(\xi)(x-\xi) \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{[z - (z-\zeta)]}{r(z-\zeta)} d\zeta d\xi = -\pi \int_0^x f_1(\xi)(x-\xi) d\xi;$$

при  $i \geq 2$  внутренние интегралы по  $\zeta$ , кроме членов

$$\int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{d\zeta}{r(z-\zeta)} = 0, \quad \int_{z-(x-\xi)}^{z+(x-\xi)} \frac{d\zeta}{r} = \pi,$$

будут еще иметь интегрируемые члены типа  $\int \frac{(z - \zeta)^i}{r} d\zeta$ . Как и для  $J_7$ , для  $J_9$  имеет место правило (2.0).

Интегральный оператор из (2.10) с ядром (2.14) при  $y = 0$  на линии  $\zeta = z$  имеет неинтегрируемую особенность  $(z - \zeta)^{-2}$ :

$$(2.16) \quad J_{10}(x, 0, z) = \int_{z-x}^{z+x} \frac{A(\zeta)}{(z - \zeta)^2} d\zeta, \quad A(\zeta) = \int_0^{x-(z-\zeta)} \Phi''_{\xi\xi} r d\xi,$$

что означает нефизичность результата — конечному изменению нагрузки соответствует бесконечная деформация поверхности крыла. Ядро интегрального оператора в (2.16) получено из ядра оператора

$$(2.17) \quad J_{10}(x, y, z) = \int_{z-\sqrt{x^2-y^2}}^{z+\sqrt{x^2-y^2}} \int_0^{x-\sqrt{(z-\zeta)^2+y^2}} \Phi''_{\xi\xi} \frac{y^2(x-\xi)^2 - r^2(z-\zeta)^2}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]^2} d\xi d\zeta$$

отбрасыванием в нем членов с множителем  $y^2$  при  $y \rightarrow 0$ .

Отбрасывать члены с  $y^2$  при  $y \rightarrow 0$  до выполнения интегрирования нельзя, так как член ядра в (2.17) с числителем  $y^2(x - \xi)^2$  после интегрирования будет иметь множитель  $y^{-1}$ . Такая же особенность  $y^{-1}$  появится после интегрирования члена ядра с числителем  $r^2(z - \zeta)^2$ , проявившая себя в операторе (2.16). Но в данном случае интегрирования при  $y \neq 0$  члены с особенностью  $y^{-1}$  от слагаемых числителя  $[y^2(x - \xi)^2 - r^2(z - \zeta)^2]$  взаимно уничтожаются. Других особенностей при интегрировании не появляется, оператор  $J_{10}(x, 0, z)$  при условии ограниченности величины  $\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \zeta)$  существует, и  $\lim_{y \rightarrow 0} J_{10}(x, y, z)$  — конечная величина. Процедура вычисления двойных интегралов из (2.17) довольно громоздка, и ее для доказательства существования  $J_{10}(x, y, z)$  достаточно реализовать при  $\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \zeta) = \text{const} = c$ . В этом случае  $J_{10}(x, y, z) = \pi x$  во всей возмущенной области, в том числе и при  $y = 0$ .

В формуле (2.10), определяющей  $\Phi'_y(x, y, z)$  по параметрам нагрузки на крыле, кроме двойного интегрального оператора  $J_{10}(x, y, z)$ , зависящего от  $\Phi''_{\xi\xi}(\xi, \zeta)$ , имеется однократный интеграл по контуру  $COD(\xi = 0)$ , зависящий от  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta)$ :

$$(2.18) \quad J_{10}^1(x, y, z) = \int_{z-\sqrt{x^2-y^2}}^{z+\sqrt{x^2-y^2}} \Phi'_\xi(0, \zeta) \frac{y^2 x^2 - r^2(z - \zeta)^2}{r[(z - \zeta)^2 + y^2]^2} d\zeta.$$

Здесь интегрирование следует выполнять при  $y \neq 0$ . При этом после интегрирования появятся взаимосопротивляющиеся члены с множителем  $y^{-1}$ . Интеграл  $J_{10}^1(x, y, z)$  при условии ограниченности величины  $\Phi'_\xi(0, \zeta)$  существует. Для доказательства достаточно рассмотреть задание нагрузки на крыле в виде  $\Phi'_\xi(\xi, \zeta) = p_0 + c\xi$ , тогда  $\Phi'_\xi(0, \zeta) = p_0$ . Интеграл (2.18) при этом имеет вид  $J_{10}^1(x, y, z) = p_0 \pi$  во всей возмущенной области, в том числе и при  $y = 0$ .

Формула (2.10) в рассмотренном случае границы  $COD(\xi = 0)$  при нагрузке  $\Phi'_\xi = p_0 + c\xi$  записывается в виде  $\Phi'_y(x, y, z) = -(p_0 + cx)$ , что и отвечает физическому решению задачи для крыла бесконечного размаха. При  $c = 0$   $\Phi'_y(x, y, z) = -p_0$  — решение задачи для плоской пластины.

Таким образом, решение Вольтерра дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между решениями прямой и обратной задач аэродинамики крыла. Газодинамические параметры потока в прямой и обратной задачах представимы через определяющие параметры на поверхности крыла в классе ограниченных функций, в том числе и при предельном переходе на поверхность крыла, тем самым устанавливается связь между определяющими параметрами (геометрией и нагрузкой) на поверхности крыла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н.Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. — Новосибирск: Наука, 1985.
  2. Общая теория аэродинамики больших скоростей / Под ред. У.Р. Сирса. — М.: Воениздат, 1962.
  3. Красильщикова Е.А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. — М.: Наука, 1978.
  4. Воробьев Н.Ф. К задаче обтекания сверхзвуковым потоком тонкого крыла конечного размаха с полностью дозвуковыми передними кромками // ПМТФ. — 1990. — № 2.
  5. Воробьев Н.Ф. Об одном точном решении задачи о концевом эффекте крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке // ПМТФ. — 1992. — № 1.
  6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1. — М.; Л.: Гостехиздат, 1933.
- г. Новосибирск Поступила 28/VI 1993 г.

УДК 533.6.071+533.6.072

*М.Е. Топчиян, А.М. Харитонов*

### АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТРУБЫ ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (достижения, проблемы, перспективы)

Перспективы развития космонавтики, эксплуатация космических станций и платформ, развертывание систем связи, навигации, наблюдения за состоянием окружающей среды обуславливают необходимость создания нового поколения транспортных систем, способных существенно снизить стоимость доставки грузов и людей на орбиту Земли и другие планеты. Все более актуальной становится и задача возвращения из космоса аварийных и отработавших конструкций, так как засорение его становится все более заметным и в будущем может стать серьезной экологической проблемой.

Стремление решить эти задачи привело в последнее время к разработке ряда перспективных проектов космических транспортных систем, среди которых [1—6]:

— одноступенчатые воздушно-космические самолеты (ВКС) NASP, X-20, HOTOL, STS-2000, HOPE;

— двухступенчатые авиационно-космические системы с горизонтальным стартом и посадкой ZENGER, STAR-H;

— двухступенчатые авиационно-космические системы с вертикальным стартом и горизонтальной посадкой ARIAN-5 / HERMES и др.

Реализация упомянутых проектов в значительной степени зависит от успешного решения задач аэротермодинамики планера, газодинамики процессов смешения и горения в воздушно-реактивных двигателях (ВРД), от выбора оптимальной компоновки планера, воздухозаборника и соплового блока.

Общими для всех рассматриваемых концепций транспортных систем наряду с другими являются:

— проблемы аэродинамики внешнего обтекания при взаимодействии скачков уплотнения с ламинарным и турбулентным пограничными слоями;

— аэродинамический нагрев, абляция, эрозия поверхностей космического аппарата;

— проблемы газодинамики внутренних течений в двигателях (взаимодействие потока в воздухозаборнике и камере сгорания, смешение, сжигание топлива при поддержании сверхзвукового режима, полнота химического превращения);

© М.Е. Топчиян, А.М. Харитонов, 1994