

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета,  
659305 Бийск

Рассмотрена классическая задача устойчивости шарнирно опертого упругого стержня, сжатого постоянной силой, линия действия которой проходит через центры шарниров, при условии вращения стержня с постоянной угловой скоростью вокруг оси, совпадающей с линией действия силы. В рамках теории устойчивости динамических систем с распределенными параметрами изучается устойчивость решения нелинейной задачи, описывающей деформированное состояние стержня, обусловленное действиями сжимающей силы и распределенной центробежной нагрузки. Получены соотношения для параметров задачи, при которых происходит потеря устойчивости. Приведены результаты расчетов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим шарнирно опертый вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  упругий стержень, сжатый постоянной силой  $P$  (рис. 1). Ось покоящегося ненагруженного стержня, вдоль которой направлена ось  $x$ , является идеальной прямой. В нагруженном состоянии на стержень с искривленной осью помимо силы  $P$ , линия действия которой проходит через центры шарниров, действует распределенная центробежная нагрузка  $q(x) = m(x)\omega^2 y(x)$ , где  $m(x)$  — масса единицы длины стержня;  $y(x)$  — прогиб нагруженного стержня. Необходимо определить условия, при которых нагруженный указанным способом упругий стержень теряет устойчивость.

Для равновесия части искривленного стержня (рис. 2) необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на эту часть стержня, относительно произвольной точки равнялась нулю:

$$M + M_P + M_q = 0, \quad (1.1)$$

где  $M$  — внутренний изгибающий момент;  $M_P$ ,  $M_q$  — моменты силы  $P$  и распределенной нагрузки  $q$  соответственно. Эти моменты связаны с поперечным прогибом зависимостями [1]

$$M = EI\rho(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-1,5}, \quad M_P = Py,$$

$$M_q = \frac{x}{l} \int_0^{x_1} \left[ \int_0^{x_2} q(x_2) dx_2 \right] dx_1 - \int_0^x \left[ \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \right] dx_1,$$

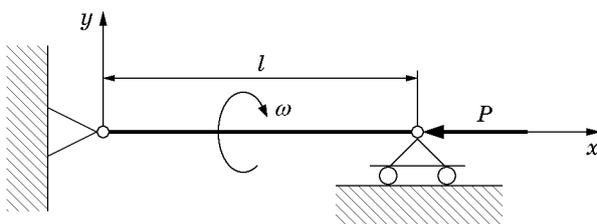


Рис. 1

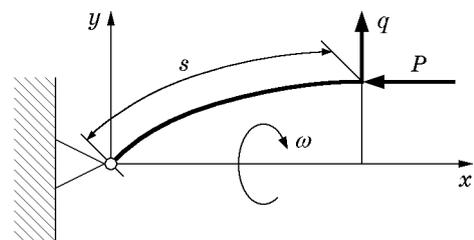


Рис. 2

где  $l$  — длина стержня;  $E$  — модуль упругости;  $I$  — момент инерции сечения;  $\rho(x)$  — функция, характеризующая изменение жесткости по длине стержня;  $x_1, x_2$  — переменные интегрирования. Уравнение изгиба стержня (1.1) с учетом выражений для моментов приобретает вид

$$EI\rho(x) \frac{d^2y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-1,5} + Py + \frac{x}{l} \int_0^l \left[ \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \right] dx_1 - \int_0^x \left[ \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \right] dx_1 = 0. \quad (1.2)$$

При строгой нелинейной постановке граничные условия задачи ставятся с учетом смещения правой границы стержня  $\Delta = \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$ , обусловленного его изгибом (деформацией сжатия стержня пренебрегается):

$$y(0) = y(l - \Delta) = 0. \quad (1.3)$$

Условия на правой границе стержня зависят от решения задачи, и, следовательно, уравнения (1.2), (1.3) должны быть рассмотрены как система зависимых уравнений, решение которой может быть получено только численными методами. Для использования аналитических методов решения целесообразно перейти от системы координат  $(x, y)$  к системе  $(s, y)$ , где  $s$  — координата, совпадающая с искривленной осью стержня (рис. 2). Связь координат  $x$  и  $s$  выражается известным соотношением дифференциальных операторов

$$\frac{d}{dx} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-0,5} \frac{d}{ds}. \quad (1.4)$$

Прежде чем перейти к новой системе координат, произведем замену интегриродифференциального уравнения (1.2) на эквивалентное дифференциальное уравнение. После двукратного дифференцирования уравнения (1.2) по  $x$  получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI\rho(x) \frac{d^2y}{dx^2} \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{-1,5} \right] + P \frac{d^2y}{dx^2} - m(x)\omega^2 y = 0. \quad (1.5)$$

Затем при помощи дифференциального оператора (1.4) определим производные

$$\frac{dy}{dx} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-0,5} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-2} \frac{d^2y}{ds^2}$$

и момент

$$M = EI\rho(s) \frac{d^2y}{ds^2} \left[ 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-0,5},$$

которые представим в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{ds} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 + O\left( \left| \frac{dy}{ds} \right|^6 \right) \right], \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{ds^2} \left[ 1 + 2 \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + 3 \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 + O\left( \left| \frac{dy}{ds} \right|^6 \right) \right], \\ M &= EI\rho(s) \frac{d^2y}{ds^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 + O\left( \left| \frac{dy}{ds} \right|^6 \right) \right]. \end{aligned}$$

Двукратное применение дифференциального оператора (1.4) к последнему уравнению приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} = EI \left[ \rho(s) \frac{d^4 y}{ds^4} + 2 \frac{d\rho(s)}{ds} \frac{d^3 y}{ds^3} + \frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \frac{d^2 y}{ds^2} + \right. \\ \left. + \rho(s) \left( \frac{3}{2} \frac{d^4 y}{ds^4} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + 4 \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{d^3 y}{ds^3} + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^3 \right) + \right. \\ \left. + 3 \frac{d\rho(s)}{ds} \left( \frac{d^3 y}{ds^3} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{dy}{ds} \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 \right) + \frac{3}{2} \frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \frac{d^2 y}{ds^2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + O(|y|^5) \right]. \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют записать уравнение (1.5) в виде суммы, состоящей из линейного оператора

$$Ly = \rho(s) \frac{d^4 y}{ds^4} + 2 \frac{d\rho(s)}{ds} \frac{d^3 y}{ds^3} + \left( \frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} + k^2 \right) \frac{d^2 y}{ds^2} - m(s) \omega_1^2 y,$$

нелинейного оператора

$$\begin{aligned} Ny = \rho(s) \left( \frac{3}{2} \frac{d^4 y}{ds^4} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + 4 \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{d^3 y}{ds^3} + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^3 \right) + \\ + 3 \frac{d\rho(s)}{ds} \left( \frac{d^3 y}{ds^3} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{dy}{ds} \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 \right) + \left( \frac{3}{2} \frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} + 2k^2 \right) \frac{d^2 y}{ds^2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

и членов высшего порядка малости:

$$Ly + Ny + O(|y|^5) = 0. \quad (1.6)$$

В выражениях для операторов  $Ly$ ,  $Ny$  использованы обозначения  $k^2 = P/(EI)$ ,  $\omega_1^2 = \omega^2/(EI)$ .

К уравнению (1.6) должны быть добавлены четыре граничных условия (по два в точках  $s = 0$ ,  $s = l$ ). Для рассматриваемой схемы крепления эти условия означают, что поперечные перемещения концов стержня (шарниров) отсутствуют и внутренний изгибающий момент в шарнирах обращается в нуль:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad \frac{d^2 y(0)}{ds^2} = \frac{d^2 y(l)}{ds^2} = 0. \quad (1.7)$$

С точки зрения общей математической теории [2, 3] изучение устойчивости решения нелинейной задачи (1.6), (1.7) сводится к тем же операциям, что были использованы при анализе устойчивости покоящегося стержня, сжатого постоянной силой [4]. Сначала решается спектральная задача и строится пространство собственных функций производящего оператора  $Ly$ . Затем определяется амплитуда, представляющая собой проекцию решения уравнения (1.6) на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженным собственным вектором, принадлежащим максимальному собственному значению спектра. Наконец, строится решение задачи (1.6), (1.7) в виде ряда по степеням амплитуды.

**2. Решение спектральной задачи.** Спектр производящего оператора  $Ly$  состоит из собственных значений  $\sigma_n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) краевой задачи

$$Ly + \sigma^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad \frac{d^2 y(0)}{ds^2} = \frac{d^2 y(l)}{ds^2} = 0. \quad (2.1)$$

Собственные функции  $y_n$ , отвечающие собственным значениям  $\sigma_n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), и любые их линейные комбинации являются решениями задачи (2.1). В пространстве этих функций определено скалярное произведение, что позволяет ввести понятие амплитуды.

Для нахождения амплитуды и определения условий разрешимости задачи (1.6), (1.7) необходимо построить сопряженный оператор  $L^*$ , удовлетворяющий формуле Грина [5]

$$\int_0^l [y^* Ly - y L^* y^*] dx = L_+[y, y^*]_0^l.$$

Здесь  $y, y^*$  — любые решения прямой и сопряженной краевых задач;  $L_+[y, y^*]_0^l$  — билинейная форма функций  $y, y^*$  и их производных до третьего порядка включительно.

Дифференциальная форма  $L^*y^*$ , сопряженная с формой  $Ly$ , имеет вид

$$L^*y^* = \frac{d^4}{ds^4}[\rho(s)y^*] - \frac{d^3}{ds^3}\left[2 \frac{d\rho(s)}{ds} y^*\right] + \frac{d^2}{ds^2}\left[\left(\frac{d^2\rho(s)}{ds^2} + k^2\right)y^*\right] - m(s)\omega_1^2 y^*.$$

После вычисления производных и перегруппировки слагаемых получаем

$$L^*y = \rho(s) \frac{d^4 y^*}{ds^4} + 2 \frac{d\rho(s)}{ds} \frac{d^3 y^*}{ds^3} + \left(\frac{d^2\rho(s)}{ds^2} + k^2\right) \frac{d^2 y^*}{ds^2} - m(s)\omega_1^2 y^*,$$

откуда следует, что оператор  $L$  самосопряжен:  $L = L^*$ . Для определения граничных условий оператора  $L^*$  представим правую часть формулы Грина в билинейной форме

$$L_+[y, y^*]_0^l = \left\{ \rho(s)y^* \frac{d^3 y}{ds^3} - \left[ \rho(s) \frac{dy^*}{ds} - \frac{d\rho(s)}{ds} y^* \right] \frac{d^2 y}{ds^2} + \right. \\ \left. + \left[ \rho(s) \frac{d^2 y^*}{ds^2} + k^2 y^* \right] \frac{dy}{ds} - \left[ \rho(s) \frac{d^3 y^*}{ds^3} + \frac{d\rho(s)}{ds} \frac{d^2 y^*}{ds^2} + k^2 \frac{dy^*}{ds} \right] y \right\}_0^l.$$

Нетрудно убедиться, что при произвольных  $dy/ds, d^3y/ds^3, dy^*/ds, d^3y^*/ds^3$  билинейная форма  $L_+[y, y^*]_0^l = 0$ , если

$$y^*(0) = y^*(l) = 0, \quad \frac{d^2 y^*(0)}{ds^2} = \frac{d^2 y^*(l)}{ds^2} = 0. \quad (2.2)$$

Сравнивая граничные условия (2.2) сопряженной задачи, обращающие в нуль билинейную форму формулы Грина, с условиями (1.7), приходим к выводу, что задача (2.1) является самосопряженной для всех непрерывных функций  $\rho(s)$  с производными до третьего порядка включительно. Самосопряженность задачи упрощает ее решение. Вместе с тем аналитическое вычисление собственных значений и собственных функций задачи (2.1) при переменных коэффициентах  $\rho(s), m(s)$  затруднено и является самостоятельной математической проблемой. Поэтому, не нарушая общности метода изучения устойчивости решения задачи (1.6), (1.7), будем полагать в дальнейшем, что стержень имеет по длине постоянную жесткость  $\rho = 1$  и постоянную удельную массу  $m = m_0$ .

При постоянных коэффициентах задача (2.1) допускает точное решение

$$y = c_1 \sin(\lambda s) + c_2 \cos(\lambda s) + c_3 s + c_4, \quad (2.3)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — произвольные постоянные. Решая уравнение (2.3) совместно с граничными условиями задачи (2.1), приходим к системе уравнений

$$c_2 + c_4 = 0, \quad c_1 \sin(\lambda l) + c_2 \cos(\lambda l) + c_3 l + c_4 = 0, \\ c_2 = 0, \quad c_1 k^2 \sin(\lambda l) + c_2 k^2 \cos(\lambda l) = 0,$$

из которой следует  $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ . Задача (2.1) имеет нетривиальное решение при  $c_1 \neq 0$  и параметре  $\lambda$ , принимающем дискретные значения  $\lambda_n = n\pi l^{-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), которым отвечают собственные функции  $y_n = c_1 \sin(\lambda_n s)$ . Собственные функции определяются с

точностью до постоянного множителя, так что положим  $c_1 = 1$  и используем его в качестве коэффициента с размерностью длины. Выбор значения  $c_1$  обусловлен тем, что в рамках метода собственные функции  $y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) рассматриваются лишь как независимые координаты некоторого функционального пространства. Иными словами, коэффициент  $c_1$  в уравнении изогнутой формы равновесия стержня может принимать другие отличные от нуля значения.

Сопряженные относительно скалярного произведения собственные функции оператора  $L^*$  совпадают с точностью до произвольных множителей  $A_n$  с собственными функциями оператора  $L$ , так как задача самосопряжена:  $y_n^* = A_n y_n$ . Подстановка собственных функций  $y_n$  в дифференциальное уравнение задачи (2.1) дает характеристические уравнения для собственных значений оператора  $L$

$$\sigma_n^2 = \lambda_n^2 k^2 + m_0 \omega_1^2 - \lambda_n^4 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.4) следует, что существует бесконечное множество значений силы  $P$ , которым отвечают соответствующие конфигурации искривленной формы стержня. Наименьшее значение осевой силы соответствует собственному значению  $\sigma_1^2$ .

Введем обозначение  $\sigma_1^2 = \mu \pi^2 l^{-2}$ , где  $\mu$  — параметр из открытого интервала, содержащего нуль. Тогда уравнение (2.4) при  $n = 1$  с учетом выражений для  $k^2$ ,  $\omega_1^2$  имеет вид

$$\mu = P/(EI) + m_0 \omega^2 l^2 / (EI \pi^2) - (\pi/l)^2. \quad (2.5)$$

Решение линейной задачи (2.1) устойчиво при  $\mu < 0$  и неустойчиво при  $\mu > 0$ . Критическое значение осевой силы в линейном приближении соответствует значению  $\mu = 0$  и определяется формулой

$$P^* = EI \pi^2 / l^2 - m_0 \omega^2 l^2 / \pi^2. \quad (2.6)$$

При  $\omega = 0$  соотношение (2.6) совпадает с известной формулой Эйлера [1]. Решение (2.6) линеаризованной задачи (2.1) совпадает с решением задачи устойчивости стержня, связанного с упругим основанием [6, 7], если предположить, что коэффициент жесткости упругого основания отрицателен.

Можно также определить критическую скорость вращения стержня  $\omega^* = \sqrt{EI \pi^4 / (m_0 l^4) - P \pi^2 / (m_0 l^2)}$ . В пространстве с независимыми координатами  $P$ ,  $l$ ,  $\omega$  область устойчивых решений краевой задачи (2.1) ограничена поверхностью  $\mu(P, l, \omega) = 0$ .

**3. Устойчивость бифуркационного решения.** Известно, что неподвижный стержень теряет устойчивость под действием нагрузки, превышающей критическое значение, полученное при решении линеаризованной задачи [6, 7]. Из теории нелинейных операторных уравнений [8] следует, что в окрестности точки ветвления решения линеаризованного уравнения  $\mu = 0$  нелинейное уравнение (1.6) при  $\mu < 0$  и  $\mu > 0$  имеет малые ненулевые решения. Поскольку операторы  $Ly$ ,  $Ny$  гладкие, ненулевое решение единственно и содержит всю информацию о нагрузке и конфигурации стержня при потере устойчивости.

В уравнении (1.6) произведем замену  $k^2 = \mu - m_0 \omega_1^2 l^2 / \pi^2 + (\pi/l)^2$ , вытекающую из (2.5), и перепишем операторы  $Ly$ ,  $Ny$  с учетом допущения однородности стержня:

$$L_\mu y = \frac{d^4 y}{ds^4} + \left[ \mu - \frac{m_0 \omega_1^2 l^2}{\pi^2} + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] \frac{d^2 y}{ds^2} - m_0 \omega_1^2 y; \quad (3.1)$$

$$N_\mu y = \frac{3}{2} \frac{d^4 y}{ds^4} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + 4 \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{d^3 y}{ds^3} + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^3 + \frac{dy}{ds} \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + 2 \left[ \mu - \frac{m_0 \omega_1^2 l^2}{\pi^2} + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] \frac{d^2 y}{ds^2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (1.6) с учетом (3.1), (3.2) может быть представлено в виде ряда по степеням  $y$ ,  $\mu$  в окрестности точки  $(y, \mu) = (0, 0)$ :

$$L_0 y + \mu \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y + N_0(y, y, y) + O(|y|^5) = 0, \quad (3.3)$$

где  $L_0 y = L_{\mu=0} y$ ;  $N_0(y, y, y) = N_{\mu=0}(y, y, y)$ . Теперь, определив амплитуду как скалярное произведение  $\varepsilon = \int_0^l y y_1^* ds$ , будем искать решение (3.3) в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \varepsilon^k}{k!}, \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \varepsilon^k}{k!}, \quad (3.4)$$

где  $Y_k$ ,  $\mu_k$  — коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Подстановка рядов (3.4) в уравнение (3.3) и отождествление слагаемых при независимых степенях  $\varepsilon$  до третьей включительно дают систему

$$L_0 Y_1 = 0; \quad (3.5)$$

$$L_0 Y_2 + 2\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} Y_1 = 0; \quad (3.6)$$

$$L_0 Y_3 + 3\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} Y_2 + 3\mu_2 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} Y_1 + 6N_0(Y_1, Y_1, Y_1) = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.5) имеет единственное решение  $Y_1 = y_1$ . Общее решение неоднородного уравнения (3.6) складывается из решения однородного уравнения  $L_0 Y_2 = 0$ , совпадающего с решением (3.5), и частного решения самого уравнения (3.6). Условие разрешимости этого уравнения

$$\int_0^l \mu_1 y_1^* \frac{\partial L_0}{\partial \mu} Y_1 dx = -\frac{\mu_1 \pi^2}{l^2} \int_0^l y_1 y_1^* dx = 0$$

выполняется только при  $\mu_1 = 0$ . Отсюда следует, что частное решение уравнения (3.6) равно нулю.

Условие разрешимости неоднородного уравнения (3.7)

$$\mu_2 \int_0^l y_1^* \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 dx + 2 \int_0^l y_1^* N_0(y_1, y_1, y_1) dx = 0$$

и соотношение

$$\frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 = -\frac{\pi^2}{l^2} y_1$$

позволяют определить выражение

$$\mu_2 = \frac{2l^2}{\pi^2} \int_0^l y_1^* N_0(y_1, y_1, y_1) dx \left[ \int_0^l y_1 y_1^* dx \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

Подстановка выражения (3.8) в (3.4) приводит к бифуркационному решению

$$\mu = 0,5\mu_2 \varepsilon^2, \quad (3.9)$$

определяющему границу устойчивости решения нелинейной задачи (1.6), (1.7) в плоскости  $(\mu, \varepsilon)$ . Для того чтобы решение (3.9) было единственным, необходимо использовать условие нормировки  $\varepsilon = 1$ , вытекающее из определения амплитуды [4]. Из этого условия следует формула для коэффициента

$$A_1 = \left[ \int_0^l y_1^2 dx \right]^{-1} = \frac{2}{c_1 l}$$

в выражении для сопряженного собственного вектора  $y_1^*$ .

Подстановка  $y_1, y_1^*$  в формулу (3.8) дает точное значение параметра  $\mu_2 = c_1^2 \pi^4 / (4l^4) + c_1^2 m_0 \omega^2$ . Последнее соотношение совместно с уравнением (2.5) и условием нормировки  $\varepsilon = 1$  позволяют представить уравнение (3.9) в виде

$$\frac{P}{EI} + \frac{m_0 \omega^2 l^2}{EI \pi^2} - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 = \frac{c_1^2 \pi^4}{8l^4} + \frac{c_1^2 m_0 \omega^2}{2EI}. \quad (3.10)$$

Решение (3.10) называют суперкритическим. Оно существует только при  $\mu > 0$  (левая часть (3.10) равна  $\mu$ , а правая всегда положительна) и устойчиво в окрестности критической точки  $\mu = 0$ .

Из уравнения (3.10) легко определяется максимальная нагрузка  $P_{\max}$ , при которой стержень теряет устойчивость:

$$P_{\max} = \frac{EI \pi^2}{l^2} \left( 1 + \frac{c_1^2 \pi^2}{8l^2} \right) - m_0 \omega^2 \left( \frac{l^2}{\pi^2} - \frac{c_1^2}{2} \right). \quad (3.11)$$

В случае покоящегося стержня ( $\omega = 0$ ) длиной  $l = \pi$  находим  $P_{\max} = 1,125EI$ , что соответствует результату, полученному для однородного стержня в [4]. Из соотношения (3.11) легко определить предельную угловую скорость при некоторой фиксированной нагрузке, включая значение  $P = 0$ . На рис. 3 изображена зависимость максимальной нагрузки  $P_{\max}$  от отношения  $l_1 = l\pi^{-1}$  и угловой скорости  $\omega$ , полученная при  $m_0 = 0,1$  кг/м,  $EI = 1$  Н·м<sup>2</sup>,  $c_1 = 1$  м. Из формулы (3.11) и рис. 3 следует, что вращающийся стержень теряет устойчивость при меньшей сжимающей осевой силе по сравнению с неподвижным; нагруженный осевой силой стержень теряет устойчивость при меньшей угловой скорости, чем ненагруженный.

В работе [9] максимальная нагрузка для неподвижного стержня получена в виде функции максимального прогиба стержня  $f_1$ . Если в выражении (3.11) при  $\omega = 0$  положить  $c_1 = f_1$ , то оно будет совпадать с результатом [9] с точностью до  $\pi^6 l^{-6}$ .

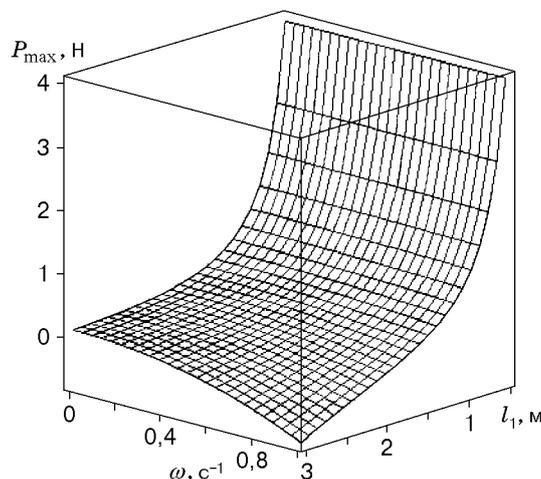


Рис. 3

Конфигурация стержня, соответствующая максимальной нагрузке, определяется формулой

$$y = Y_1\varepsilon + Y_{3p}\varepsilon^3/3!, \quad (3.12)$$

вытекающей из (3.4). Найденная функция  $Y_1$  представляет собой решение однородной задачи (3.5). Функция  $Y_{3p}$  является частным решением неоднородной задачи (3.7). Решения однородной задачи (3.6) и соответствующей однородной задачи (3.7) уже учтены первым слагаемым (3.12).

При известном решении однородного уравнения  $L_0Y_3 = 0$  (совпадающем с решением (3.5)), частное решение неоднородного уравнения (3.7) имеет вид [5]

$$Y_{3p} = \sin(\lambda_1 s) \int_0^s \left[ 3\mu_2 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} Y_1 + 6N_0(Y_1, Y_1, Y_1) \right] \cos(\lambda_1 s) ds. \quad (3.13)$$

Интеграл в правой части (3.13) выражается через элементарные функции, но получающиеся при этом выражения имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Для определения прогиба  $y$  в любой точке  $s$  можно подставить (3.13) в формулу (3.12). Пусть, например,  $l = 2\pi$ . Подставляя это значение в (3.11), определяем максимальную нагрузку  $P_{\max} = 0,258EI - 3,5m_0\omega^2$ . Максимальный прогиб стержня  $y_{\max}$  достигается в середине стержня ( $s = \pi$ ). Используя  $\pi$  в качестве верхнего предела интеграла в правой части (3.13), находим  $Y_{3p}(\pi) = 0,178 + 0,75m_0\omega^2/(EI)$ . Теперь, учитывая, что  $Y_1(\pi) = 1$ , из (3.12) получаем  $y_{\max} = \varepsilon + (0,0297 + 0,125m_0\omega^2/(EI))\varepsilon^3$ . Нормировка  $\varepsilon = 1$  показывает, что предельной нагрузке соответствует максимальный прогиб стержня  $y_{\max} = 1,0297 + 0,125m_0\omega^2(EI)^{-1}$ . Из приведенных результатов легко получить частные случаи: при  $\omega = 0$  и  $l = 2\pi$  имеем  $P_{\max} = 1,032P^*$ ,  $y_{\max}/l = 0,164$ ; при нулевой нагрузке и такой же длине стержня имеем угловую скорость, при которой происходит потеря устойчивости стержня:  $\omega = 1,179\omega^*$ .

Вычисление производных  $dy/ds$  при  $\omega = 0$ ,  $l = 2\pi$  определяет угол между касательной к оси стержня на его концах и осью  $x$ , примерно равный  $27^\circ$ . Отсюда следует, что результаты расчетов, проведенных при  $\omega = 0$ ,  $l = 2\pi$ , удовлетворительно согласуются с данными, полученными в [9, табл. 1].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1986.
2. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложение. М.: Мир, 1980.
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
4. Боднарь Т. А. Устойчивость эйлера стержня. Нелинейный анализ // ПМТФ. 1993. № 2. С. 134–141.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.
6. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
7. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978.
8. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
9. Астапов Н. С., Корнев В. М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 162–169.