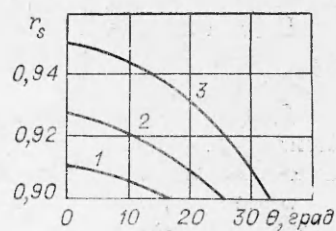


Полученное решение удовлетворяет точным уравнениям теории идеальной пластичности в пластической области и точным уравнениям теории упругости в упругой области. При этом из-за ограниченного числа приближений краевые условия на наружном контуре и условия сопряжения на упругопластической границе выполняются приближенно.

Следовательно, точность полученного решения можно определить по относительной невязке на упругопластической границе  $1 - \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} / (2K)^{-1}$

и по относительной невязке краевых условий на наружном контуре  $p_v / (2K)^{-1}$ , где  $p_v = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ;  $\sigma = \sigma_r \cos^2(n_2, r) + \sigma_\theta \cos^2(n_2, \theta) + 2\tau_{r\theta} \cos(n_2, r) \cos(n_2, \theta)$ ;  $\tau = (\sigma_\theta - \sigma_r) \cos(n_2, r) \cos(n_2, \theta) + \tau_{r\theta}(\cos^2(n_2, r) - \cos^2(n_2, \theta))$ .

На фиг. 2 представлено положение границы  $L_s$  для трубы с параметрами  $r_1/r_2 = 0,9$ ;  $\delta/r_2 = 0,05$  при  $\varepsilon = 0,13$ ;  $0,22$ ;  $0,29$  (кривые 1—3 соответственно).



Ф и г. 2

Поступила 7 V 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
2. Быковцев Г. И., Зебриков В. П. Упругопластическое кручение эксцентрических труб. — ПМТФ, 1982, № 3.
3. Быковцев Г. И., Зебриков В. П. Применение метода возмущений при расчете эксцентрических труб. — В кн.: Новые конструкции нефтепромысловых труб. Вып. 14. Куйбышев: изд. Всесоюз. научно-исслед. ин-та разработки и эксплуатации нефтепромысловых труб, 1979.
4. Чаплыгин С. А., Аржаников Н. С. К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением. Собр. соч. С. А. Чаплыгина. Т. 3. 1953.
5. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. Л.: Гостехиздат, 1950.

УДК 539.319 (075.8)

#### О ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. Н. Германович, И. Д. Килль  
(Москва)

Последнее время все более широкое распространение получает способ термического разрушения хрупких тел (см., например, [1]). При этом важное место занимает анализ полей напряжений и разрушений области. А так как время разрушения обычно весьма невелико, то получение простых асимптотических выражений для напряжений при малых временах приобретает большое значение. Тем более, что реальный расчет по формулам, выражающим точное решение, как правило, сильно затруднен необходимостью интегрирования для бесконечных областей и суммирования для конечных громоздких выражений, содержащих особенности.

При исследовании термического разрушения с макроскопических позиций критериев прочности весьма распространена модель упругого полупространства с местным нагревом поверхности [1].

В [2] найден первый член асимптотических разложений температур и напряжений для граничных условий теплопроводности первого рода. Также представляет интерес [1] рассмотрение условий третьего рода.

1. В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  рассмотрим упругое полупространство  $z \geq 0$ , на границе которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой  $z < 0$ . Температура среды  $\Theta = \Theta_0 f(r)$ , где область значений  $f(r)$  — отрезок  $[0, 1]$ . Требуется найти температуру и напряжения внутри упругого полупространства, начальная температура которого  $T = 0$ .

В [3] эта задача решена при

$$(1.1) \quad f(r) = \exp(-r^2/4\delta) \quad (\delta = \text{const}).$$

Точное решение при малых временах затем представлено в виде сходящихся рядов. Заменяя ряды конечными суммами, автор получил приближенное решение, погрешность которого не была определена.

В данной работе точные и приближенные решения [3] обобщаются для некоторых классов функций  $f(r)$ . При этом проводится оценка точности приближений.

2. Краевую задачу теплопроводности

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial T/\partial t &= a\Delta T, \quad T|_{t=0} = 0, \\ \partial T/\partial z|_{z=0} &= h(T|_{z=0} - \Theta), \quad T_{z=\infty} = T_{r=\infty} = 0 \end{aligned}$$

удобно привести к безразмерным величинам, положив

$$(2.2) \quad \Theta' = \Theta/\Theta_0, \quad T' = T/\Theta_0, \quad z' = z/\sqrt{\delta}, \quad h' = h\sqrt{\delta}, \quad t' = at/\delta,$$

где  $\sqrt{\delta}$  — некоторый характерный размер, как, например, в (1.1). Тогда, опуская в (2.2) для краткости штрихи, запишем (2.1) в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \partial T/\partial t &= \Delta T, \quad T|_{t=0} = 0, \\ \partial T/\partial z &= h(T|_{z=0} - f(r)), \quad T_{z=\infty} = T_{r=\infty} = 0. \end{aligned}$$

Применяя к (2.3) преобразование Лапласа по  $t$ , получим

$$(2.4) \quad sT^* = \Delta T^*, \quad \partial T^*/\partial z = h(T^*|_{z=0} - f(r)/s) \quad (T^* = L_s[T]),$$

где  $L_s$  — оператор преобразования Лапласа с параметром  $s$ .

В свою очередь к (2.4) применим преобразование Ганкеля нулевого порядка по  $r$ . Имеем

$$(2.5) \quad d^2\tilde{T}^*/dz^2 = (s + \lambda^2)\tilde{T}^*, \quad d\tilde{T}^*/dz|_{z=0} = h(\tilde{T}^*|_{z=0} - \tilde{f}(\lambda)/s),$$

где  $\tilde{T}^* = H_\lambda[T^*]$ ;  $H_\lambda$  — оператор преобразования Ганкеля с параметром  $\lambda$ :

$$(2.6) \quad \tilde{f}(\lambda) = H_\lambda[f(r)] = \int_0^\infty r f(r) J_0(\lambda r) dr.$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (2.5) и обращая преобразование Ганкеля, найдем

$$(2.7) \quad T^* = \int_0^\infty \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{i e^{-z\sqrt{s+\lambda^2}}}{s(\sqrt{s+\lambda^2} + h)} d\lambda.$$

Подставляя (1.1) при  $\delta = 1$ , что соответствует безразмерным координатам, в (2.6), получим [4]

$$(2.8) \quad \tilde{f}(\lambda) = 2 \exp(-\lambda^2).$$

Тогда (2.7) совпадает с выражением из [3]. Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения оригинала температуры, лапласовых изображений и оригиналов напряжений в общем случае. Они получаются из найденных в [3] формальной заменой (2.8). Эти формулы здесь не приводятся вследствие невысокой практической ценности, так как требуют вычисления несобственных интегралов от громоздких выражений, содержащих устранимые особенности.

Отметим, что для существования прямого и обратного преобразования Ганкеля достаточно, чтобы  $f(r)$  была функцией ограниченной вариации и интегрируема на полупрямой  $[0, \infty)$  [5].

Иной метод получения точного решения описан в [2]. Однако и он приводит к соотношениям, в полной мере обладающим описанными выше недостатками. Поэтому в [6] показана асимптотика при  $t \rightarrow 0$  для случая задания температуры на границе полупространства.

Сходимость интегралов, через которые выражается точное решение, подлежит проверке. Такая проверка проведена во всех приводимых ниже примерах.

3. В дальнейшем ограничимся функциями  $f(r)$ , для которых интегралы

$$A_{ij}(r) = \int_0^{\infty} \lambda^i \tilde{f}(\lambda) J_j(\lambda r) d\lambda, \quad B_{ij}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda^i \tilde{f}(\lambda) J_j(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

сходятся при  $i = 1, 2, \dots, j = 0, 1$ . Для этих функций при малых  $t$  удастся получить приближенное решение, более удобное для расчетов, чем точное.

Обозначим через  $L_t^{-1}$  оператор, обратный к  $L_s$ . Здесь  $t$  указывает аргумент оригинала. Тогда из (2.7) имеем

$$T = \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} L_{\tau}^{-1} \left[ \frac{he^{-z\sqrt{s}}}{\sqrt{s} + h} \right] d\tau,$$

откуда, полагая

$$f_m(z, t) = L_t^{-1} \left[ \frac{he^{-z\sqrt{s}}}{(\sqrt{s} + h) s^m} \right] \quad (m = 0, 1, \dots),$$

по формуле Тейлора найдем

$$(3.1) \quad T = \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^t \left[ \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{\lambda^{2n} \tau^n}{n!} f_0(z, t) + \right. \\ \left. + (-1)^{N+1} \frac{\lambda^{2N+3} \tau^{N+1}}{(N+1)!} f_0(z, t) e^{-\lambda^2 \xi} \right] d\tau \quad (0 < \xi < \tau).$$

Воспользовавшись очевидным равенством

$$\int_0^t f_k(z, \tau) d\tau = f_{k+1}(z, t) \quad (k = 0, 1, \dots),$$

можно доказать методом индукции, что

$$\varphi_n(z, t) = (-1)^n \int_0^t f_0(z, \tau) \tau^n d\tau = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+n} n!}{(n-k)!} f_{k+1}(z, t) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

откуда и из ограниченности  $f_0(z, \tau)$  (см. [7]) следует

$$\varphi_n = o(t^{n+1}) \quad (t \rightarrow 0).$$

Интегрируя (3.1) почленно, получим

$$(3.2) \quad T = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{(n-k)!} A_{2n+1,0}(r) t^{n-k} f_{k+1}(z, t) + T^{(N)},$$

где

$$(3.3) \quad T^{(N)} = \frac{\varphi_{N+1}(z, t)}{(N+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2N+3} \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda^2 \xi} d\lambda.$$

Из (3.3) видно, что  $T^{(N)} = O(\varphi_{N+1}) (t \rightarrow 0)$ . Кроме того, можно показать, что  $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n) (t \rightarrow 0)$ . Поэтому (3.2) дает асимптотическое разложение по системе функций  $\{\varphi_n\}$  при  $t \rightarrow 0$ .

Аналогично находятся асимптотические разложения для напряжений. Окончательный ответ имеет вид

$$(3.4) \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{(n-k)!} A_{2n+1,0}(r) t^{n-k} f_{k+1}(z, t),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & -T + \text{th} \{ [B_{21}(r, z)z - 2(1-\mu)B_{11}(r, z)]/r - B_{30}(r, z)z + 2B_{20}(r, z) \} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+n+k}}{(n-k-m)!} t^{n-k-m} \{ (A_{2n+2,1}(r)/r - A_{2n+3,0}(r)) f_{k+m+2}(z, t) - \\
& - [ (B_{2n+3,1}(r, z)z + B_{2n+2,1}(r, z)(hz-1) - 2hB_{2n+1,1}(r, z))/r - \\
& - B_{2n+4,0}(r, z)z - B_{2n+3,0}(r, z)(hz-1) + 2hB_{2n+2,0}(r, z) + \\
& + 2\mu(B_{2n+2,1}(r, z) + hB_{2n+1,1}(r, z))/r ] f_{k+m+2}(0, t) \}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} = & -T + \text{th} \{ [-B_{21}(r, z)z + 2(1-\mu)B_{11}(r, z)]/r + 2\mu B_{20}(r, z) \} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{n+k+m}}{(n-k-m)!} t^{n-k-m} \{ -A_{2n+2,1}(r)/r f_{k+m+2}(z, t) + \\
& + [2\mu(B_{2n+2,1}(r, z) + hB_{2n+1,1}(r, z))/r - B_{2n+3,0}(r, z) - hB_{2n+2,0}(r, z) + \\
& + (B_{2n+2,1}(r, z)[hz-1] + B_{2n+3,1}(r, z)z - 2hB_{2n+1,1}(r, z))/r ] f_{k+m+2}(0, t) \}, \\
\sigma_{zz} = & \text{th} B_{30}(r, z) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} t^{n-k-m} \{ A_{2n+3,0}(r) f_{k+m+2}(z, t) - \\
& - [B_{2n+4,0}(r, z)z + B_{2n+3,0}(r, z)(1+hz)] f_{k+m+2}(0, t) \}, \\
\sigma_{rz} = & [B_{31}(r, z)z - B_{21}(r, z)] \text{th} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} t^{n-k-m} \times \\
& \times \{ hA_{2n+2,1}(r) [\psi_{k+m+2}(z, t) - f_{k+m+2}(z, t)] - [B_{2n+3,1}(r, z)hz - \\
& - B_{2n+2,1}(r, z)h + B_{2n+4,1}(r, z)z] f_{k+m+2}(0, t) \},
\end{aligned}$$

где

$$(3.5) \quad \psi_m(z, t) = L_t^{-1} \left[ \frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s^m} \right] \quad (m = 2, 3, \dots),$$

и на основании формул [4, 7] можно показать, что

$$\psi_m(z, t) = \frac{(2t)^{m-1}}{(2m-2)!} e^{-\frac{z^2}{4t}} \left[ \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} \text{erfc} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_{x=\frac{z}{2\sqrt{t}}},$$

$$f_m(z, t) = \frac{1}{h^2} f_{m-1}(z, t) + \psi_m(z, t) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} \psi_m(z, t) \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$f_0(z, t) = \frac{h}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} - h e^{h^2 t + hz} \text{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{t}} + h\sqrt{t} \right).$$

Переход от безразмерных напряжений к размерным осуществляется умножением на  $D = \alpha E \Theta_0 (1 - \mu)^{-1}$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения.

Погрешность, которую дают асимптотические формулы (3.4), можно определить, оценивая (3.3) и аналогичные интегралы для напряжений (см. ниже).

4. Рассмотрим примеры. Пусть в размерных и безразмерных координатах соответственно

$$(4.1) \quad f(r) = \delta^3 / \sqrt{(r^2 + \delta^2)^3}, \quad f(r) = 1 / \sqrt{(r^2 + 1)^3}.$$

На основании соотношений из [4] найдем

$$(4.2) \quad \tilde{f}(\lambda) = e^{-\lambda}, \quad A_{ij} = F_{ij}(1), \quad B_{ij} = F_{ij}(1+z), \\ F_{ij}(x) = (-1)^i r^{-j} \frac{d^i}{dx^i} \left[ \frac{(\sqrt{x^2 + r^2} - x)^j}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right].$$

Так как  $f_0 = \partial f_1 / \partial t$ , а  $f_1(z, t)$  — решение задачи теплопроводности для полуограниченного стержня первоначально нулевой температуры с теплообменом по закону Ньютона со средой единичной температуры на конце [8], то

$$(4.3) \quad f_0(z, t) \geq 0, \quad 0 \leq f_1(z, t) \leq 1.$$

Используя (4.3), получим оценку погрешности, которую дают (3.4), если оставить  $N + 1$  членов ряда ( $N$ -приближение):

$$T^{(N)} \leq \frac{(2N+3)!}{(N+1)!} t^{N+1} f_1(z, t), \quad |\sigma_{rr}^{(N)}| \leq \frac{(2N+4)!}{(N+1)!} (2N+5+h) \times \\ \times \left( \frac{7}{4} + \frac{1}{2e} \right) t^{N+2} f_1(0, t),$$

$$|\sigma_{\varphi\varphi}^{(N)}| \leq \frac{(2N+4)!}{(N+1)!} (2N+5+h) \left( 2 + \frac{3}{4e} \right) t^{N+2} f_1(0, t),$$

$$|\sigma_{zz}^{(N)}| \leq \frac{(2N+4)!}{(N+1)!} \left( 4N+10 + \frac{h}{e} \right) t^{N+2} f_1(0, t),$$

$$|\sigma_{rz}^{(N)}| \leq \frac{(2N+4)!}{(N+1)!} [h + (2N+5+2h) f_1(0, t)] \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для гауссова распределения (1.1) коэффициенты  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  не удается выразить через табулированные функции, однако асимптотические ряды (3.4) становятся сходящимися, и оценка приближений становится значительно лучше:

$$|T^{(N)}| \leq t^{N+1} f_1(z, t), \quad |\sigma_{rr}^{(N)}| \leq (N+2)(h+1) \left( \frac{7}{4} + \frac{1}{2e} \right) t^{N+2} f_1(0, t),$$

$$|\sigma_{\varphi\varphi}^{(N)}| \leq (N+2)(h+1) \left( 2 + \frac{3}{4e} \right) t^{N+2} f_1(0, t), \quad |\sigma_{zz}^{(N)}| \leq (N+2) \left( 2 + \frac{h}{e} \right) \times \\ \times t^{N+2} f_1(0, t), \quad |\sigma_{rz}^{(N)}| \leq (N+2) [h + (2h+4) f_1(0, t)] t^{N+2} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Кроме того, интегралы в выражениях  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  сходятся очень быстро благодаря гауссовой экспоненте в подынтегральных выражениях. Поэтому их расчет хотя и сложнее, чем по формулам (4.2), но все же не представляет особых затруднений.

Заметим, что расчет напряжений по формулам (3.9) для «куполообразной» функции Тередзава [9] так же прост, как и для (4.1), поскольку и в этом случае коэффициенты  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  выражаются через элементарные функции.

Вычисления показывают, что при  $h < 50$  и  $t < 0,01$  нулевые приближения для (1.1), (4.1) дают погрешность в несколько процентов. Результаты для  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{rz}$  совпадают с результатами [3]. Однако  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  оказываются сжимаемыми лишь при малых, а не при всех, как это получено в [3], значениях  $z$ . Это объясняется менее удачным выбором системы функций  $\{\varphi_n\}$  в [3]. Система  $\{\varphi_n\}$ , использованная в данной работе, дает меньшую погрешность приближений и позволяет более точно выяснить характер напряжений.

Поступила 30 X 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев А. П., Гончаров С. А. Термическое и комбинированное разрушение горных пород. М.: Недра, 1978.
2. Дудолов Л. С. О температурных напряжениях в упругом полупространстве. — ФТПРПИ, 1968, № 1.
3. Киль И. Д. О термоупругих напряжениях внутри полупространства. — МТТ, 1966, № 1.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Наука, 1971.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
6. Дудолодов Л. С. О термическом разрушении горных пород. — ФТППИ, 1969, № 2.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

УДК 539.374

## ОДИН КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

А. И. Димов, А. Ф. Ревуженко  
(Новосибирск)

Сыпучая среда отличается от идеально пластической наличием внутреннего трения. В предельном состоянии наибольшее касательное напряжение  $\tau$  связано с нормальным напряжением условием Кулона

$$(1) \quad \tau = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \rho + k \cos \rho,$$

где  $\rho$  — угол внутреннего трения;  $k$  — сцепление;  $\sigma_1, \sigma_2$  — главные напряжения. Условие (1) замыкает уравнения равновесия. Это позволяет ставить и решать статически определимые задачи. Идеально пластическая среда получается как частный случай при  $\rho \rightarrow 0$ . Система уравнений равновесия с (1) принадлежит к гиперболическому типу [1]. Как в любой классической модели, большой интерес представляет поиск точных решений, которые можно представить в замкнутой форме и исследовать до конца. Одним из фундаментальных точных решений является решение типа централизованной волны [1, 2], полученное как предельный случай решений, в которых одно из семейств линий скольжения представляет собой прямые. Посмотрим на это решение с несколько иной точки зрения, а именно: централизованный пучок прямолинейных характеристик будем рассматривать как радиусы полярной системы координат. Тогда решение полностью характеризуется единственным и очень простым условием  $\delta \equiv \pi/2 - \rho = \text{const}$ , где  $\delta$  — угол между линией скольжения и полярным радиусом. Такая интерпретация сразу приводит к идее найти новые решения на пути обобщения условия  $\delta \equiv \pi/2 - \rho = \text{const}$  [3]. Прежде всего необходимо вывести одно уравнение, в котором фигурировал бы только угол  $\delta$ . (По крайней мере, известно, что  $\delta \equiv \pi/2 - \rho$  будет являться точным решением этого уравнения.)

Первый вопрос, который возникает при этом — какие две переменные необходимо взять в качестве независимых? Так как угол  $\delta$  связывает положение линии скольжения и полярного радиуса, то за независимые переменные естественно принять полярные радиус  $r$  и угол  $\theta$ . На этом пути получаются известные точные решения [4]. Другой путь состоит в переходе к характеристическим координатам  $\lambda_1, \lambda_2$  и выводу уравнения относительно  $\delta$  в этих координатах. Замкнутая система в переменных  $\lambda_1, \lambda_2$  имеет вид

$$(2) \quad \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} + 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} - 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} = \text{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \text{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2},$$

где  $\varphi$  — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси  $Ox_1$ ;  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 - k \text{ctg} \rho$ ;  $x_1, x_2$  — декартовы координаты.