

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 535.42; 535.36

Метод физической оптики для решения задачи рассеяния света на кристаллических ледяных частицах: сравнение дифракционных формул

А.В. Коношонкин^{1,2}, Н.В. Кустова², В.А. Осипов^{1,2}, А.Г. Боровой^{1,2},
К. Masuda³, Н. Ishimoto³, Н. Okamoto^{4*}

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

²Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

³Meteorological Research Institute,
Nagamine 1-1, Tsukuba 305-0052, Japan

⁴Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka 816-8580, Japan

Поступила в редакцию 2.06.2015 г.

Рассматривается формулировка метода физической оптики, исходя из уравнений Максвелла. Показана эквивалентность различных определений метода физической оптики. Представлено подробное сравнение трех дифракционных формул, соответствующих E -, M - и (E, M) -теориям дифракции. Установлено, что в случае дифракции на отверстии в плоском экране все три дифракционные формулы дают одинаковое сечение рассеяния для дифракционных углов вплоть до 60° , однако поляризационные элементы матрицы Мюллера существенно расходятся уже для углов порядка $15\text{--}30^\circ$. Также показано, что при дифракции на наклонном экране различие между E -, M - и (E, M) -теориями дифракции проявляется тем сильнее, чем сильнее наклон экрана. Так, при наклоне экрана порядка 80° E -, M -теории дифракции применимы только для очень небольших (порядка 1°) дифракционных углов. Сравнение с точным решением, полученным методом FDTD, подтвердило, что различие между E -, M - и (E, M) -теориями дифракции для дифракции на плоском экране не так существенно, однако для расчетов предпочтительнее использовать (E, M) -теорию дифракции.

Ключевые слова: физическая оптика, алгоритм трассировки пучков, рассеяние света, ледяные кристаллы, FDTD; physical optics approximation, beam-splitting technique, light scattering, ice crystals, FDTD.

Введение

Несмотря на активное развитие приближения физической оптики [1–5], в оптическом международном научном сообществе до сих пор нет единого точного определения этого приближения. Очевидным считается лишь то, что приближение физической оптики по своей сути является расширением приближения геометрической оптики за счет приближенного учета волновых свойств света. При этом не конкретизируется, как именно производится учет волновых свойств света.

В настоящей статье дается формулировка приближения физической оптики непосредственно из уравнений Максвелла. Показана эквивалентность различных трактовок приближения физической оптики.

Проведено численное сравнение различных дифракционных формул как между собой, так и с точным решением, полученным методом FDTD (Finite-difference time-domain).

1. Теоретическая основа метода физической оптики

Рассмотрим задачу рассеяния монохроматической волны на изотропной немагнитной частице в вакууме (магнитная проницаемость всюду равна единице). В этом случае уравнения Максвелла для электрической частицы сводятся к уравнению для электрического поля в векторной форме $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ [6, с. 3; 7, с. 60; 8]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_e(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\nabla \times$ — оператор ротора; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — точка в пространстве; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны в вакууме;

* Александр Владимирович Коношонкин (sasha_tvo@iao.ru); Наталья Валентиновна Кустова (kustova@iao.ru); Виктор Андреевич Осипов; Анатолий Георгиевич Боровой (borovoi@iao.ru); Kazuhiko Masuda; Hiroshi Ishimoto; Hajime Okamoto.

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} k^2[1 - n^2]\mathbf{E}(\mathbf{r}), & \text{внутри частицы,} \\ \mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}) \cdot 4\pi k/c, & \text{вне частицы,} \end{cases} \quad (2)$$

n – показатель преломления частицы; c – скорость света; \mathbf{j}_{ext} – плотность внешних токов, формирующих падающую волну.

Введем аффинорную (dyadic) функцию Грина [9]:

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{\nabla\nabla}{k^2} + \bar{\bar{\mathbf{U}}} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (3)$$

для которой справедливо равенство [6, 10]:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\bar{\mathbf{U}}}, \quad (4)$$

где $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ – единичная диада.

Положим в векторно-аффинорной формуле Грина [10, с. 63]:

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{Q}}} - \bar{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P}) dv = \\ & = - \iint_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{Q}}} + (\nabla \times \mathbf{P}) \times \bar{\bar{\mathbf{Q}}}) \cdot \mathbf{n} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \bar{\bar{\mathbf{Q}}} = \bar{\bar{\mathbf{G}}}: \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}} - \bar{\bar{\mathbf{G}}} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{E}) dv' = \\ & = - \iint_S (\mathbf{E} \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}} + (\nabla' \times \mathbf{E}) \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) \cdot \mathbf{n} ds'. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} – внешняя нормаль.

Подставим в левую часть выражения (6) выражения (1) и (4) и рассмотрим объемный интеграл отдельно:

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot (k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\bar{\mathbf{U}}}) - \\ & - \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot (k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \mathbf{F}_e(\mathbf{r}')) dv' = \\ & = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{U}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' - \int_V \mathbf{F}_e(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' = \\ & = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' - \int_V \mathbf{F}_e(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv'. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\begin{aligned} & \int_V \mathbf{E} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{F}_e \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' - \\ & - \iint_S (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} ds'. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку (8) справедливо для любого объема, примем за объем V все пространство, за исключением частицы (рис. 1). Заметим, что интегрирование ведется по \mathbf{r}' . Пусть \mathbf{r} также находится в объеме V , тогда поверхностный интеграл в (8) разделится на интеграл по внешней поверхности частицы

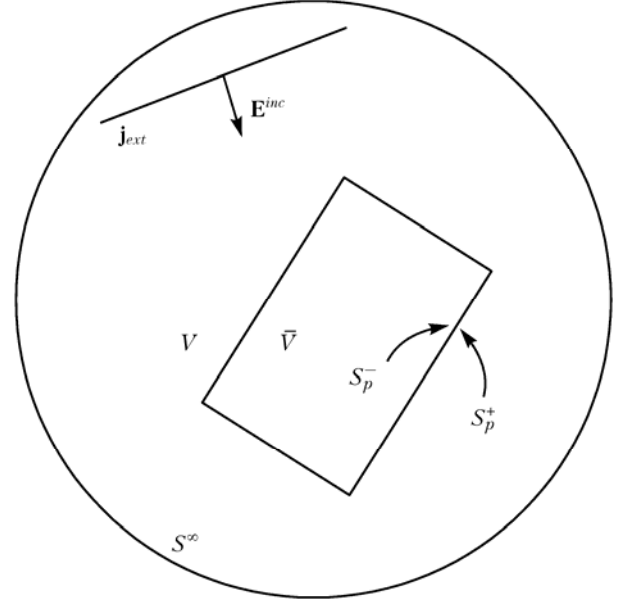


Рис. 1. Рассеяние на частице

и на интеграл по бесконечно удаленной сфере. Так как поле \mathbf{E} и функция Грина удовлетворяют условиям Зоммерфельда на бесконечности [6, 10], то интеграл по бесконечно удаленной сфере равен нулю. В этом случае (8) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{4\pi k}{c} \int_V \mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' + \\ & + \iint_{S_p^+} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} ds'. \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая во внимание, что внешние токи \mathbf{j}_{ext} формируют падающую волну, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \\ & + \iint_{S_p^+} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} ds', \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$ – падающее поле; S_p^+ – внешняя поверхность частицы.

Из выражения (10) видно, что полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ является суммой падающего $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$ и рассеянного $\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r})$ полей:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \\ = \iint_{S_p^+} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} ds'. \end{aligned} \quad (12)$$

Для того чтобы найти рассеянное поле, необходимо знать точное поле на поверхности частицы. Как только поле внутри частицы найдено, решение вне частицы находится из выражения (10).

Приближение физической оптики заключается в том, что поле внутри частицы находится

в приближении геометрической оптики, что возможно, если $\lambda \ll D$, где D – характерный размер частицы. Поле вне частицы строится на его основе из выражения (10). Такое определение физической оптики является универсальным и не затрагивает проблему вычисления выражения (10), которое, в свою очередь, может быть найдено несколькими различными способами.

2. Рассеянное поле

Рассмотрим подробно интеграл, входящий в (10):

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \iint_{S_p^+} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} ds'. \quad (13)$$

В таком виде он встречается в работе [10, с. 63]. Пользуясь тождеством

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad (14)$$

можно переписать (13), например, в виде

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + (\mathbf{n} \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds, \quad (15)$$

в этом же виде $\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r})$ встречается в работах [6, с. 11; 8; 11, гл. 13].

Franz [12] избавляется от аффинов и записывает решение как

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \iint_{S_p^+} G(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) ds' + \nabla \times \iint_{S_p^+} G(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) ds', \quad (16)$$

где G – скалярная функция Грина:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (17)$$

Решение в виде (16) встречается также у Зоммерфельда [13].

Многие авторы (например, [8, 10, 14, 15]) показали, что (13) может быть записано для случая непрерывного поля следующим образом:

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \iint_{S_p^+} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial n} \right) ds'. \quad (18)$$

В свободном пространстве (при отсутствии рассеивающей среды), где (1) имеет вид

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (19)$$

(18) можно переписать в виде [16, 17]:

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \iint_{S_p^+} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial n} \right) ds'. \quad (20)$$

Если поле на поверхности терпит разрыв, то выражение (20) должно иметь вид [18, с. 413]:

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \iint_{S_p^+} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial n} \right) ds' - \iint_C G \mathbf{E} \times d\mathbf{l} - \frac{1}{i\omega\epsilon} \iint_C (\nabla' G) \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad (21)$$

где интегралы по контуру учитывают плотность зарядов, вызванных разрывом поля, и равны нулю, если поле непрерывно. Выражение (21) иногда называют выражением Кирхгофа (см., например, [17]).

Рассеянное поле в виде (21) встречается у многих авторов (например, [16, 17, 19]). Существуют также другие формы записи рассеянного поля: уравнения Стрэттона–Чу (22) [18] и Kottler (23) [20, 21]:

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \iint_{S_p^+} (i\omega\mu G(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla' G + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla' G) ds' + \frac{1}{i\omega\epsilon} \iint_C (\nabla' G) \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad (22)$$

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \iint_{S_p^+} \left(-k^2 G(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - ((\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla') \nabla' G + i\omega\epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla' G \right) ds'. \quad (23)$$

Orfanidis утверждает [17], что все четыре выражения (16), (21)–(23) эквивалентны и могут быть выражены друг через друга.

3. Переход в дальнюю зону

Выражения (16), (21)–(23) существенно упрощаются при переходе в дальнюю зону, когда

$$r \square r', \quad (24)$$

и справедливы следующие приближения:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r - \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}', \quad (25)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-iks \cdot \mathbf{r}'}, \quad (26)$$

$$\nabla' G \approx -iksG, \quad (27)$$

$$\nabla \times \approx iks \times, \quad (28)$$

где \mathbf{s} – единичный вектор направления рассеяния. В этом случае уравнения Franz, Стрэттона–Чу и Kottler примут вид

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(-\eta \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) e^{-iks \cdot \mathbf{r}'} ds' \right) + \right)$$

$$+ \mathbf{s} \times \left[\iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = & ik \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} \left[\iint_{S_p^+} (\eta(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{s} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{s}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' - \right. \\ & \left. - \eta \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} \iint_C e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} \mathbf{s}(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}), \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = & ik \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} \left[\iint_{S_p^+} (\eta(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \eta((\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{s}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{s}((\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})), \quad (32)$$

то (31) совпадает с (29). Выражения (21) и (30) также могут быть приведены к виду (29) (см., например, [16, гл. 10.6]).

Учитывая, что поле в ближней зоне находится в рамках геометрической оптики, т.е. выходящие из частицы волны плоскопараллельны, то магнитное поле может быть легко выражено через электрическое:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{r}_b \times \mathbf{E}, \quad (33)$$

где \mathbf{r}_b — направление распространения вышедшей плоскопараллельной волны. В этом случае (29) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = & ik \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} \left(-\mathbf{s} \times \left[\mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times (\mathbf{r}_b \times \mathbf{E})) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right] + \right. \\ & \left. + \mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right). \quad (34) \end{aligned}$$

Далее будем называть (34) приближением Кирхгофа.

Подведем итог: строгое решение задачи рассеяния подразумевает нахождение точного поля внутри частицы, после чего поле вне частицы строится на его основе интегрированием поля по поверхности частицы согласно (11), (12). В настоящее время в литературе наиболее часто встречаются четыре формулы, позволяющие найти рассеянное поле: Кирхгофа, Franz, Стрэттона—Чу и Kottler, все они эквивалентны, а в дальней зоне тождественны. Эти выражения могут быть получены не только прямым интегрированием уравнений Максвелла по объему частицы, но и при помощи принципа эквивалентности Шелкунова [22, 23]. В случае, когда интегрирование производится по отверстию в экране, а решение ищется в дальней зоне, выражения (29)–(31)

есть не что иное, как дифракционные формулы [16, гл. 10.6].

Таким образом, приближение физической оптики можно, с одной стороны, трактовать как решение уравнений Максвелла для задачи рассеяния на частице, поле внутри которой находится приближенно методом геометрической оптики [4, 16]. С другой стороны, можно говорить, что метод физической оптики является развитием приближения геометрической оптики, когда на выходе из частицы геометрооптическая волна испытывает дифракцию [3, 24]. Обе эти интерпретации приводят к вычислению одних и тех же интегралов по поверхности, и неправильно утверждать, что какой-то из этих подходов лучше.

4. Три дифракционные формулы

Если внимательно посмотреть на интеграл (29), то можно заметить, что он требует задания тангенциальных компонент как электрического, так и магнитного полей. Вообще говоря, такие граничные условия являются избыточными, и задача, строго говоря, поставлена некорректно (см., например, [6, с. 207]). Выбирая аффинорную функцию Грина так, чтобы либо она, либо ее ротор обращались в нуль на поверхности:

$$\overline{\mathbf{G}}_I|_S = 0, \quad \nabla' \times \overline{\mathbf{G}}_I|_S = 2\nabla' \times \overline{\mathbf{G}}|_S, \quad (35)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_{II}|_S = 2\overline{\mathbf{G}}|_S, \quad \nabla' \times \overline{\mathbf{G}}_{II}|_S = 0, \quad (36)$$

можно оставить только одно из слагаемых в уравнениях (13), (15) [6]:

$$\mathbf{E}_I^{sct}(\mathbf{r}) = 2 \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) d\mathbf{s}', \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{II}^{sct}(\mathbf{r}) = & 2 \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{s}' = \\ & = 2i\omega\mu \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{s}'. \quad (38) \end{aligned}$$

Видно, что

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_I^{sct}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{II}^{sct}(\mathbf{r})}{2}. \quad (39)$$

Принято называть (37) E -теорией дифракции, (38) — M -теорией дифракции, (15) — (E, M) -теорией дифракции [25], которые приводят к выражениям

$$\mathbf{E}_I^{sct}(\mathbf{r}) = ik \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2\pi r} \mathbf{s} \times \left[\iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right], \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{II}^{sct}(\mathbf{r}) = & \\ = & -ik \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2\pi r} \mathbf{s} \times \left[\mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times (\mathbf{r}_b \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'))) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{s}' \right], \quad (41) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}^{sct}(\mathbf{r}) = ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(-\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times (\mathbf{r}_b \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}'} ds' \right) + \mathbf{s} \times \iint_{S_p^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}'} ds' \right) \quad (42)$$

соответственно. Первые два выражения имеют математически корректную постановку, тогда как последнее, строго говоря, соответствует иной задаче – задаче с разрывом. Решение в виде (40) активно использовалось в [3, 6, 16], а в виде (42) – в [4, 23, 26].

5. Сравнение численного решения, полученного различными дифракционными формулами

Метод физической оптики реализован авторами статьи на основе алгоритма трассировки пучков, позволяющего получить поле внутри кристалла в приближении геометрической оптики. Описание алгоритма трассировки пучков подробно изложено в [27, 28]. Библиотека алгоритма трассировки пучков в рамках физической оптики доступна по ссылке [29]. Она отличается от описанной в статьях [27, 28] библиотеки только наличием рассмотренных в настоящей статье дифракционных формул.

Проведем сравнение трех дифракционных формул (40)–(42). В качестве тестовой задачи рассмотрим плоскопараллельную волну, выходящую из гексагональной грани ледяного кристалла. Математическая постановка в данном случае эквивалентна дифракции на плоском экране с гексагональным отверстием (рис. 2), поэтому в дальнейшем не будем делать различия между дифракцией на отверстии в экране и выходом плоскопараллельной волны из грани кристалла.

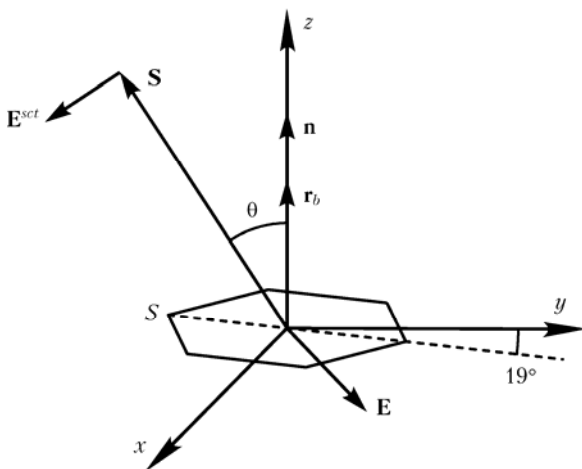


Рис. 2. Дифракция на плоском экране

Нами проводилось большое количество расчетов для различных размеров и форм отверстия, а также для различных случаев положения вектора поляризации падающей волны относительно отверстия. Далее в качестве иллюстрации будут представлены только пограничные случаи, позволяющие сформулировать основные закономерности.

Пусть плоскопараллельная волна единичной интенсивности \mathbf{E} , распространяющаяся в направлении \mathbf{r}_b , падает на гексагональное отверстие S с единичной нормалью \mathbf{n} . Будем искать рассеянное поле \mathbf{E}^{sct} в направлении \mathbf{s} . Предположим, что волна падает на отверстие нормально: $\mathbf{n} = \mathbf{r}_b$. Диаметр отверстия 10 мкм, длина волны падающего света 0,532 мкм. Для избавления от симметрии частица повернута на 19° . В данном случае матрица рассеяния имеет вид

$$\mathbf{M} = M_{11} \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 3.

Из расчетов следует, что элемент M_{11} матрицы рассеяния, полученный по формулам (40) и (41), хорошо совпадает с элементом M_{11} , найденным по формуле (42) в диапазоне углов от 0 до 60° . Также хорошо видно, что решения интегралов (40) и (41) симметричны относительно плоскости экрана (точки 90°), поскольку используемая при их получении функция Грина построена методом «отражения», и как следствие построение решения по формулам (40) и (41) возможно только в полупространстве «за экраном». Стоит отметить, что в рассматриваемом случае все три дифракционные формулы удовлетворяют закону сохранения энергии, если решение (40) и (41) ограничить только полупространством «за экраном».

Расчеты также показывают, что элементы матрицы рассеяния m_{12} и m_{33} начинают расходиться гораздо быстрее. Так, элемент m_{33} хорошо совпадает в области от 0 до 30° , а элемент m_{12} – только в области от 0 до 15° . Отметим, что в качестве примера приведено решение для отверстия 10 мкм, при этом увеличение отверстия приведет к изменению только элемента M_{11} таким образом, что размер дифракционных колец будет уменьшаться. Следовательно, для отверстий больше 10 мкм в пределах первых пяти дифракционных колец все три формулы совпадают с хорошей точностью.

Рассмотрим случай наклонного падения света на экран (рис. 4). Пусть плоскопараллельная волна единичной интенсивности \mathbf{E} , распространяющаяся в направлении \mathbf{r}_b , падает под углом β на гексагональное отверстие S с нормалью \mathbf{n} . Будем искать рассеянное поле \mathbf{E}^{sct} в направлении \mathbf{s} . Диаметр отверстия 10 мкм, длина волны падающего света 0,532 мкм.

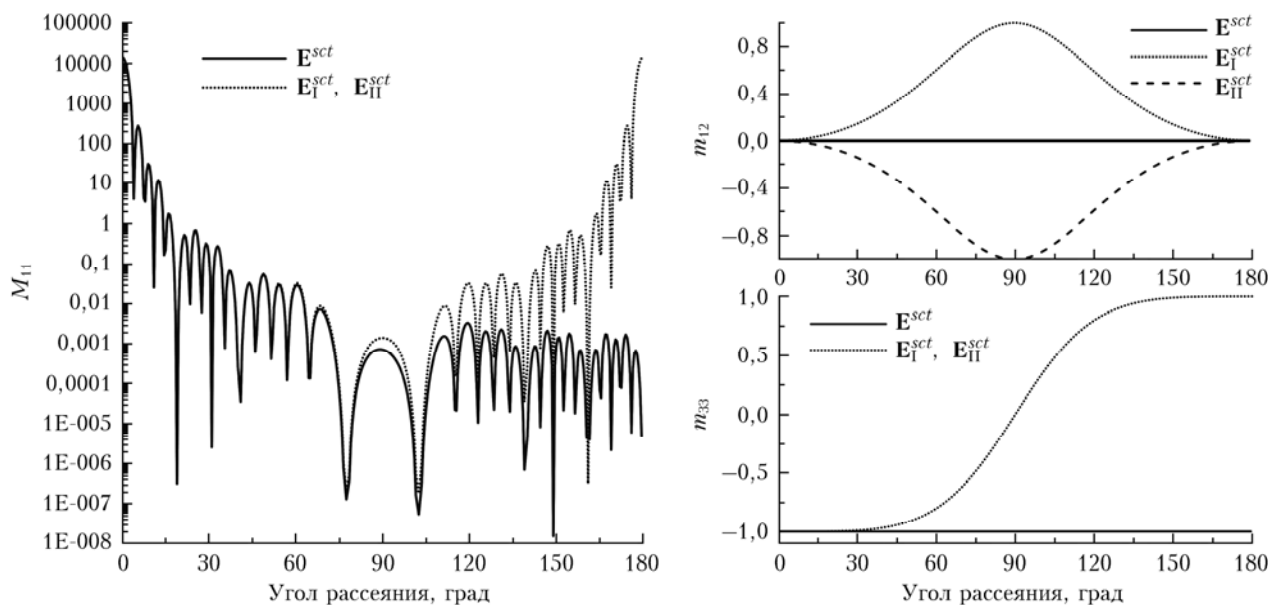


Рис. 3. Элементы матрицы Мюллера в зависимости от угла рассеяния в плоскости xOz

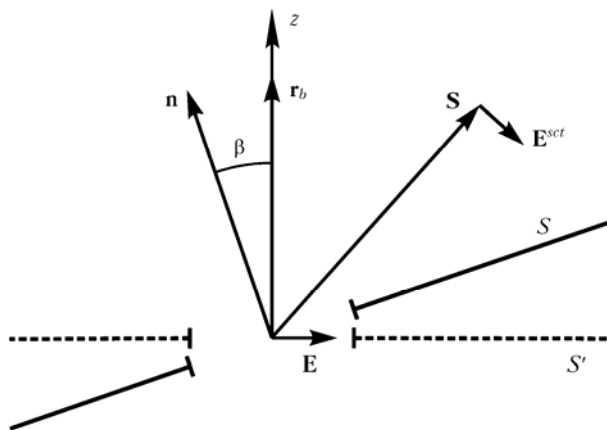


Рис. 4. Дифракция на наклонном экране

В данном случае полезно также рассмотреть решение, полученное на мнимом экране с отверстием S' , перпендикулярном распространению падающей волны. При этом отверстие S' получено проецированием отверстия S на мнимый экран. Обозначим такое решение E_{\perp}^{sct} . Решения для интенсивности, полученные по всей сфере направлений рассеяния, представлены на рис. 5. Поскольку элемент M_{11} для E_{II}^{sct} визуально не отличается от элемента M_{11} для E_I^{sct} , то приведен только последний. На рис. 6 представлен элемент M_{11} в плоскости xOz ($\varphi = 0$).

Анализ решений показал, что элемент M_{11} для всех решений очень хорошо согласуется при малых углах дифракции и существенно отличается при углах дифракции, близких к 180° . Видно, что E_I^{sct} и E_{II}^{sct} создают ложный дифракционный максимум как зеркальное отражение существующего, и, следовательно, решение должно быть обрезано, как указано на рис. 5, *з*. На рис. 6, *б* обрезка должна происхо-

дить в точках -70 и 110° . В местах обрезки значение функции скачком обращается в нуль, что может быть несущественно при углах падения света на экран, близких к 90° , но существенно для малых углов падения. Решение E_{\perp}^{sct} производит ложный дифракционный максимум в области 180° , и должно быть обрезано в точках -90 и 90° (рис. 6, *а*).

Матрица Мюллера в случае наклонного падения также имеет вид (43), элементы m_{12} и m_{33} которой представлены на рис. 7.

Видно, что поляризационные элементы в случае наклонного падения расходятся быстрее, однако в направлении выхода пучка все четыре решения совпадают. При дифракции под углами меньше 10° отличие в элементах m_{12} и m_{33} составило не более 8 и 2% соответственно.

При падении света под острым углом различия в решениях проявляются намного существеннее. На рис. 8 и 9 представлено решение при угле падения 80° для отверстия диаметром 30 мкм.

Видно, что формулы для E_I^{sct} и E_{II}^{sct} плохо применимы для угла наклона 80° , так как должны быть обрезаны в точках -10 и 170° . При этом в точке -10° сечение рассеяния скачком меняется от 1000 мкм^2 до нуля. Поляризационные элементы m_{12} и m_{33} испытывают сильные изменения в окрестности первого дифракционного кольца. При этом стоит отметить, что E_{\perp}^{sct} и E^{sct} демонстрируют относительное согласие в пределах первых трех дифракционных колец.

Рассмотренные выше примеры описывают задачу дифракции одного оптического пучка, однако в решении задачи рассеяния, как правило, образуется большое количество пучков, которые интерферируют между собой. Рассмотрим когерентное сложение пучков на примере пары сопряженных косых пучков, подробно описанных в [30, 31].

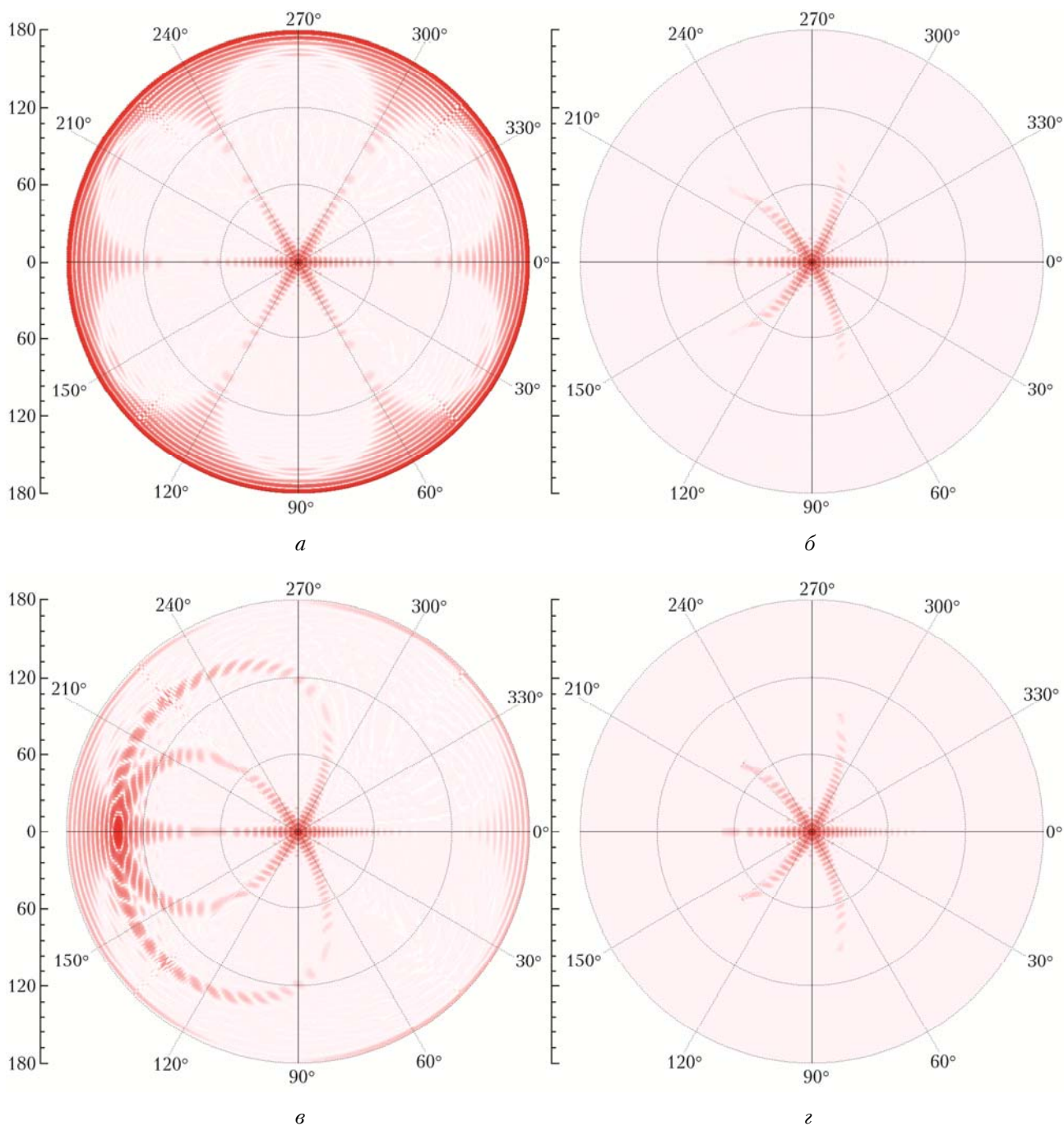


Рис. 5. Интенсивность дифрагированного света по всей сфере направлений рассеяния для наклонного экрана. Угол наклона 20° ; *a* – решение для E_{\perp}^{sct} ; *б* – E^{sct} ; *в* – E_{\parallel}^{sct} ; *г* – E_{\perp}^{sct} , рассчитанное только в области «за экраном»

В качестве тестовой задачи рассматривался гексагональный ледяной столбик диаметром 30 мкм и высотой 75 мкм. Ориентация частицы задавалась углами Эйлера. Угол наклона частицы β равен 45° , угол поворота частицы относительно оси симметрии $\gamma = 0$ и 10° . Проведено равномерное усреднение по углу α . В данном случае матрица имеет несколько ненулевых элементов, в качестве примера приведены M_{11} , m_{12} и m_{33} (рис. 10 и 11).

Видно, что когда дифракционный максимум выходит строго в направлении рассеяния назад (рис. 10), все формулы удовлетворительно совпадают в пределах первых трех дифракционных колец. При этом если дифракционный максимум проходит мимо направления рассеяния назад, формулы также соотносятся в пределах первых трех колец, однако в важной для задач лидарного зондирования точке рассеяния 0° все четыре формулы существенно расходятся.

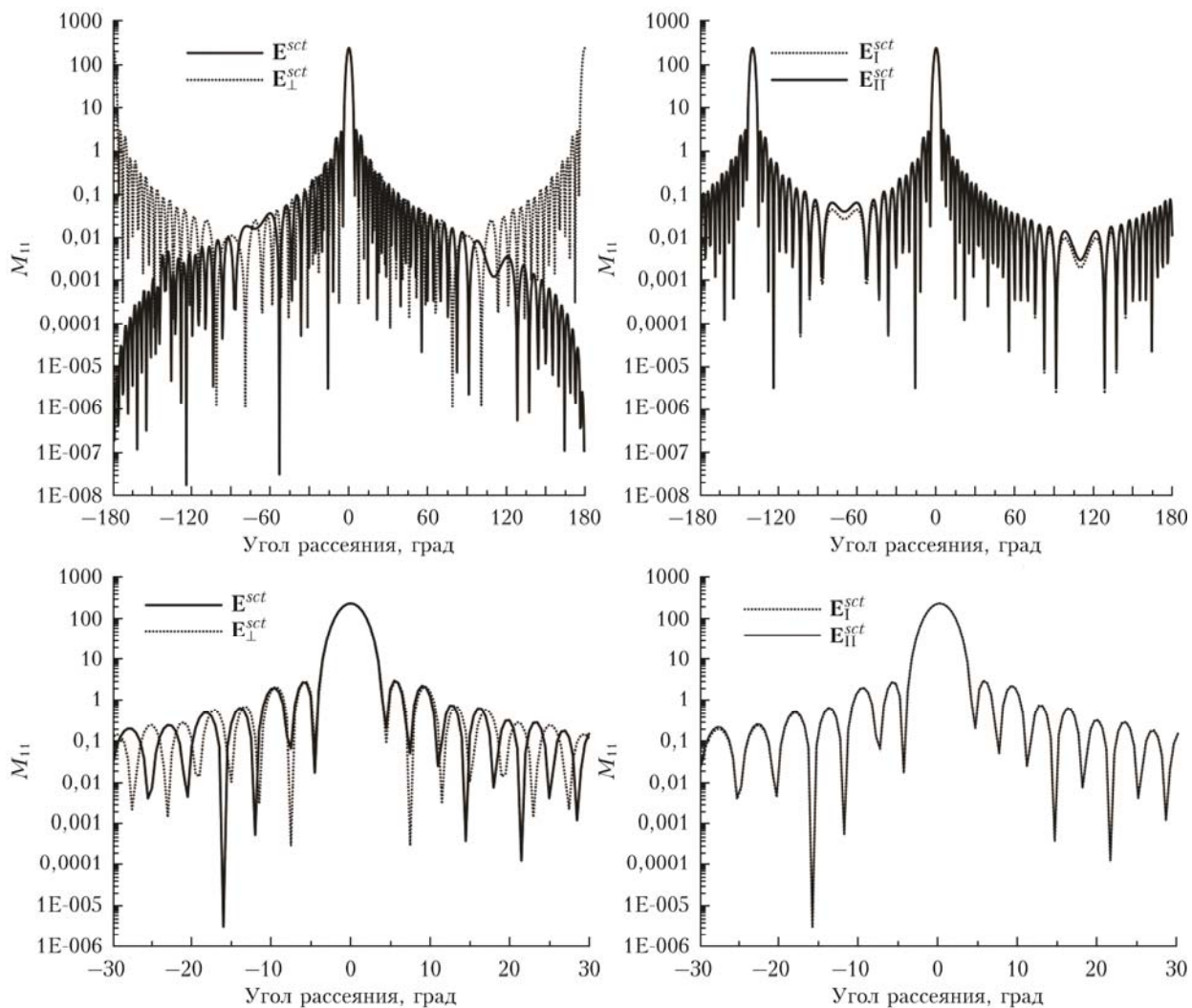


Рис. 6. Интенсивность дифрагированного света в плоскости xOz . Угол наклона 20°

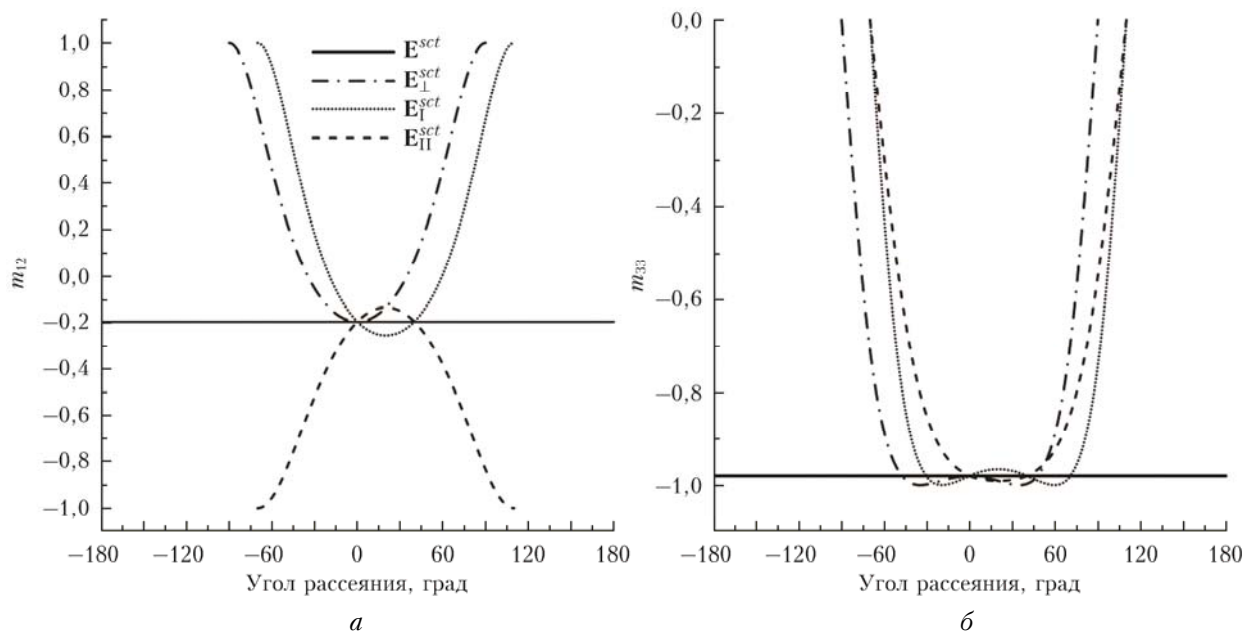


Рис. 7. Элементы матрицы Мюллера для дифракции на наклонном экране. Угол наклона 20° ; а – m_{12} ; б – m_{33}

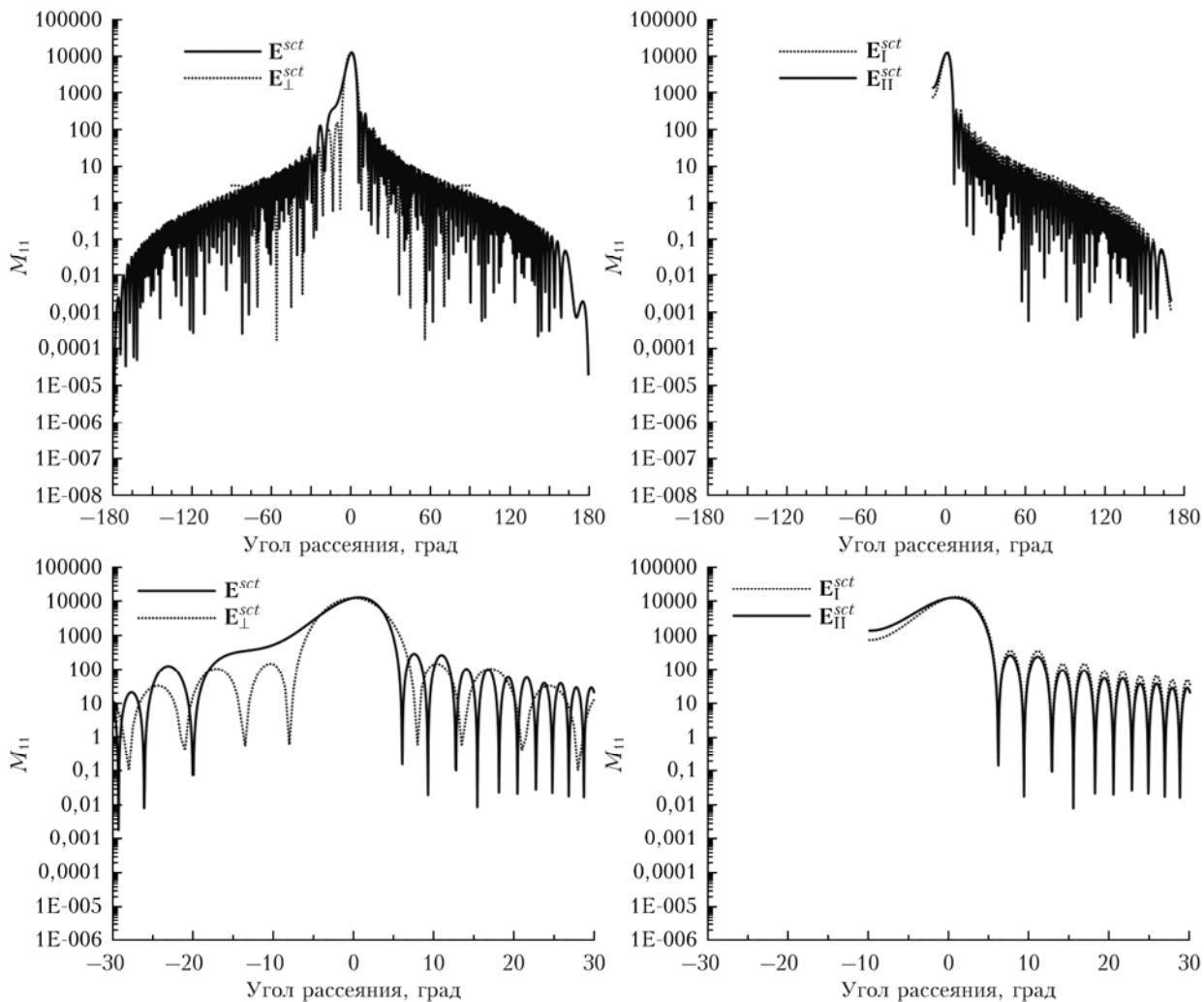


Рис. 8. Интенсивность дифрагированного света в плоскости xOz для наклонного экрана. Угол наклона 80°

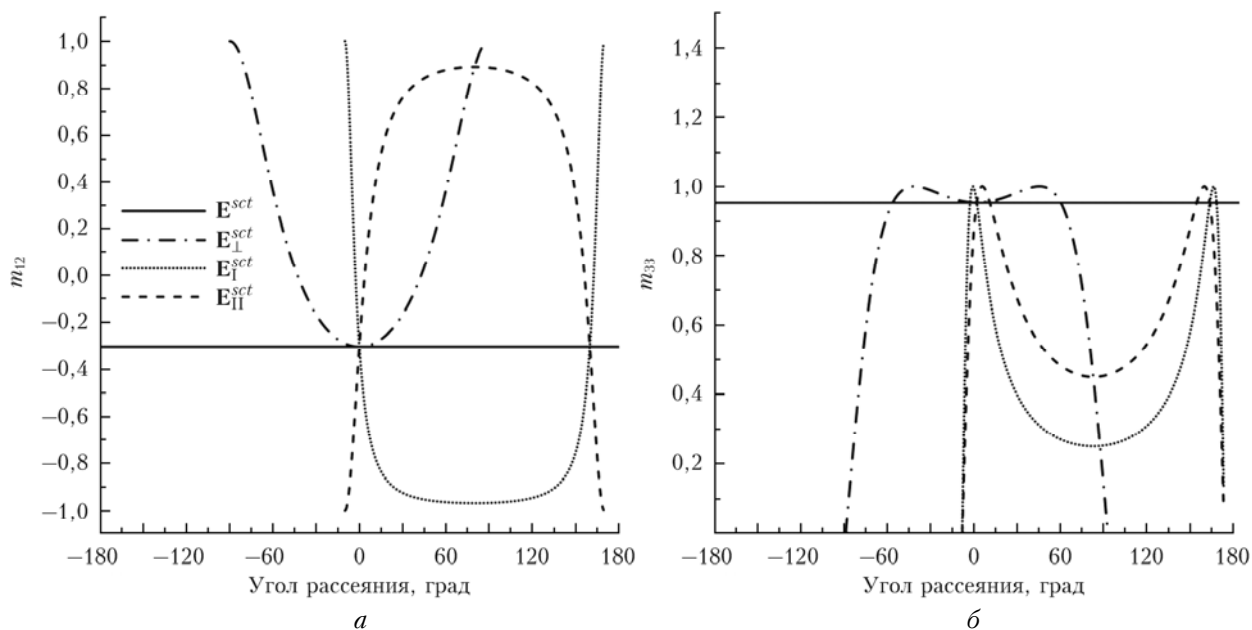


Рис. 9. Элементы матрицы Мюллера для дифракции на наклонном экране. Угол наклона 80° ; $a - m_{12}$; $b - m_{33}$

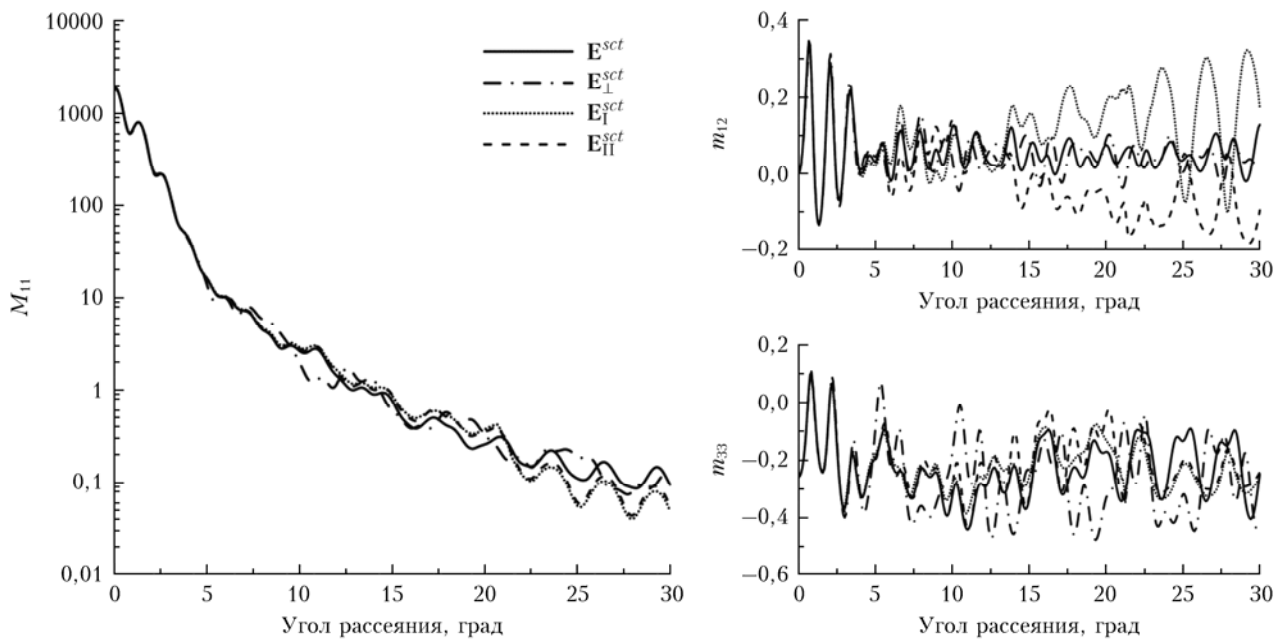


Рис. 10. Элементы матрицы Мюллера для одной пары сопряженных пучков. Угол поворота частицы относительно оси симметрии $\gamma = 0$

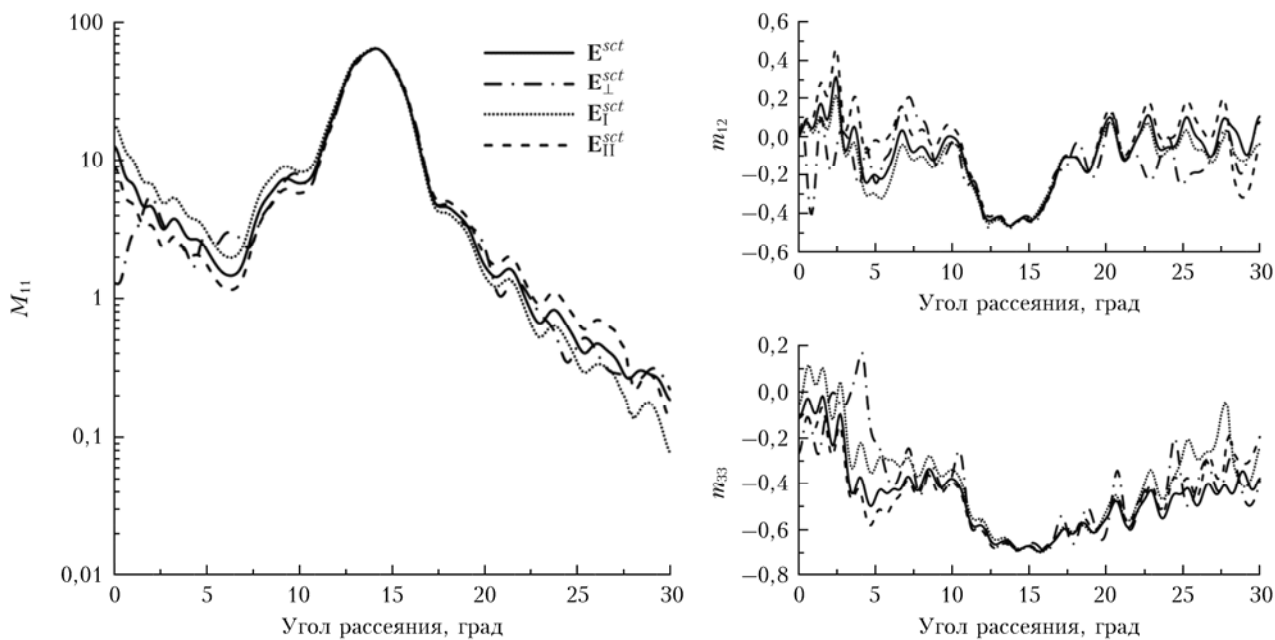


Рис. 11. Элементы матрицы Мюллера для одной пары сопряженных пучков. Угол поворота частицы относительно оси симметрии $\gamma = 10$

6. Сравнение матрицы Мюллера с точным решением, полученным методом FDTD

Метод физической оптики является по своей сути приближенным, поэтому нуждается в апробации [32]. Его сравнение с точным решением затруднено, поскольку получение точного решения уравнений Максвелла для такого рода задачи требует

больших вычислительных ресурсов. Эти требования существенно увеличиваются с ростом размеров частицы. Используя разработанный в Японии алгоритм FDTD, нам удалось получить решение для задачи рассеяния света на гексагональной ледяной пластинке диаметром 10 мкм, высотой 5,79 мкм. Предполагалось, что на пластинку со стороны шестиугольной грани падает свет под прямым углом. Решение строилось по всей сфере направлений рассеяния, затем проводилось равномерное усреднение по азимутальному

углу. Показатель преломления принимался равным 1,3116 при длине волны падающего света 0,532 мкм. Ввиду ресурсоемкости задачи точное решение находилось с достаточно грубой сеткой в 1° .

Результаты сравнения представлены на рис. 12. Видно, что в направлении рассеяния вперед интенсивность рассеянного света совпадает в пределах первых пяти дифракционных колец, а в направлении назад — в пределах первых трех дифракционных колец независимо от выбранной формулы (рис. 12, *a–в*). Такое совпадение можно считать очень хорошим, поскольку на эти дифракционные кольца приходится основная доля рассеянной энергии. В области углов рассеяния от 30 до 150° суммарная рассеянная энергия пренебрежимо мала, поэтому расхождениями в решениях можно пренебречь. Однако отсутствие

у формулы для \mathbf{E}^{sct} скачка в области 90° , характерного для решений \mathbf{E}_I^{sct} и \mathbf{E}_\perp^{sct} , делает ее более предпочтительной при расчете интенсивности. Относительно диагональных элементов матрицы Мюллера, представленных на рис. 12, *г–з*, можно заключить, что полученное методом FDTD точное решение было сделано на достаточно грубой сетке. Это особенно заметно на рис. 12, *г* в области углов рассеяния от 80 до 130° . Также стоит иметь в виду, что в этой области значение интенсивности на 5 порядков меньше значения в точке 0° , что ведет к дополнительным вычислительным погрешностям. Тем не менее на рис. 12, *д, е* заметна отчетливая корреляция точного решения с решением для \mathbf{E}^{sct} , в то время как решения \mathbf{E}_I^{sct} и \mathbf{E}_\perp^{sct} значительно расходятся с точным решением в области рассеяния $40–160^\circ$.

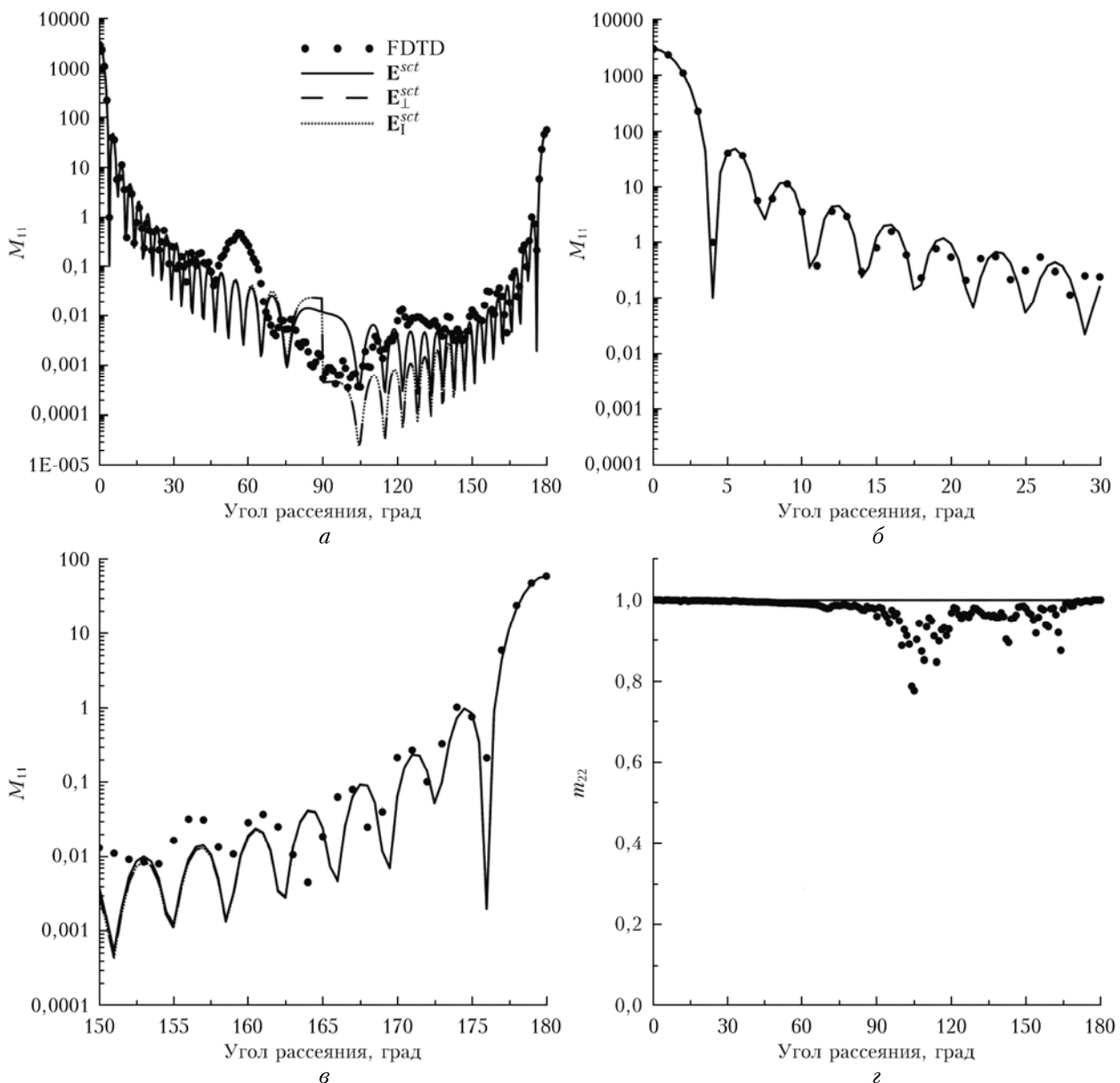


Рис. 12. Сравнение элементов матрицы Мюллера, полученных методом физической оптики, с точным решением уравнений Максвелла методом FDTD. (Начало)

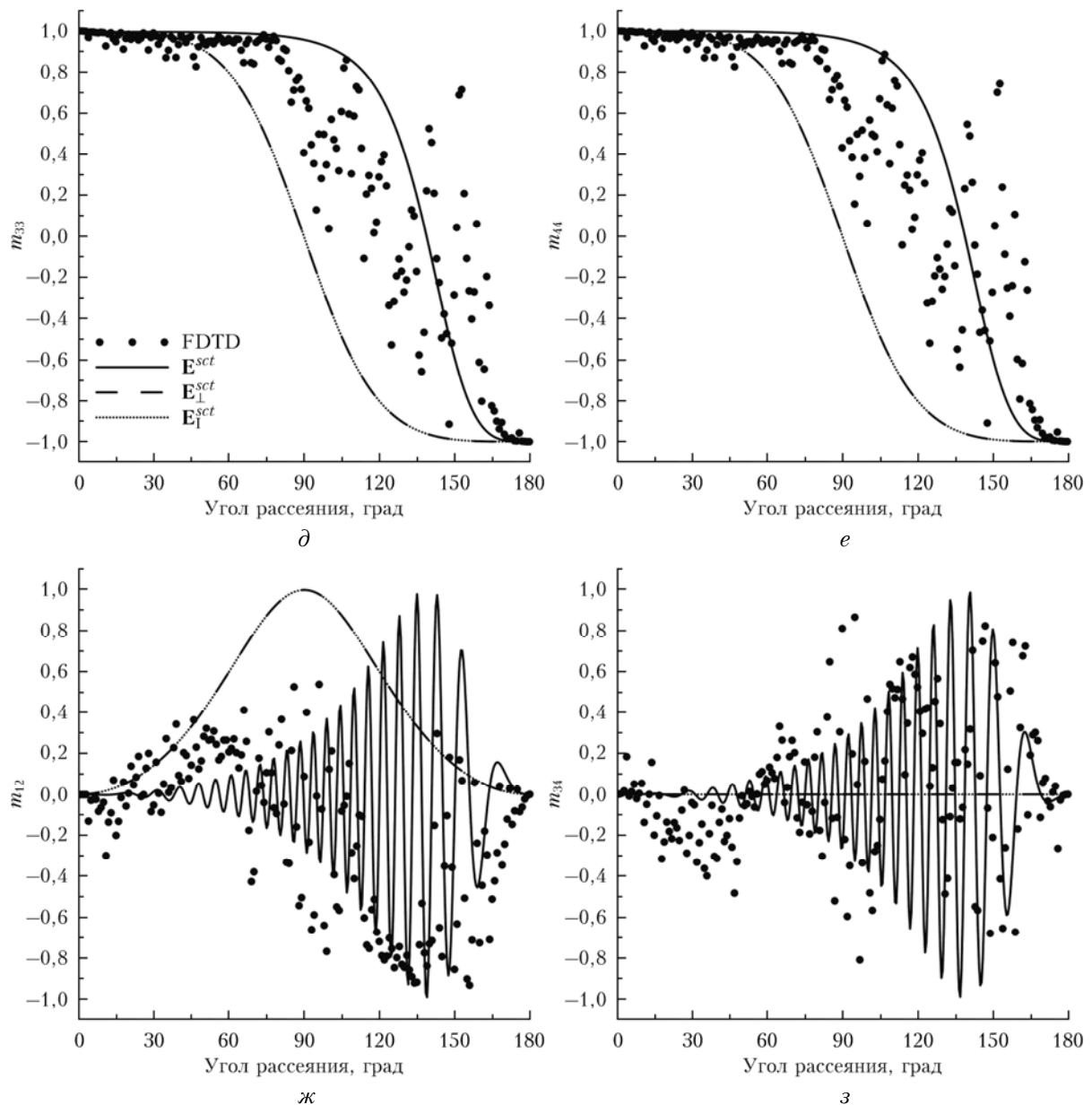


Рис. 12. Сравнение элементов матрицы Мюллера, полученных методом физической оптики, с точным решением уравнений Максвелла методом FDTD. (Окончание)

Сравнение недиагональных элементов матрицы Мюллера, представленных на рис. 12, ж, з, вообще говоря, некорректно ввиду значительных осцилляций и грубости сетки. Тем не менее решения для E_1^{sct} и E_{\perp}^{sct} дают элемент m_{34} равным нулю, в то время как точное решение и решение для E^{sct} показывают его существенно не нулевое значение.

Таким образом, сравнение приближенных решений, полученных по формулам (40)–(42), с точным решением показало, что в случае малоуглового рассеяния на достаточно крупных частицах, вообще говоря, пригодны все три формулы. Отсутствие отличия между решениями E_1^{sct} и E_{\perp}^{sct} обусловлено тем, что в поставленной задаче волна падает на частицу нормально. Сравнение также показало, что

решение по всей сфере направлений рассеяния предпочтительно искать с использованием формулы Кирхгофа (42).

Заключение

Подробное рассмотрение метода физической оптики показало, что приближение физической оптики, с одной стороны, можно трактовать как решение уравнений Максвелла для задачи рассеяния на частице, поле внутри которой находится приближенно методом геометрической оптики. С другой стороны, можно говорить, что метод физической оптики является развитием приближения геометрической оптики, когда на выходе из частицы геометрическая

волна испытывает дифракцию. Обе эти трактовки приводят к вычислению одних и тех же интегралов по поверхности.

При этом построение поля в волновой зоне на основе известного поля на поверхности частицы может быть сделано различными способами. Анализ четырех дифракционных интегралов показал, что для случая малоугловой дифракции на плоском экране расхождение между интегралами незначительно. Однако для случая дифракции на наклонном экране, а также при дифракции под большими углами наблюдается существенное расхождение в решениях.

Сравнение полученных решений с точным решением, найденным методом FDTD, позволило сделать вывод, что приближение Кирхгофа предпочтительнее, нежели другие, более математически корректные, дифракционные интегралы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 15-05-06100а, 15-55-53081, гранта Президента РФ (МК-6680.2015.5), частичной поддержке РНФ (соглашение № 14-27-00022), Министерства образования и науки РФ (проект № 14.604.21.0042) и по Программе повышения конкурентоспособности университетов 5–100.

1. Borovoi A.G., Grishin I.A. Scattering matrices for large ice crystal particles // *J. Opt. Soc. Amer. A*. 2003. V. 20, N 11. P. 2071–2080.
2. Borovoi A.G. Light scattering by large particles: Physical optics and the shadowforming field / Ed. A.A. Kokhanovsky. *Light scattering reviews*. V. 8. Chichester: Springer-Praxis, 2013. P. 115–138.
3. Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N. The physical-optics approximation and its application to light backscattering by hexagonal ice crystals // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2014. V. 146. P. 181–189.
4. Bi L., Yang P., Kattawar G.W., Hu Y., Baum B.A. Scattering and absorption of light by ice particles: Solution by a new physical-geometric optics hybrid method // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2011. V. 112, N 9. P. 1492–1508.
5. Bi L., Yang P. Physical-geometric optics hybrid methods for computing the scattering and absorption properties of ice crystals and dust aerosols / Ed. A.A. Kokhanovsky. *Light scattering reviews*. V. 8. Chichester: Springer-Praxis, 2013. P. 69–114.
6. Nieto-Vesperinas M. *Scattering and diffraction in physical optics*. 2nd ed. New Jersey: World sci., 2006. 434 p.
7. Ishimaru A. *Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering*. London: Prentice Hall, 1990. 656 p.
8. Mandel L., Wolf E. A generalized extinction theorem and its role in scattering theory // *Coherence and Quantum Optics*. N.Y.: Plenum Press, 1973. P. 339–357.
9. Tai C.T. Direct integration of field equations // *Prog. Electromagn. Res*. 2000. V. 28. P. 339–359.
10. Tai C.T. *Dyadic green functions in electromagnetic theory*. 2nd ed. N.Y.: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1994. 343 p.
11. Морс Ф.М., Феибах Г. *Методы теоретической физики*. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 897 с.
12. Franz V.W. Zur Formulierung des Huygensschen Prinzips // *Zeitschrift für Naturforschung*. A. 1948. V. 3, N 8–11. P. 500–506.
13. Зоммерфельд А. *Оптика* / пер. с нем. Н.В. Родниковой; под ред. М.А. Ельяшевича. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 486 с.
14. Pattanayak D.N. Thesis. University of Rochester, 1973.
15. Pattanayak D.N., Wolf E. General form and a new interpretation of the Ewald–Oseen extinction theorem // *Opt. Commun.* 1972. V. 6, N 3. P. 217–220.
16. Jackson J.D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. N.Y.: John Wiley & Sons, 1998. 808 p.
17. Orfanidis S.J. *Electromagnetic waves and antennas*. New Jersey: Rutgers University, 2014. 1188 p. URL: www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa
18. Стрэттон Дж.А. *Теория электромагнетизма*. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 539 с.
19. Asvestas J.S. Diffraction by a black screen // *J. Opt. Soc. Amer.* 1975. V. 65, N 2. P. 155–158.
20. Kottler F. Diffraction at a black screen. Part I: Kirchhoff's theory // *Prog. Opt.* 1965. V. 4. P. 281–314.
21. Kottler F. Diffraction at a black screen. Part II: Electromagnetic theory // *Prog. Opt.* 1967. V. 6. P. 331–377.
22. Щелкунов С.А., Фриш Х.Т. *Антенны: теория и практика*. М.: Сов. радио, 1955. 604 с.
23. Yang P., Liou K.N. Geometric-optics-integral-equation method for light scattering by nonspherical ice crystals // *Appl. Opt.* 1996. V. 35, N 33. P. 6568–6584.
24. Ромашов Д.Н. Рассеяние света гексагональными ледяными кристаллами // *Оптика атмосф. и океана*. 2001. Т. 14, № 2. С. 116–124.
25. Karczewski B., Wolf E. Comparison of three theories of electromagnetic diffraction at an aperture. Part II: The far field // *J. Opt. Soc. Amer.* 1966. V. 56, N 9. P. 1214–1219.
26. Masuda K., Ishimoto H., Mano Y. Efficient method of computing a geometric optics integral for light scattering by nonspherical particles // *Pap. Meteorol. Geophys.* 2012. V. 63. P. 15–19.
27. Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г. Алгоритм трассировки пучков для задачи рассеяния света на атмосферных ледяных кристаллах. Часть 1. Теоретические основы алгоритма // *Оптика атмосф. и океана*. 2015. Т. 28, № 4. С. 324–330.
28. Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г. Алгоритм трассировки пучков для задачи рассеяния света на атмосферных ледяных кристаллах. Часть 2. Сравнение с алгоритмом трассировки лучей // *Оптика атмосф. и океана*. 2015. Т. 28, № 4. С. 331–337.
29. Алгоритм трассировки пучков. URL: <https://github.com/sasha-tvo/Beam-Splitting>. Branch: physical-optics.
30. Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N. Backscattering reciprocity for large particles // *Opt. Lett.* 2013. V. 38, N 15. P. 1485–1487.
31. Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N. Backscattering by hexagonal ice crystals of cirrus clouds // *Opt. Lett.* 2013. V. 38, N 19. P. 2881–2884.
32. Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г. Граница применимости приближения геометрической оптики для решения задачи обратного рассеяния света на квазигоризонтально ориентированных гексагональных ледяных пластинках // *Оптика атмосф. и океана*. 2014. Т. 27, № 8. С. 705–712.

A.V. Konoshonkin, N.V. Kustova, V.A. Osipov, A.G. Borovoi, K. Masuda, H. Ishimoto, H. Okamoto.
Physical optics approximation for solving problems of light scattering on the ice crystal particles: Comparison of the vector formulations of diffraction.

The formulation of the physical optics approximation based on Maxwell's equations has been considered. The equivalence of various definitions of physical optics approximation has been shown. A detailed comparison of the three diffraction formulas corresponding to E -, M - and (E, M) -theories of diffraction has been provided. It was found that in the case of diffraction on a hole in the flat screen, all three formulas give the same diffraction scattering cross section for the diffraction angles up to 60° . The polarizing elements of the Mueller matrix in this case diverge significantly even for the angles of 15 – 30° . It is also shown that in the case of diffraction on the tilted screen, the difference between E -, M - and (E, M) -theories of diffraction may be significant. So when the screen is tilted about 80° E, M diffraction theory can be applied only to very small diffraction angle. The comparison of the results with the exact solution obtained by FDTD has confirmed that the difference between E, M - and (E, M) diffraction theories is not significant for the case of diffraction on the flat screen, but it is preferable to use the (E, M) diffraction theory for calculations.