

О ДВИЖЕНИИ ТРЕЩИНЫ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

П. А. Мартынюк, В. Ф. Тарасов

(Новосибирск)

Решается плоская автомодельная задача Бробрерга [1] о распространении трещины из нуля с постоянной скоростью под действием постоянного растягивающего напряжения p . Аналогично [2] относительно концевой области поверхности трещины (фиг. 1) и распределения сил сцепления сделаем два предположения;

1) концевая область поверхности трещины, где существенно наличие сил сцепления, расширяется с постоянной скоростью $(1 - \alpha)V$, где $0 < \alpha < 1$;

2) функция распределения сил сцепления для концевой области трещины аппроксимируется постоянной q_0 .

Имеем уравнения движения

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}, \quad \tau = c_1 t, \quad k^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} < 1$$

Здесь c_1 — скорость продольных волн, c_2 — скорость поперечных волн.

Функции φ и ψ определяются соотношениями

$$\varphi(x, z, \tau) = \operatorname{div} \mathbf{u}(x, z, \tau), \quad \psi(x, z, \tau) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(x, z, \tau)$$

где $\mathbf{u}(x, z, \tau)$ — вектор перемещения. Требуется найти решение задачи теории упругости с нулевыми начальными данными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \begin{cases} -p & |x| < \gamma_0\tau \\ -(p - q_0) & \gamma_0\tau < |x| < \beta_0\tau \end{cases} \quad \text{при } z=0, \tau > 0 \\ \sigma_{zx} &= 0 \quad \text{при } |x| < \infty, z=0, \tau > 0 \quad (\beta_0 = V_0/c_1, \gamma_0 = \alpha\beta_0) \\ u_z &= 0 \quad \text{при } |x| > \beta_0\tau \end{aligned}$$

При этом ставится условие, чтобы растягивающее напряжение σ_{zz} было бы конечным в окрестности носика движущейся трещины.

Решение задачи строится, как и в работе Бробрерга [1]. Сначала решаются две задачи о нахождении $\partial^2 u_z / \partial \tau^2$ точек поверхности $z=0$ под действием нагрузок

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p, & |x| < \gamma_0\tau \\ -(p_0 - q_0), & \gamma_0\tau < |x| < \beta_0\tau \\ 0, & |x| > \beta_0\tau \end{cases} \quad \text{при } z=0, \tau > 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{zx} = 0 \quad \text{при } |x| < \infty, z=0, \tau > 0$$

и

$$d\sigma_{zz} = \begin{cases} 0, & |x| < \beta_0\tau \\ -q'(\beta) d\beta, & \beta_0\tau < |x| < \beta\tau \\ 0, & |x| > \beta\tau \end{cases} \quad \text{при } z=0, \tau < 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{zx} = 0 \quad \text{при } |x| < \infty, z=0, \tau > 0$$

Суперпозиция напряжений (1) и (2) проводится таким образом, чтобы $\partial^2 u_z / \partial \tau^2 = 0$ для $|x| > \beta_0\tau$ при $z=0$, что приводит к сингулярному интегральному уравнению для функции $q'(\beta)$; в отличие от аналогичного уравнения работы [1], в правой части которого стоит функция, а не постоянная имеем

$$a(r)\varphi(r) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0^2}^1 \frac{b(s)\varphi(s)}{s-r} ds = K(r) \quad (3)$$

$$x^2/\tau^2 = r, \quad \beta^2 = s, \quad q'(\beta) = \varphi(s), \quad b(r) = r - \beta_0^2$$

$$a(r) = -\frac{\operatorname{Im} F(r^{-1})}{\operatorname{Re} F(r^{-1})} (r - \beta_0^2) = \begin{cases} 0 & (\beta_0^2 < r < k^2) \\ g(r)(r - \beta_0^2) & (k^2 < r < 1) \end{cases}$$

$$g(r) = \frac{4k^3 \sqrt{(1-r)(r-k^2)}}{(r-2k^2)^2}$$

$$K(r) = \frac{2(p-q_0)}{\pi} \beta_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0^2}^1 \frac{\sqrt{s-\beta_0}}{\sqrt{s}} \varphi(s) ds + \frac{2q_0\gamma_0}{\pi} \frac{r-\beta_0^2}{r-\gamma_0^2} = K + \frac{[2q_0\gamma_0}{\pi} \frac{r-\beta_0^2}{r-\gamma_0^2}$$

$$F(r) = \frac{\sqrt{r^2-1}}{(1/2 k^{-2} - r^2)^2 + r^2 \sqrt{1-r^2} \sqrt{k^{-2}-r^2}}$$

Общее решение уравнения (3) выписывается в таком же виде, как и в работе [1], только вместо постоянной K всюду будет стоять функция $K(r)$. В результате интегрирования и алгебраических преобразований получаем

$$\varphi(r) = Q \frac{f(r)}{r} + Q_1 \frac{f_1(r)}{r - k_s^2} - A \frac{f(r)[r + (k_s^2 - \gamma_0^2)]}{r(r - \gamma_0^2)} \quad (\beta_0^2 < r < k^2)$$

$$\varphi(r) = Q \frac{f_1(r)}{r} + Q_1 \frac{f_1(r)}{r - k_s^2} - A \frac{f_1(r)[r + (k_s^2 - \gamma_0^2)]}{r(r - \gamma_0^2)} \quad (k^2 < r < 1)$$

$$f(r) = \frac{(r - 2k^2)^2 - 4k^3 \sqrt{(1-r)(k^2-r)}}{\sqrt{(1-r)(r - \beta_0^2)^3}}, \quad k_s^2 = \frac{c_s^2}{c_1^2}$$

$$f_1(r) = \frac{(r - 2k^2)^2}{\sqrt{(1-r)(r - \beta_0^2)^3}}, \quad A = \frac{2q_0\gamma_0}{\pi} \frac{(\gamma_0^2 - \beta_0^2) \sqrt{(1-\gamma_0^2)(\beta_0^2 - \gamma_0^2)}}{k_s^2(k_s^2 - \gamma_0^2)}$$

Здесь c_s — скорость поверхностных волн Рэлея.

Броберг [1] показал, что для выполнения условия $u_z = 0$ при $|x| > \beta_0\tau$ необходимо, чтобы $Q_1 = 0$, последнее приводит к равенству

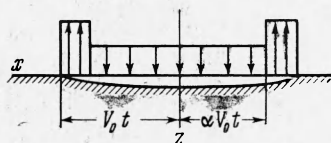
$$Q = \frac{2(p-q_0)}{\pi} \beta_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0^2}^1 \frac{\sqrt{s - \beta_0}}{\sqrt{s}} \varphi(s) ds + \frac{2q_0\gamma_0}{\pi} + A \quad (4)$$

Считая, что постоянная Q известна, найдем σ_{zz} для $|x| > \beta_0\tau$. Так как

$$d\sigma_{zz} = -q'(\beta) d\beta, \quad q'(\beta) = \varphi(r)$$

имеем

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{2} \int_{x^2/\tau^2}^1 \frac{\varphi(r)}{\sqrt{r}} dr$$



Фиг. 1

Полагая $|x|/\tau = \xi$, после интегрирования при $\beta_0 < \xi < k$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\xi) = & \frac{Q}{\beta_0^2(1-\beta_0^2)} \left\{ \frac{\xi}{\beta_0^2 \sqrt{\xi^2 - \beta_0^2}} [4k^3(1-\beta_0^2) \sqrt{k^2 - \xi^2} - (\beta_0^2 - 2k^2)^2 \sqrt{1 - \xi^2}] + \right. \\ & + \frac{4k^3 \sqrt{\xi^2 - \beta_0^2}}{\beta_0^2 \xi} [\sqrt{k^2 - \xi^2} - k \sqrt{1 - \xi^2}] - [\beta_0^2(1 - 4k^2) + 4k^4] F(\lambda_1, q_1) + \\ & + \frac{1}{\beta_0^2} [\beta_0^4 - 4k^2(1 + k^2)\beta_0^2 + 8k^4] E(\lambda_1, q_1) + 4k^2(1 - \beta_0^2) F(\lambda_k, q_k) - \\ & - \frac{8k^4}{\beta_0^2} (1 - \beta_0^2) E(\lambda_k, q_k) \left. \right\} + \frac{A}{(\beta_0^2 - \gamma_0^2)(1 - \beta_0^2)} \left\{ \frac{\xi}{\beta_0^2 \sqrt{\xi^2 - \beta_0^2}} [4k^3(1 - \beta_0^2) \sqrt{k^2 - \xi^2} - \right. \\ & - (\beta_0^2 - 2k^2)^2 \sqrt{1 - \xi^2}] - [\beta_0^2(1 - 4k^2) - \gamma_0^2(1 - \beta_0^2) + 4k^4] F(\lambda_1, q_1) + \\ & + \frac{(\beta_0^2 - 2k^2)^2}{\beta_0^2} E(\lambda_1, q_1) + 4k^2(1 - \beta_0^2) F(\lambda_k, q_k) - \frac{4k^4(1 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} E(\lambda_k, q_k) - \\ & - 4k^2(1 - \beta_0^2) \Pi(\lambda_k, -\kappa_k, q_k) + \frac{(1 - \beta_0^2)}{(1 - \gamma_0^2)} (\gamma_0^2 - 2k^2)^2 \Pi(\lambda_1, -\kappa_1, q_1) \left. \right\} + \quad (5) \\ & + \frac{A(k_s^2 - \gamma_0^2)}{\beta_0^2(\beta_0^2 - \gamma_0^2)(1 - \beta_0^2)} \left\{ \frac{\xi}{\beta_0^2 \sqrt{\xi^2 - \beta_0^2}} [4k^3(1 - \beta_0^2) \sqrt{k^2 - \xi^2} - (\beta_0^2 - 2k^2)^2 \sqrt{1 - \xi^2}] + \right. \\ & + \frac{4k^3(\beta_0^2 - \gamma_0^2)(1 - \beta_0^2)}{\xi\gamma_0^2\beta_0^2} \sqrt{\xi^2 - \beta_0^2} [k \sqrt{1 - \xi^2} - \sqrt{k^2 - \xi^2}] - (\beta_0^2 - 2k^2)^2 F(\lambda_1, q_1) + \\ & + \frac{\beta_0^4(\gamma_0^2 + 4k^4) - 4\beta_0^2k^2(\gamma_0^2 + k^2 + k^2\gamma_0^2) + 8k^4\gamma_0^2}{\beta_0^2\gamma_0^2} E(\lambda_1, q_1) + \\ & + 4k^2(1 - \beta_0^2) F(\lambda_k, q_k) - \frac{4k^4(2\gamma_0^2 - \beta_0^2)(1 - \beta_0^2)}{\beta_0^2\gamma_0^2} E(\lambda_k, q_k) + \\ & + \frac{\beta_0^2}{\gamma_0^2} \frac{1 - \beta_0^2}{1 - \gamma_0^2} (\gamma_0^2 - 2k^2)^2 \Pi(\lambda_1, -\kappa_1, q_1) - \frac{4k^2\beta_0^2(1 - \beta_0^2)}{\gamma_0^2} \Pi(\lambda_k, -\kappa_k, q_k) \left. \right\} \end{aligned}$$

Здесь F, E, Π — эллиптические интегралы

$$\lambda_j = \arcsin \left(\frac{j^2 - \xi^2}{j^2 - \beta_0^2} \right)^{1/2}, \quad q_j = \left[1 - \left(\frac{\beta_0}{j} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \kappa_j = \frac{j^2 - \beta_0^2}{j^2 - \gamma_0^2} \quad (j = 1, k)$$

Выражение для $\sigma_{zz}(\xi)$ при $k < \xi < 1$ получается из (5) исключением членов, дающих мнимость, и членов с $F(\lambda_k, q_k), E(\lambda_k, q_k), \Pi(\lambda_k, -\kappa_k, q_k)$. Уравнение (4) для определения постоянной Q можно переписывать в виде

$$Q = \frac{1}{\Psi(\beta_0^2)} \left[2(p - q_0)\beta_0 + 2q_0\gamma_0 + A\pi - A \int_{\beta_0^2}^1 \frac{\sqrt{s - \beta_0} f(s) [s - (k_0^2 - \gamma_0^2)]}{\sqrt{s} s(s - \gamma_0^2)} ds \right]$$

$$\Psi(\beta_0^2) = \pi - I(\beta_0^2) \quad I(\beta_0^2) = \int_{\beta_0^2}^1 \frac{\sqrt{s - \beta_0} f(s)}{\sqrt{s} s} ds \quad (6)$$

Знаменатель дроби найден Бробергом, интеграл в числителе рассчитывается аналогично. Выражение Q , найденное из (6), подставляется в σ_{zz} . Как видно из (5), полученное решение обладает особенностью порядка $s^{-1/2}$ (где $s \ll 1$ — расстояние извне до носика трещины). Устремляя ξ к β_0 и полагая $m = V_0 / c_2$, получаем выражение для σ_{zz} в окрестности носика движущейся трещины

$$\sigma_{zz} = F(m, \nu) \sqrt{\frac{ct}{s}} \{ (p - q_0) + q_0 \Phi(m, \alpha, \nu) \} \quad (7)$$

$$F(m, \nu) = \frac{\sqrt{1 - k^2 m^2} [4 \sqrt{(1 - k^2 m^2)(1 - m^2)} - (m^2 - 2)^2]}{\sqrt{2} m^{3/2} f(m, \nu)}$$

$$f(m, \nu) = [m^2(1 - 4k^2) + 4k^2] K(\sqrt{1 - m^2 k^2}) - 4(1 - m^2 k^2) K(\sqrt{1 - m^2}) -$$

$$- \frac{1}{m^2} [m^2 - 4(1 + k^2)m^2 + 8] E(\sqrt{1 - m^2 k^2}) + \frac{8}{m^2} (1 - m^2 k^2) E(\sqrt{1 - m^2})$$

$$(m, \alpha, \nu) = \frac{2\alpha m \sqrt{(1 - \alpha^2 m^2 k^2)(1 - \alpha^2)}}{\pi [(\alpha^2 m^2 - 2)^2 - 4 \sqrt{(1 - \alpha^2 m^2 k^2)(1 - \alpha^2 m^2)}]} \{ \alpha^2 m^2 K(\sqrt{1 - m^2 k^2}) -$$

$$- \frac{4}{m^2} E(\sqrt{1 - m^2 k^2}) + \frac{4}{m^2} E(\sqrt{1 - m^2}) + \frac{k^2(\alpha^2 m^2 - 2)^2}{1 - \alpha^2 m^2 k^2} \times$$

$$\times \Pi \left(-\frac{1 - m^2 k^2}{1 - \alpha^2 m^2 k^2}, \sqrt{1 - m^2 k^2} \right) - 4 \Pi \left(-\frac{1 - k^2}{1 - \alpha^2 k^2}, \sqrt{1 - m^2} \right) \}$$

Напряжение в носике трещины будет конечным, если выражение в фигурных скобках в формуле (7) равняется нулю. Отсюда получаем уравнение, связывающее действующее напряжение p и величину сил сцепления q_0 со скоростью распространения трещины

$$p / q_0 = 1 - \Phi(m, \alpha, \nu) \quad (8)$$

Зависимость (8) изображена графически на фиг. 2, при $\nu = 0.333$, где кривая I соответствует $\alpha = 0.5$, а кривая II — $\alpha = 0.8$.

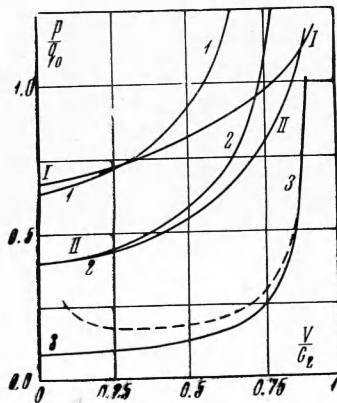
Приведем результаты исследования уравнения (8) в некоторых предельных случаях. При $\alpha \rightarrow 0$, что соответствует распространению сил сцепления на всю длину трещины, $p / q_0 \rightarrow 1$. При $\alpha \rightarrow 1$ в этом случае концевая область стремится к нулю, $p / q_0 \rightarrow 0$. При значениях $m \ll 1$, используя формулу сложения по параметру для интегралов третьего рода [3] и представление эллиптических интегралов в виде рядов [4], получим

$$\frac{p}{q_0} = A - \frac{1}{B} m^2 k^2 \ln mk + O(m^2 k^2) \quad (9)$$

Здесь

$$A = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \alpha$$

$$B = \frac{2\pi k^2 (1 - k^2)}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} [(3 - k^4) - 4k^2(1 - k^2)]}$$



Фиг. 2

Это уравнение дает связь параметров p , q_0 , m для медленных трещин при значениях $p/q_0 \geq A$. Решение $p/q_0 = A$ соответствует предельному равновесию трещины для статической задачи.

Для выяснения влияния динамики концевой области на скорость движения трещины сравним зависимость (8) с уравнением

$$\frac{p}{q_0} = \frac{2 \sqrt{(1-\alpha)m}}{\pi F(m, \nu)} \quad (10)$$

которое получено в предположении квазистационарного характера поля напряжений, обусловленного действием сил сцепления вблизи конца трещины аналогично [2]. На фиг. 2 уравнению (10) соответствуют кривые 1, 2, 3 при α соответственно 0.5, 0.8, 0.99.

Из сравнения кривых 1 и 1, 11 и 2, полученных при одинаковых значениях параметра α , видно, что со стремлением α к единице разница между динамическими и квазистационарными решениями уменьшается, что можно объяснить уменьшением скорости роста концевой области. В работе [2] получено, что для данного материала существует некоторая минимальная скорость равномерного распространения трещины. Последнее вызвано предположением, что концевая область d расширяется со скоростью v , не зависящей от скорости распространения самой трещины

$$d = vt \quad (11)$$

Зависимость, соответствующая (11) и квазистационарности поля напряжений, от сил сцепления

$$\frac{p}{q_0} = \frac{2 \sqrt{v/c_2}}{\pi F(m, \nu)}$$

изображена пунктирной линией на фиг. 2 при $v/c_2 = 10^{-2}$. В данной работе предполагалось $d = (1-\alpha)Vt$. Тогда скорость распространения трещины может быть произвольной, ограниченной сверху c_2 при $\alpha \rightarrow 1$. В предположении (11), отвечающем $\alpha = 1 - v/V$, найденное решение также приводит к существованию минимальной скорости распространения трещины для данного материала.

Поступила 28 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv fys., 1960, vol. 18, No. 2.
2. Б а р е н б л а т т Г. И., С а л г а н и к Р. Л., Ч е р е п а н о в Г. П. О неустановившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. 26, № 2.
3. Б е л я к о в В. М., К р а в ц о в а Р. И., Р а п п о р т М. Г. Таблицы эллиптических интегралов. М., Изд-во АН СССР, 1963, т. 2.
4. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

ОБОБЩЕНИЕ БАЛОЧНОГО ПОДХОДА К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

А. М. Михайлов

(Новосибирск)

Эта заметка дополняет работу [1], в которой рассматривалась задача о движении трещины вдоль стержня, причем считалось, что поведение стержня достаточно хорошо описывается балочной теорией Бернулли — Эйлера. Приведенная там формулировка задачи обобщается ниже (п. 1) на двумерный случай, т. е. на случай распространения трещины по средней плоскости тонкой пластинки. Такого рода задача может реализовываться на опыте при разрушении слоистых материалов или при раздирании двух склеенных листов. В п. 2 балочная постановка задачи о движении трещины обобщается в другом направлении: при описании поведения стержня учитывается влияние перерезывающей силы на прогиб, а также инерция вращения поперечных сечений стержня. Учет этих факторов обеспечивает существование предельной скорости распространения трещины. Приводимые уравнения получены вариационным путем из принципа наименьшего действия, причем выкладки ввиду их аналогичности [1], громоздкости и достаточной элементарности опущены.