ПМТФ, № 6, 1972

УДК 536.24

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЕЕ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ НЕВЯЗКОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Н. Н. Пилюгин

(Москва)

В данной работе в ньютоновском приближении [1] получено аналитическое решение задачи об обтекании сферы установившимся равномерным гиперзвуковым, невязким, излучающим потоком газа. Используется приближение объемного высвечивания. Найдено распределение газодинамических параметров в ударном слое, отход ударной волны и лучистый тепловой поток к поверхности сферы.

Ньютоновское приближение ранее использовалось в работах [2,3] для анализа течения газа с излучением в окрестности критической линии. В работе [2] поле излучения рассматривается в дифференциальном приближении, оптический коэффициент поглощения считается постоянным. В работе [3] интегро-дифференциальное уравнение энергии с учетом излучения для серого газа решалось численно.

В работах [4–7] задача о течении невязкого, нетеплопроводного газа за ударной волной с учетом излучения решалась численно. При вычислении поля излучения в работах [4,7] используется приближение объемного высвечивания, в [5, 6] учитывается самопоглощение газа.

Сравнение полученных в данной работе формул для лучистого потока от излучающего воздуха к сфере с численными расчетами [4–7] показывает их удовлетворительную точность.

1. Рассматривается обтекание сферического тела радиуса R гиперзвуковым потоком невязкого, нетеплопроводного излучающего газа. Система уравнений, описывающих течение газа между отошедшей ударной волной и сферой, записанная в сферической системе координат, связанной с телом, приведена в работе [5]. Эта система уравнений решается с граничными условиями на косом скачке и с условием непротекания на теле. Далее предполагается, что газ совершенный, ударный слой тонкий и выполняются условия гиперзвукового приближения, так что

$$p_\infty \ll \rho_\infty V_\infty^2, \qquad h_\infty \ll V_\infty^2/2$$

где p_∞ — давление, ρ_∞ — плотность, h_∞ — энтальпия, V_∞ — скорость набегающего потока.

Газ подчиняется уравнению состояния

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{1.1}$$

где γ — эффективное отношение теплоемкостей за скачком уплотнения, p — давление, h — энтальпия, ρ — плотность.

Для решения задачи производится разложение величин по малому параметру ε, равному отношению плотностей газа до и после ударной волны (ньютоновское приближение) [1]

$$(r-R)/R = \varepsilon y_0 + \ldots, \qquad u = V_\infty [u_0 + O(\varepsilon)], \qquad v = V_\infty [\varepsilon v_0 + O(\varepsilon^2)] \tag{1.2}$$

$$p = \rho_\infty V_\infty^2 [p_0 + O(\varepsilon)], \qquad \rho = \frac{\rho_\infty}{\varepsilon}[\rho_0 + O(\varepsilon)], \qquad h = \frac{V_\infty^2}{2}[h_0 + O(\varepsilon)]$$

$$Q = \frac{\sigma}{\varepsilon R}\left(\frac{V_\infty^2}{2C_p}\right)^4 [Q_0 + O(\varepsilon)]$$

Здесь r — радиальная координата, u — касательная, v — нормальная составляющая скорости, p — давление, h — энтальпия, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана — Больцмана, R — радиус тела, $Q = \operatorname{div} q_R$ — дивергенция лучистого потока, $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$, C_p — эффективная теплоемкость при постоянном давлении.

Индекс ∞ отмечает величины в набегающем потоке, индекс s — величины на ударной волне, индекс о — безразмерные величины.

Соотношения (1.2) подставляются в уравнения газодинамики, после чего получим для первых членов разложения (индекс о опускаем)

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\rho u) = 0, \qquad \rho u^2 = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.3}$$

$$\rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho u\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0, \qquad \rho v\frac{\partial h}{\partial y} + \rho u\frac{\partial h}{\partial\theta} = -\Gamma Q$$

$$h = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \qquad \Gamma = \frac{2\sigma}{\rho_\infty V_\infty{}^3}\left(\frac{V_\infty{}^2}{2C_p}\right)^4$$

Здесь Γ — параметр излучения [5], θ — угловая координата.

В том же приближении соотношения на ударной волне примут вид

$$u_S - \sin\theta, \qquad v_S = -\cos\theta, \qquad p_S = \cos^2\theta, \qquad h_S = \cos^2\theta \tag{1.4}$$

Условие непротекания тела примет вид

$$v\,(y = 0) = 0 \tag{1.5}$$

Определим безразмерную функцию тока

$$d\,\psi = \rho u \sin\theta\, dy - \rho v \sin\theta\, d\theta \tag{1.6}$$

Далее в системе (1.3) перейдем к переменным Ψ, θ. Тогда в этих переменных система (1.3) запишется следующим образом:

$$\partial u / \partial\theta = 0 \tag{1.7}$$

$$\partial p / \partial\Psi = u / \sin\theta \tag{1.8}$$

$$\partial y / \partial\Psi = 1 / \rho u \sin\theta \tag{1.9}$$

$$v = u\, \partial y / \partial\theta \tag{1.10}$$

$$\rho u\, \partial h / \partial\theta = -\Gamma\, Q \tag{1.11}$$

На теле полагаем безразмерную функцию тока $\Psi = 0$, на ударной волне $\Psi = \Psi_S(\theta) = {}^1/_2 \sin^2\theta$.

Граничные условия (1.4) в новых переменных имеют тот же вид, но нужно брать их при $\Psi = \Psi_S(\theta)$.

2. Решение уравнения (1.7) с граничными условиями (1.4) имеет вид

$$u = \sqrt{2\Psi} \tag{2.1}$$

С учетом этого решения выражение для давления из уравнения (1.8) с учетом (1.4) примет вид

$$p(\Psi, \theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{(2\Psi)^{3/2}}{3\sin\theta} \tag{2.2}$$

Для геометрической координаты получим выражение

$$y(\Psi, \theta) = \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\rho\sqrt{2\Psi}} \tag{2.3}$$

Соотношение (1.10) определяет нормальную составляющую скорости, которая удовлетворяет граничному условию (1.4). Для окончательного решения газодинамической задачи необходимо решить уравнение (1.11) с граничным условием (1.4).

В приближении объемного высвечивания дивергенция лучистого потока имеет вид (в размерном виде) [7-9]

$$Q = 2\mu\sigma T^4 \tag{2.4}$$

Здесь μ — среднепланковский коэффициент поглощения. Анализ табличных данных [8-10] для воздуха показывает, что в определенном интервале давлений и температур коэффициент Планка можно аппроксимировать следующим образом:

$$\mu(p, T) = ApT^n \tag{2.5}$$

где A, n — константы аппроксимации, p — давление, T — температура.

Используя соотношения (2.4), (2.5), получим уравнение для энтальпии

$$u\frac{\partial h}{\partial\theta} = -\frac{bh^{n+5}}{(n+4)} \tag{2.6}$$

с граничным условием

$$h(\Psi = \Psi_S(\theta)) = \cos^2\theta \tag{2.7}$$

где безразмерный параметр b является произведением характерной оптической толщины ударного слоя на параметр излучения Γ

$$b = 2A\rho_\infty V_\infty^2\left(\frac{V_\infty^2}{2C_p}\right)^n \varepsilon R\,\frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\Gamma(n+4) \tag{2.8}$$

В работе [4] этот параметр называется параметром потерь энергии на излучение. Решение для энтальпии имеет вид

$$h(\Psi, \theta) = \left\{\frac{1}{(1-2\Psi)^{n+4}} + \frac{b\theta}{\sqrt{2\Psi}} - \frac{b\arcsin\sqrt{2\Psi}}{\sqrt{2\Psi}}\right\}^\alpha, \quad \alpha = (n+4)^{-1} \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) позволяет найти плотность ρ, далее геометрическую координату $y(\Psi, \theta)$ по соотношению (2.3) и нормальную составляющую скорости $v(\Psi, \theta)$ по соотношению (1.10).

Таким образом, определены все параметры течения газа в ударном слое.

3. В большинстве работ при вычислении лучистого теплового потока на тело в предположении о малой толщине ударного слоя по сравнению с радиусом тела используют формулу для плоского слоя с толщиной, равной отходу ударной волны. Если предположить, что степень черноты тела равна единице, а собственным излучением сравнительно холодной поверхности тела можно пренебречь, то лучистый поток на тело от слоя газа любой конфигурации выражается формулой работы [10]. Из этого общего выражения в предположении, что ударный слой тонкий и происходит объемное высвечивание, можно получить следующее выражение для радиального лучистого потока (в размерном виде) в точки, определяемые координатой θ на поверхности тела

$$q_R(\theta) = \varepsilon R\int_0^{y_S(\theta)} dy\,\mu(p, T)\,\sigma T^4 \tag{3.1}$$

где θ — угол, определяющий точку наблюдения на теле, $y_S(\theta)$ — отход ударной волны.

Выражение (3.1) можно переписать в безразмерном виде, а также использовать (2.8), (2.9)

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{b}{2(n+4)} \int_0^1 \left\{(1 - t^2 \sin^2\theta)^{-(n+4)} + \frac{b(\theta - \arcsin(t\sin\theta))}{t\sin\theta}\right\}^m dt$$

$$m = -(n+5)/n+4 \tag{3.2}$$

Из этого выражения вытекает ряд частных случаев. При $b \ll 1$, когда излучение можно рассматривать как возмущение, наложенное на адиабатическое течение газа, формула (3.2) дает

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{b}{2(n+4)} \int_0^1 dt\,[1 - t^2 \sin^2\theta]^{n+5} \tag{3.3}$$

При углах, подчиняющихся условию

$$\sin\theta < \sqrt{3/(n+5)}$$

интеграл в (3.3) вычисляется, удерживая два члена в биномиальном разложении подынтегральной функции. Аппроксимируя полученный результат с той же точностью, получим

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{b}{2(n+4)} (\cos\theta)^{2/3\,(n+5)} \tag{3.4}$$

Из этой формулы видно, что лучистый поток растет пропорционально радиусу тела (или толщине сжатого слоя) и довольно быстро убывает с увеличением угла. Отношение потока (3.4) к потоку в критическую точку ($\theta = 0$) не зависит от параметра b и, следовательно, от радиуса тела. Эти выводы подтверждаются численными расчетами [4–6]. Аппроксимация табличных данных для воздуха [9, 10] при $0.1 \leqslant p \leqslant 1$ *атм*, $4000°\ \mathrm{K} \leqslant T \leqslant 11000°\ \mathrm{K}$ дает значение $n \approx 8.0$. Формула (3.4) при $n = 8$ приводит к зависимости от угла

$$q_R(\theta) \sim (\cos\theta)^{8.67}$$

Численные расчеты лучистого потока для воздуха при скорости набегающего потока $V_\infty = 10$ *км/сек*, когда газ можно считать слабо излучающим, приводят к зависимости.

$$q_R(\theta) \sim (\cos\theta)^{10.7}$$

В другом предельном случае, когда газ является сильно излучающим $b \gg 1$, асимптотическое вычисление интеграла в (3.2) приводит к следующей формуле для потока:

$$2q_R(\theta)/\rho_\infty V_\infty^3 = \cos^3\theta/2 \tag{3.5}$$

Из этой формулы видно, что в случае сильно излучающего газа предельный лучистый поток на тело равен половине кинетического потока набегающего газа (другая половина высвечивается в сторону ударной волны).

Численные расчеты [6] для $V_\infty = 16$ *км/сек* приводят к зависимости $q_R(\theta) \sim \cos^{3.05}\theta$, что близко к предельному выражению (3.5).

Из (3.5) следует, что при сильном высвечивании лучистый поток не зависит от радиуса тела. Этот результат подтверждается численным расчетом [5] для критической точки, где показано, что отношение $q_R(R) / q_R(R = 3\ м)$ стремится к постоянному пределу при $R > 1\ м$.

В обоих предельных случаях (3.4), (3.5) отношение лучистого потока при $\theta \neq 0$ к потоку в критическую точку не зависит от параметра b и, следовательно, радиуса тела. Независимость этого отношения от радиуса подтверждается численными расчетами [4, 6].

4. Из приведенных выше соотношений (2.3) и (2.9) можно получить безразмерный отход ударной волны $y_s(\theta)$ в зависимости от угла θ и параметра b

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\int_0^1 dt\left[\cos^2\theta - \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{t^3}{3}\sin^2\theta\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{(1-t^2\sin^2\theta)^{n+4}} + \frac{b\,(\theta - \arcsin(t\sin\theta))}{t\sin\theta}\right\}^{-1/(n+4)} \tag{4.1}$$

Для слабо излучающего газа при $b \ll 1$ из (4.1) следует:

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\int_0^1 \frac{dt\,(1-t^2\sin^2\theta)}{[\cos^2\theta - {}^1/_3\sin^2\theta\,(1-t^3)]} \tag{4.2}$$

Вычисление входящего в (4.2) интеграла дает

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\left\{\frac{3}{a^2\sin^2\theta}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(a+1)^2}{a^2-a+1} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2-a}{a\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] - \ln\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta - {}^1/_3\sin^2\theta}\right\} \tag{4.3}$$

где $a^3 = 3\operatorname{ctg}^2\theta - 1$.

Для углов $\theta < \pi/6$ выражение (4.2) дает с точностью до 12%

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{4.4}$$

Таким образом, для слабо излучающего газа отход естественным образом не зависит от параметра b, т. е. от излучения и увеличивается с увеличением угла θ.

В случае сильно излучающегося газа при $b \gg 1$ асимптотическое вычисление интеграла в (4.1) для углов $\theta < \pi/6$ дает

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{n+4}{n+3}\frac{b^\alpha}{\cos^2\theta} \tag{4.5}$$

Отход ударной волны в размерном виде

$$r_S(\theta) - R = \varepsilon R y_S(\theta) \tag{4.6}$$

где $r_S = r_S(\theta)$ — уравнение, описывающее форму ударной волны. Из формул (4.3), (4.5), (4.6) следует, что для слабо излучающего газа отход растет $\sim R$, а для сильно излучающего $\sim R^{(n+3)/(n+4)}$ и уменьшается с ростом скорости V_∞. Это подтверждается анализом численных работ [5, 7]. Интересно отметить, что из формул (4.4) и (4.5) следует одинаковая зависимость отхода от угла θ по крайней мере для углов $\theta < \pi/6$ для сильно и слабо излучающего газа. Отношение отхода при $\theta \neq 0$ к отходу на критической линии $\theta = 0$ в обоих предельных случаях не зависит от параметра b, связанного с излучением.

Из формул (4.1), (4.5) следует, что отход ударной волны уменьшается с ростом параметра потерь энергии на излучение b. Такое уменьшение отхода ударной волны при объемном высвечивании отмечено при расчетах [7].