

УДК 539.8

КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ЖИДКОСТИ, ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ УГЛЕРОДНОЙ ТРУБКОЙ, ПОМЕЩЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ

Ч. К. Рао, Л. Б. Рао*

Объединение институтов Налла Нарасимха Редди, 500088 Хайдарабад, Индия

* Школа механических и строительных наук ВИТ-университета, 600048 Ченнай, Индия

E-mails: chellapilla95@gmail.com, bhaskarbabu_20@yahoo.com

Исследуется устойчивость углеродной нанотрубки, помещенной в упругую среду Пастернака и транспортирующей жидкость. Уравнения задачи выводятся с использованием нелокальной теории упругости, учитывающей малый характерный размер среды. В случае трубки с шарнирно опертыми торцами задача решается с использованием метода разложения в ряды Фурье, в случае трубки с заземленными торцами — с использованием метода Галеркина. Получены замкнутые выражения для критической скорости, при которой происходит потеря устойчивости нанотрубки, при различных значениях параметров жесткости основания Пастернака и Винклера. Исследована зависимость критической скорости транспортируемой жидкости от нелокального характерного линейного размера среды. Установлено, что критическая скорость потока жидкости, переносимой нанотрубками, существенно зависит как от жесткости основания, так и от характерного линейного размера среды.

Ключевые слова: критическая скорость, однослойная углеродная нанотрубка, нелокальная теория упругости, двухпараметрическое основание.

DOI: 10.15372/PMTF20170420

Введение. В настоящее время активно исследуется поведение углеродных нанотрубок в различных условиях. Поскольку нанотрубки имеют уникальные механические, электрические и химические свойства, они широко используются в различных устройствах, например в биодатчиках, наноосцилляторах, для доставки лекарств в организм, а также в качестве элементов наноустройств.

В последние годы возрос интерес к исследованию устойчивости однослойных нанотрубок, транспортирующих жидкость, начало которому положено в 2005 г. В работах этого периода использовались уравнения классической механики сплошных сред [1–3] и не учитывались эффекты, обусловленные микроструктурой такой среды (наличием характерного малого размера). Диаметр однослойной углеродной нанотрубки составляет $1 \div 7$ нм, а ее длина — $20 \div 140$ нм (размеры порядка длины C–C-связи). При таких малых масштабах свойства материала зависят от его строения на атомном уровне. Поэтому использование классической механики сплошной среды при исследовании нанотрубок может оказаться

неправомерным. В последнее время при исследовании свойств нанотрубок часто используется нелокальная теория сплошной среды Эрингена [4, 5], в которой напряженное состояние в точке определяется функционалом от деформаций в каждой точке тела.

Впервые для исследования колебаний однослойной углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость и помещенной в упругую среду Винклера, нелокальная теория сплошной среды применена в работе [6]. В [7] изучались колебания однослойных углеродных нанотрубок, транспортирующих жидкость и помещенных в упругую среду Винклера. С использованием постановки задачи [7] в работе [8] исследовались колебания однослойной углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость и помещенной в упругую среду Пастернака. В [9] указаны ошибки, допущенные в работе [6], и построены корректные уравнения задачи. Также корректные уравнения задачи сформулированы в [10], однако в этой работе не учитывалось влияние упругой среды, в которую помещена трубка. В [11] рассматривалась двухпараметрическая упругая среда, в которую помещена углеродная нанотрубка, транспортирующая жидкость. При этом для вмещающей среды использовалась как модель среды Пастернака, так и двухпараметрическая модель вязкоупругой среды, однако при формулировке уравнений движения нанотрубки применялась классическая модель сплошной среды. В работе [12] с использованием нелокальной модели вязкоупругой двухслойной балки исследовалось движение углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость и помещенной в двухпараметрическую среду Кельвина — Фойгхта. Однако при выводе уравнений задачи не учитывались локальные эффекты, обусловленные наличием параметров модели Кельвина — Фойгхта. Поэтому результаты решения задачи об устойчивости свободно опертой балки, полученные в работе [12], могут быть ошибочными.

В [13] с использованием нелокальной теории упругости решена задача о свободных колебаниях системы двухслойных углеродных нанотрубок, транспортирующих жидкость и помещенных в вязкоупругую среду Пастернака, при этом нанотрубки рассматривались как балки Бернулли — Эйлера, помещенные в однородные температурное и магнитное поля. В работе [14] изучались свободные колебания и устойчивость однослойных углеродных нанотрубок, транспортирующих наножидкость и помещенных в мягкую биологическую ткань. В [15] задача о нелинейных колебаниях нанотрубок, транспортирующих жидкость, решалась с использованием моделей балки Бернулли — Эйлера и балки Тимошенко (система нелинейных дифференциальных уравнений решалась с помощью метода конечных элементов).

В работе [16] задача о нелинейном флаттере заземленной на торцах балки в потоке жидкости при наличии продольного магнитного поля решалась с использованием модели балки Редди. В [17] выведены трехмерные уравнения движения прямолинейных трубок, транспортирующих жидкость, с произвольными условиями закрепления торцов. В этой работе для моделирования различных способов закрепления торцов балки размещалась система пружин, смещения балки представлялись в виде рядов Фурье по косинусам, использовались четыре дополнительные функции, для того чтобы удовлетворить краевым условиям.

В настоящей работе задача решается в постановке, предложенной в [9], выводятся уравнения движения однослойной углеродной нанотрубки, помещенной в упругую среду Пастернака и транспортирующей жидкость. Трубка рассматривается как балка Бернулли — Эйлера. Для случая балки с шарнирно опертыми торцами решение получено с использованием рядов Фурье, для случая балки с заземленными торцами — с использованием метода Галеркина. При различных значениях малого параметра нелокальности среды, различных значениях жесткостей упругих оснований Винклера и Пастернака получено замкнутое выражение для критической скорости жидкости для двух случаев закрепления торцов балки.

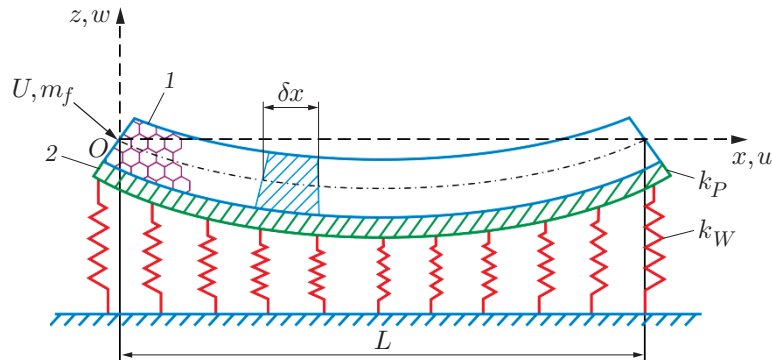


Рис. 1. Схема углеродной трубки, транспортирующей жидкость и помещенной в упругую среду Пастернака:

1 — трубка, 2 — основание

1. Уравнения задачи и метод решения. Сформулируем уравнения движения углеродной нанотрубки, помещенной в упругую среду и транспортирующей жидкость.

1.1. *Нелокальные уравнения состояния.* В работе [5] предложено нелокальное уравнение состояния упругой среды

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{kl} = \tau_{kl}, \quad (1)$$

где $\sigma_{kl}(x)$ — тензор нелокальных напряжений в точке x ; $\sigma_{kl}(x')$ — классический тензор локальных напряжений в точке x' ; e_0 — константа материала, определяемая по данным эксперимента; a — характерный размер (длина С-С-связи, или параметр решетки). В одномерном случае уравнение (1) записывается в виде

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (2)$$

где σ_{xx} — осевое напряжение; ε_{xx} — осевая деформация; E — модуль Юнга углеродной нанотрубки.

1.2. *Модель упругой среды Пастернака.* Модель упругого основания Винклера представляет собой набор линейных упругих пружин. В модели упругого основания Пастернака полагается, что линейные упругие пружины взаимодействуют: на границах между пружинами действуют напряжения сдвига. Таким образом, модель Пастернака является двухпараметрической: помимо жесткости основания на растяжение, учитываемой в модели Винклера, в ней также учитывается жесткость основания на сдвиг.

Схема углеродной трубки, транспортирующей жидкость и помещенной в упругую среду Пастернака, представлена на рис. 1. Полагается, что торцы однослойной углеродной нанотрубки длиной L либо зашпелены, либо свободно оперты, либо шарнирно закреплены. Масса нанотрубки единичной длины равна m_c , жесткость на изгиб нанотрубки равна EI .

Масса жидкости, транспортируемой через поперечное сечение трубки с площадью сечения A в направлении x со скоростью U , отнесенная к единице длины, равна m_f . Модель основания содержит два параметра: модуль Винклера k_W и модуль Пастернака k_P . В работе [18] получено следующее выражение для силы реакции, действующей на нанотрубку со стороны основания и отнесенной к единице длины:

$$k_P \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - k_W w = R_P(x, t). \quad (3)$$

1.3. *Математическая модель однослойной углеродной трубки, транспортирующей жидкость.* Зависимости между продольной деформацией, прогибом, перерезывающей силой Q и изгибающим моментом M_b для балки Бернулли — Эйлера запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}; \\ Q &= -\frac{\partial M_b}{\partial x}, \quad M_b = \int_A z \sigma_{xx} dA. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (2), (4) следует

$$M_b(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (5) по переменной x два раза, получаем

$$\frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} \right). \quad (6)$$

Уравнение движения элемента однослойной углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость и помещенной в среду Пастернака, записывается в виде

$$-\frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = -R_P + m_f a_{fz} + m_c a_{cz}. \quad (7)$$

Слагаемые $m_c a_{cz}$, $m_f a_{fz}$ в правой части уравнения (7) — инерционные силы элемента трубки и элемента жидкости соответственно. В поршневом приближении выражения для ускорений элемента трубки и элемента жидкости имеют вид [8]

$$a_{cz} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad a_{fz} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right). \quad (8)$$

Из (6), (7) с учетом (3), (8) для прогиба w однослойной углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость, получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (m_f U^2 - k_P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + k_W - \\ - (e_0 a)^2 \left[M \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_f U^2 - k_P) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2m_f U \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + k_W \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

1.4. *Решение уравнения (9) для случая трубки с шарнирно опертыми торцами.* В соответствии с работой [19] решение уравнения (9) для случая трубки с шарнирно опертыми торцами ищем в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{a_n \sin(n\pi x)}{L} \sin \omega_j + \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{a_n \sin(n\pi x)}{L} \cos \omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

(ω_j — собственная частота j -й моды колебаний). Решение (10) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя (10) в (9) и разлагая полученное выражение в ряд Фурье, получаем систему алгебраических уравнений

$$[K - \omega_j^2 M \Gamma] \mathbf{a} = 0,$$

где K — матрица жесткости, выражения для элементов которой приведены в [8]; I — единичная матрица; $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

При критическом значении скорости V_{cr} собственные частоты системы обращаются в нуль. Удерживая в разложении только два первых члена и полагая равными нулю детерминант алгебраической системы и собственные частоты системы трубка — жидкость, для критической скорости получаем уравнение

$$[4\pi^4 + 20\pi^6 e_n^2 + 16\pi^8 e_n^4]V^4 + [(-20\pi^6 - 8\pi^4\gamma_P - 5\pi^2\gamma_W) - e_n^2(320\pi^8 + 40\pi^6\gamma_P + 25\pi^4\gamma_W) - e_n^4(20\pi^6\gamma_W + 32\pi^8\gamma_P)]V^2 + [(16\pi^8 + 20\pi^6\gamma_P + 17\pi^4\gamma_W + 4\pi^4\gamma_P^2 + 5\pi^2\gamma_P\gamma_W + \gamma_W^2) + e_n^2(20\pi^6\gamma_W + 5\pi^2\gamma_W^2 + 32\pi^8\gamma_P + 20\pi^6\gamma_P^2 + 25\pi^4\gamma_P\gamma_W) + e_n^4(16\pi^6\gamma_P^2 + 20\pi^6\gamma_P\gamma_W + 4\pi^4\gamma_W^2)] = 0, \quad (11)$$

где

$$V = UL\sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_c + m_f} = \frac{m_f}{M}, \quad M = m_c + m_f, \\ \gamma_W = \frac{k_W L^4}{EI}, \quad \gamma_P = \frac{k_P L^2}{EI}, \quad e_n = \frac{e_0 a}{L}, \quad \Omega_j = \omega_j \sqrt{\frac{ML^4}{EI}}.$$

Уравнение (11) представляет собой квадратное уравнение относительно V^2 , решая которое находим критическое значение скорости трубки с шарнирно опертыми торцами.

1.5. *Решение уравнения (9) для случая трубки с защемленными торцами.* В случае трубки с защемленными торцами решение будем искать в виде [8, 19]

$$w(x, t) = \text{Re} [\varphi_n(x/L) e^{i\omega t}], \quad (12)$$

где Re — вещественная часть выражения; функции $\varphi_n(x/L)$ — конечные отрезки рядов по собственным функциям $\psi_r(\xi)$ балки с защемленными торцами:

$$\varphi_n(\xi) = \sum_{r=1}^n a_r \psi_r(\xi),$$

$\xi = x/L$; $\psi_r = \text{ch}(\lambda_r \xi) - \cos(\lambda_r \xi) - \sigma_r(\sin(\lambda_r \xi) - \sin(\lambda_r \xi))$; λ_r — частоты балки с защемленными торцами. При $r = 1, 2$ $\lambda_1 = 4,730\,041$, $\lambda_2 = 7,853\,205$ [20].

Подставляя выражение (12) в уравнение движения (9), получаем

$$L_n(\varphi) = L_n\left(\sum_{r=1}^n a_r \psi_r(\xi)\right),$$

где дифференциальный оператор L_n имеет вид

$$L_n = \left(EI - e_n^2 L^2 V^2 \frac{EI}{L^2} + e_n^2 L^2 \gamma_P \frac{EI}{L^2}\right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2e_n^2 L^2 M \beta \frac{V}{L} \sqrt{\frac{EI}{M\beta}} i\omega \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \\ + 2M\beta \frac{V}{L} \sqrt{\frac{EI}{M\beta}} i\omega \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{V^2 EI}{L^2} - \gamma_P \frac{EI}{L^2} - e_n^2 L^2 \gamma_W \frac{EI}{L^4}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_n^2 L^2 M \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \\ = M\omega^2 + \gamma_W \frac{EI}{L^4}.$$

С использованием метода Галеркина получаем систему уравнений

$$\int_0^L L\left(\sum_{r=1}^N a_r \psi_r(\xi)\right) \psi_s(\xi) dx = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Удерживая в разложении решения только два слагаемых и следуя работе [8], получаем уравнение для определения критической скорости потока в случае трубки с защемленными торцами

$$\begin{aligned}
& [C_{11}C_{22} - e_n^2(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) + e_n^2(\lambda_1^4 \lambda_2^4)]V^4 + \{[\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11} + (C_{11} + C_{22})\gamma_W - 2C_{11}C_{22}\gamma_P] + \\
& \quad + e_n^2[2\gamma_P(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) - 2\lambda_1^4 \lambda_2^4 - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4)\gamma_W - 2C_{11}C_{22}\gamma_W] - \\
& - e_n^4[\gamma_W(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) + 2\lambda_1^4 \lambda_2^4 \gamma_P]\}V^2 + \{[\lambda_1^4 \lambda_2^4 - \gamma_P(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) + (\lambda_1^4 + \lambda_2^4)\gamma_W + \\
& \quad + C_{11}C_{22}\gamma_P^2 + \gamma_W^2 - (C_{11} + C_{22})\gamma_P\gamma_W] + e_n^2[2\gamma_P\lambda_1^4 \lambda_2^4 + 2C_{11}C_{22}\gamma_P\gamma_W - \\
& \quad - \gamma_W(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) - \gamma_P^2(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11}) + (\lambda_1^4 + \lambda_2^4)\gamma_P\gamma_W - (C_{11} + C_{22})\gamma_W^2] + \\
& \quad + e_n^4[\lambda_1^4 \lambda_2^4 \gamma_P^2 + C_{11}C_{22}\gamma_W^2 - \gamma_P\gamma_W(\lambda_1^4 C_{22} + \lambda_2^4 C_{11})]\} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Уравнение (13) представляет собой квадратное уравнение относительно V^2 , константы C_{11} , C_{22} — константы интегрирования [21, 22].

2. Результаты исследования и их обсуждение. Критическое значение скорости V_{cr} является важной характеристикой устойчивости однослойной углеродной нанотрубки, переносящей жидкость. При критическом значении скорости собственные частоты обращаются в нуль, что приводит к неустойчивости однослойной углеродной нанотрубки. Наименьшие корни уравнений (11), (13) являются значениями критической скорости V_{cr} . Для трубок с защемленными и шарнирно опертыми торцами значения критической скорости вычислены для различных значений параметров жесткости Винклера γ_W и Пастернака γ_P , параметра нелокальности e_n .

2.1. *Трубка с шарнирно опертыми торцами.* В случае трубки с шарнирно опертыми торцами значение критической скорости определяется из решения уравнения (11). В табл. 1 приведены значения V_{cr} при различных значениях параметров жесткости упругого основания γ_W , γ_P и параметра нелокальности e_n . Критическая скорость уменьшается с увеличением параметра e_n , причем это уменьшение существеннее при малых значениях параметра жесткости Пастернака γ_P . Можно предположить, что при $\gamma_W = \gamma_P = 10^{-6}$ жесткость упругого основания равна нулю, а при $\gamma_W = \gamma_P = 10^6$ основание является абсолютно жестким. Из приведенных в табл. 1 данных также следует, что с увеличением жесткости основания увеличивается жесткость однослойной углеродной нанотрубки. Согласно результатам работы [6] критическая скорость не зависит от параметра нелокальности, однако этот вывод является следствием ошибки, допущенной при постановке задачи. В действительности от величины параметра нелокальности зависит величина критической скорости, причем эта зависимость существеннее при малых значениях параметров жесткости основания. При $e_n = 0$ результаты соответствуют результатам работы [6]. Данные, приведенные в табл. 1, соответствуют данным работы [10], что подтверждает правильность полученных результатов.

На рис. 2 приведена зависимость величины $\tilde{V}_{cr} = (V_{cr}|_{e_n}/V_{cr}|_{e_n=0}) \cdot 10^2$ от параметра нелокальности e_n при $\gamma_P = 0$ и различных значениях параметра жесткости γ_W . Из рис. 2 следует, что с увеличением параметра нелокальности критическая скорость уменьшается. Чем больше жесткость основания, тем меньше влияние параметра нелокальности на критическую скорость.

Таблица 1

Значения критической скорости V_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с шарнирно опертыми торцами при различных значениях параметра нелокальности e_n , параметров жесткости основания Пастернака γ_P и Винклера γ_W

| γ_P | γ_W | V_{cr} | | | | | | |
|------------|------------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | $e_n = 0$ | $e_n = 0,05$ | $e_n = 0,10$ | $e_n = 0,15$ | $e_n = 0,20$ | $e_n = 0,25$ | $e_n = 0,30$ |
| 10^{-6} | 10^{-6} | 3,1416 | 3,1035 | 2,9972 | 2,8419 | 2,6601 | 2,4707 | 2,2862 |
| | 1 | 3,1577 | 3,1198 | 3,0140 | 2,8596 | 2,6791 | 2,4911 | 2,3083 |
| | 10^2 | 4,4723 | 4,4457 | 4,3721 | 4,2671 | 4,1483 | 3,7308 | 3,3472 |
| | 10^4 | 17,1109 | 17,0069 | 16,7812 | 16,5593 | 16,3893 | 16,2693 | 16,1856 |
| | 10^6 | 159,2789 | 159,2678 | 159,2438 | 159,2206 | 159,2030 | 159,1907 | 159,1822 |
| 1 | 10^{-6} | 3,2969 | 3,2607 | 3,1596 | 3,0127 | 2,8418 | 2,6654 | 2,4954 |
| | 1 | 3,3122 | 3,2762 | 3,1756 | 3,0294 | 2,8596 | 2,6843 | 2,5156 |
| | 10^2 | 4,5828 | 4,5568 | 4,4850 | 4,3827 | 4,2671 | 3,8625 | 3,4934 |
| | 10^4 | 17,1401 | 17,0363 | 16,8109 | 16,5895 | 16,4198 | 16,3000 | 16,2165 |
| | 10^6 | 159,2821 | 159,2709 | 159,2470 | 159,2237 | 159,2062 | 159,1938 | 159,1853 |
| 10^2 | 10^{-6} | 10,4819 | 10,4705 | 10,4395 | 10,3960 | 10,3478 | 10,3007 | 10,2580 |
| | 1 | 10,4867 | 10,4754 | 10,4443 | 10,4008 | 10,3527 | 10,3056 | 10,2629 |
| | 10^2 | 10,9545 | 10,9437 | 10,9140 | 10,8724 | 10,8263 | 10,6733 | 10,5453 |
| | 10^4 | 19,8187 | 19,7290 | 19,5348 | 19,3445 | 19,1992 | 19,0968 | 19,0256 |
| | 10^6 | 159,5925 | 159,5814 | 159,5575 | 159,5343 | 159,5168 | 159,5045 | 159,4960 |
| 10^4 | 10^{-6} | 100,0493 | 100,0481 | 100,0449 | 100,0404 | 100,0354 | 100,0305 | 100,0261 |
| | 1 | 100,0498 | 100,0487 | 100,0454 | 100,0409 | 100,0359 | 100,0310 | 100,0266 |
| | 10^2 | 100,1000 | 100,0988 | 100,0955 | 100,0910 | 100,0860 | 100,0696 | 100,0560 |
| | 10^4 | 101,4533 | 101,4359 | 101,3983 | 101,3618 | 101,3341 | 101,3148 | 101,3014 |
| | 10^6 | 188,0685 | 188,0591 | 188,0388 | 188,0192 | 188,0043 | 187,9938 | 187,9866 |
| 10^6 | 10^{-6} | 1000,0049 | 1000,0048 | 1000,0045 | 1000,0040 | 1000,0035 | 1000,0030 | 1000,0026 |
| | 1 | 1000,0050 | 1000,0049 | 1000,0045 | 1000,0041 | 1000,0036 | 1000,0030 | 1000,0027 |
| | 10^2 | 1000,0100 | 1000,0099 | 1000,0096 | 1000,0091 | 1000,0086 | 1000,0070 | 1000,0056 |
| | 10^4 | 1000,1464 | 1000,1446 | 1000,1408 | 1000,1371 | 1000,1343 | 1000,1320 | 1000,1310 |
| | 10^6 | 1012,6054 | 1012,6037 | 1012,5999 | 1012,5963 | 1012,5935 | 1012,5910 | 1012,5902 |

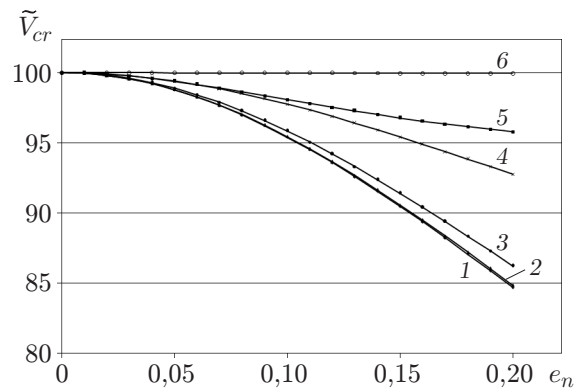


Рис. 2. Зависимость величины \tilde{V}_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с шарнирно опертыми торцами от параметра нелокальности e_n при $\gamma_P = 0$ и различных значениях параметра жесткости основания Винклера γ_W :
 1 — $\gamma_W = 0$, 2 — $\gamma_W = 1$, 3 — $\gamma_W = 10$, 4 — $\gamma_W = 10^2$, 5 — $\gamma_W = 10^4$, 6 — $\gamma_W = 10^6$

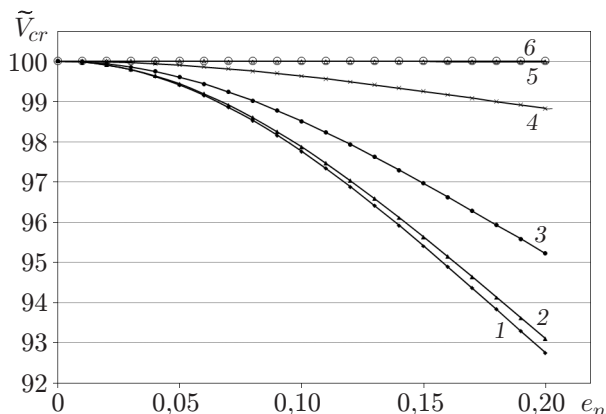


Рис. 3

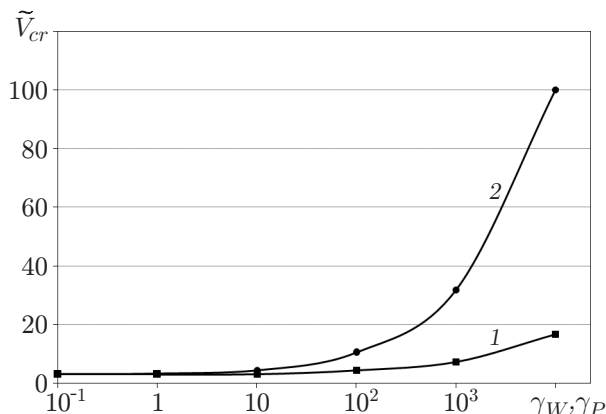


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость величины \tilde{V}_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с шарнирно опертыми торцами от параметра нелокальности e_n при $\gamma_W = 100$ и различных значениях параметра жесткости основания Пастернака γ_P : 1 — $\gamma_P = 0$, 2 — $\gamma_P = 1$, 3 — $\gamma_P = 10$, 4 — $\gamma_P = 10^2$, 5 — $\gamma_P = 10^4$, 6 — $\gamma_P = 10^6$

Рис. 4. Зависимости величины \tilde{V}_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с шарнирно опертыми торцами от параметров жесткости основания γ_W (1), γ_P (2) при $e_n = 0,1$

На рис. 3 приведена зависимость критической скорости для шарнирно опертой однослойной углеродной нанотрубки от параметра нелокальности e_n при $\gamma_W = 100$ и различных значениях жесткости основания Пастернака γ_P . Видно, что параметр жесткости Пастернака оказывает более существенное влияние на устойчивость система трубка — жидкость, чем параметр жесткости основания Винклера. Влияние нелокального параметра также уменьшается.

На рис. 4 приведены зависимости критической скорости от параметров жесткости основания Пастернака и Винклера. Видно, что при увеличении параметра жесткости Пастернака критическая скорость увеличивается быстрее, чем при увеличении параметра жесткости Винклера.

2.2. Трубка с заземленными торцами. В случае трубки с заземленными торцами значение критической скорости определяется из решения уравнения (13). В табл. 2 приведены значения V_{cr} при различных значениях параметров жесткости упругого основания γ_W , γ_P и параметра нелокальности e_n . При малых значениях параметров жесткости основания критическая скорость для трубки с заземленными торцами больше, чем для трубки с шарнирно опертыми торцами. Для трубки с заземленными торцами влияние параметра нелокальности на критическую скорость существеннее, чем для трубки с шарнирно опертыми торцами (см. табл. 1 и рис. 5, 6). Характер зависимости критической скорости от параметра нелокальности среды для трубки с заземленными торцами отличается от характера аналогичной зависимости для трубки с шарнирно опертыми торцами.

На рис. 7 приведены зависимости критической скорости от параметров жесткости упругого основания. Как и предполагалось, параметр жесткости Пастернака оказывает на критическую скорость более существенное влияние, чем параметр жесткости Винклера.

Заключение. В работе исследована устойчивость однослойной углеродной нанотрубки, транспортирующей жидкость и погруженной в двухпараметрическую упругую среду Пастернака. Уравнения задачи выведены с использованием нелокальной теории упругости.

Таблица 2

Значения критической скорости V_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с заземленными торцами при различных значениях параметра нелокальности e_n , параметров жесткости основания Пастернака γ_P и Винклера γ_W

| γ_P | γ_W | V_{cr} | | | | | | |
|------------|------------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | $e_n = 0$ | $e_n = 0,05$ | $e_n = 0,10$ | $e_n = 0,15$ | $e_n = 0,20$ | $e_n = 0,25$ | $e_n = 0,30$ |
| 10^{-6} | 10^{-6} | 6,3787 | 6,0771 | 5,3778 | 4,6089 | 3,9351 | 3,3888 | 2,9543 |
| | 1 | 6,3851 | 6,0833 | 5,3838 | 4,6147 | 3,9410 | 3,3948 | 2,9605 |
| | 10^2 | 6,9868 | 6,6735 | 5,9505 | 5,1633 | 4,4834 | 3,8432 | 3,3344 |
| | 10^4 | 17,3133 | 16,4064 | 14,7962 | 13,5492 | 12,7510 | 12,2502 | 11,9272 |
| | 10^6 | 147,6417 | 141,9136 | 131,9639 | 124,4889 | 119,8285 | 116,9607 | 115,1358 |
| 1 | 10^{-6} | 6,4566 | 6,1588 | 5,4700 | 4,7161 | 4,0602 | 3,5333 | 3,1189 |
| | 1 | 6,4629 | 6,1650 | 5,4759 | 4,7218 | 4,0659 | 3,5390 | 3,1248 |
| | 10^2 | 7,0580 | 6,7480 | 6,0340 | 5,2593 | 4,5936 | 3,9712 | 3,4811 |
| | 10^4 | 17,3422 | 16,4368 | 14,8299 | 13,5861 | 12,7902 | 12,2910 | 11,9691 |
| | 10^6 | 147,6451 | 141,9172 | 131,9677 | 124,4930 | 119,8327 | 116,9650 | 115,1402 |
| 10^2 | 10^{-6} | 11,8612 | 11,7018 | 11,3543 | 11,0110 | 10,7464 | 10,5586 | 10,4273 |
| | 1 | 11,8646 | 11,7050 | 11,3572 | 11,0134 | 10,7486 | 10,5605 | 10,4290 |
| | 10^2 | 12,1990 | 12,0223 | 11,6365 | 11,2543 | 10,9591 | 10,7131 | 10,5413 |
| | 10^4 | 19,9938 | 19,2138 | 17,8585 | 16,8399 | 16,2046 | 15,8135 | 15,5646 |
| | 10^6 | 147,9799 | 142,2655 | 132,3423 | 124,8899 | 120,2451 | 117,3874 | 115,5693 |
| 10^4 | 10^{-6} | 100,2032 | 100,1845 | 100,1445 | 100,1062 | 100,0774 | 100,0574 | 100,0436 |
| | 1 | 100,2036 | 100,1849 | 100,1448 | 100,1064 | 100,0776 | 100,0576 | 100,0438 |
| | 10^2 | 100,2438 | 100,2224 | 100,1769 | 100,1332 | 100,1005 | 100,0738 | 100,0556 |
| | 10^4 | 101,4877 | 101,3369 | 101,0887 | 100,9137 | 100,8097 | 100,7475 | 100,7088 |
| | 10^6 | 178,3201 | 173,6073 | 165,5732 | 159,6794 | 156,0733 | 153,8825 | 152,5000 |
| 10^6 | 10^{-6} | 1000,0200 | 1000,0190 | 1000,0150 | 1000,0110 | 1000,0080 | 1000,0060 | 1000,0040 |
| | 1 | 1000,0200 | 1000,0190 | 1000,0150 | 1000,0110 | 1000,0080 | 1000,0060 | 1000,0040 |
| | 10^2 | 1000,0240 | 1000,0220 | 1000,0180 | 1000,0130 | 1000,0100 | 1000,0070 | 1000,0060 |
| | 10^4 | 1000,1500 | 1000,1350 | 1000,1100 | 1000,0920 | 1000,0810 | 1000,0750 | 1000,0710 |
| | 10^6 | 1010,8400 | 1010,0200 | 1008,6700 | 1007,7190 | 1007,1540 | 1006,8170 | 1006,6060 |

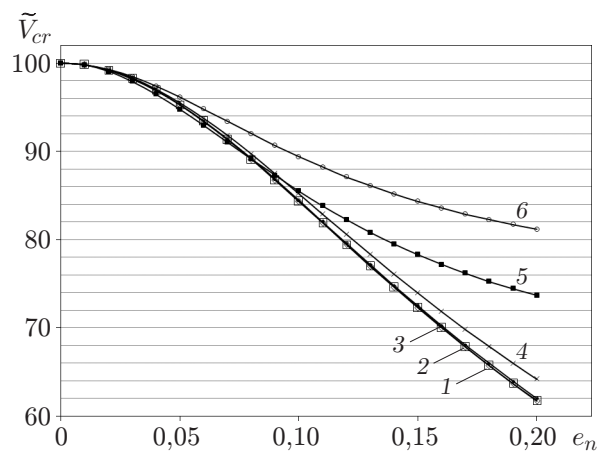


Рис. 5. Зависимость величины \tilde{V}_{cr} для трубки с заземленными торцами от параметра нелокальности среды e_n при различных значениях параметра жесткости основания Винклера γ_W :

1 — $\gamma_W = 0$, 2 — $\gamma_W = 1$, 3 — $\gamma_W = 10$, 4 — $\gamma_W = 10^2$, 5 — $\gamma_W = 10^4$, 6 — $\gamma_W = 10^6$

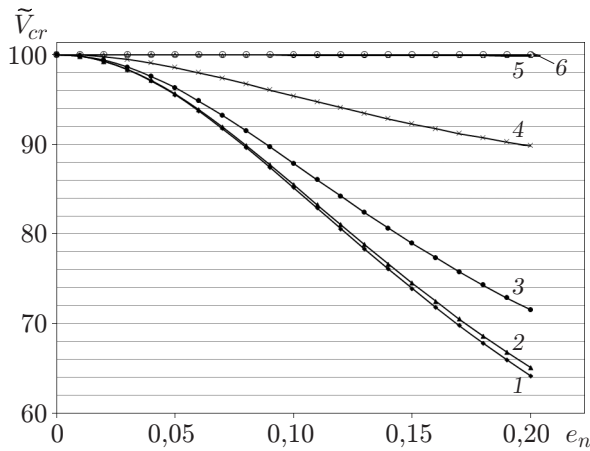


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость величины \tilde{V}_{cr} для трубки с защемленными торцами от параметра нелокальности среды e_n при различных значениях параметра жесткости основания Пастернака γ_P :

1 — $\gamma_P = 0$, 2 — $\gamma_P = 1$, 3 — $\gamma_P = 10$, 4 — $\gamma_P = 10^2$, 5 — $\gamma_P = 10^4$, 6 — $\gamma_P = 10^6$

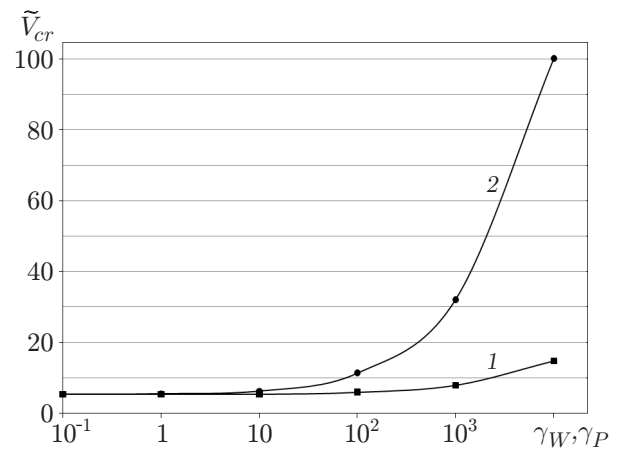


Рис. 7

Рис. 7. Зависимости величины \tilde{V}_{cr} для однослойной углеродной нанотрубки с защемленными торцами от параметров жесткости основания γ_W (1) и γ_P (2) при $e_n = 0,1$

Решение уравнения для критической скорости для трубки с шарнирно опертыми торцами получено с использованием разложения в ряд Фурье, для трубки с защемленными торцами — с использованием метода Галеркина. Установлено, что с увеличением параметра нелокальности среды трубка становится менее устойчивой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A. Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid // Composites Sci. Technol. 2005. V. 65. P. 1326–1336.
2. Reddy C. D., Lu C., Rajendran S., Liew K. M. Free vibration analysis of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 90. P. 122–133.
3. Chang W. J., Lee H. L. Free vibration of a single-walled carbon nanotube containing a fluid flow using the Timoshenko beam model // Phys. Lett. A. 2009. V. 373. P. 982–985.
4. Eringen A. C., Edelen G. B. On nonlocal elasticity // Intern. J. Engng Sci. 1972. N 10. P. 233–248.
5. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. N. Y.: Springer-Verlag, 2002.
6. Lee H. L., Chang W. J. Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. 24302.
7. Lee H. L., Chang W. J. Vibration analysis of a viscous fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium // Physica E. 2009. V. 41. P. 529–532.
8. Simha H. S. Vibrations and stability of fluid conveying pipes resting on elastic media: Ph. D. Thesis. Hyderabad: Osmania Univ., 2013.
9. Tounsi A., Heireche H., Bedia E. A. A. Comment on “Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory” // J. Appl. Phys. 2009. V. 105. 126105.

10. **Wang L.** Vibration and instability analysis of tubular nano- and micro-beams conveying fluid using nonlocal elastic theory // *Physica E*. 2009. V. 41. P. 1835–1840.
11. **Farshidianfar A., Ghassabi A. A., Farshidianfar M. H.** Transverse vibration of fluid conveying carbon nanotubes embedded in two-parameter elastic medium // *Proc. of the 18th Intern. congress on sound and vibration, Rio de Janeiro (Brazil), 10–14 July, 2011*. S. l.: Intern. Inst. of Acoustic and Vibration, 2012. P. 2380–2387.
12. **Feng Liang, Bao Ridong.** Stability analysis of a fluid-conveying carbon nanotube with consideration of nonlocal and surface effects // *Mech. Engng.* 2014. V. 36, N 1. P. 48–53.
13. **Ghorbanpour Arani A., Amir S.** Nonlocal vibration of embedded coupled CNTs conveying fluid under thermo-magnetic fields via Ritz method // *J. Solid Mech.* 2013. V. 5, N 2. P. 206–215.
14. **Hosseini M., Sadeghi-Goughari M., Atashipour S. A., Eftekhar M.** Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes conveying nanoflow embedded in a viscoelastic medium using modified nonlocal beam model // *Arch. Mech.* 2014. V. 66, N 4. P. 217–244.
15. **Reddy J. N., Wang C. M.** Dynamics of fluid-conveying beams. Singapore, 2004. (Rep. / Center for Offshore Res. and Engng, Nat. Univ. of Singapore; N 2004-03).
16. **Ghorbanpour Arani A., Amir S., Karamali Ravandi A.** Nonlinear flow-induced flutter instability of double CNTs using Reddy beam theory // *J. Comput. Appl. Mech.* 2015. V. 46, N 1. P. 1–12.
17. **Zhang T., Ouyang H., Zhang Y. O., Lv B. L.** Nonlinear dynamics of straight fluid-conveying pipes with general boundary conditions and additional springs and masses // *Appl. Math. Modelling.* 2016. V. 40, N 17/18. P. 7880–7990.
18. **Kerr A. D.** Elastic and viscoelastic foundation model // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1964. V. 31, iss. 3. P. 491–498.
19. **Rao Ch. K., Simha H. S.** Critical velocity of fluid conveying pipes resting on two-parameter foundation // *J. Sound Vibrat.* 2007. V. 302. P. 387–397.
20. **Rao S. S.** Mechanical vibrations. S. l.: Addison-Wesley Publ. Company, 1986.
21. **Felgar R. P.** Formulas for integrals containing characteristic functions of a vibrating beam. S. l.: Univ. Texas, 1950.
22. **Rao Ch. K., Simha H. S.** Vibrations of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation // *Open Acoust. J.* 2008. N 1. P. 24–33.

*Поступила в редакцию 1/X 2015 г.,
в окончательном варианте — 17/VI 2016 г.*
