

**РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА
В ОДНОСКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ
ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ РАХМАТУЛИНА**

УДК 532.529.5

В. С. Суров

Челябинский государственный университет, 454136 Челябинск

Приведено полное решение задачи Римана для односкоростной модели дисперсной среды Рахматулина.

При исследовании волновых явлений в пенообразных средах достаточно часто используется модель Рудингера [1]. Недостатки последней отмечены в [2, 3], и в [3] предложено использовать модель Рахматулина [4] вместо модели Рудингера. В настоящей работе приведено полное решение задачи распада произвольного разрыва для односкоростной модели дисперсной среды Рахматулина. С помощью описанного в работе алгоритма решения задачи Римана рассчитаны некоторые автомодельные задачи по взаимодействию воздушных ударных волн (УВ) с пенообразной средой, представляющей собой бинарную смесь идеального газа и несжимаемой жидкости. Отметим также, что данная задача в качестве основного элемента входит в численные схемы типа схем Годунова [5]. Включение приведенного в работе алгоритма в указанные схемы позволяет существенно расширить круг рассматриваемых задач.

Обозначим через $\rho_g(\rho_l)$ приведенную плотность газового (жидкого) компонента, т. е. массы компонента, приходящейся на единицу объема среды. Очевидно, что плотность смеси ρ вычисляется из выражения

$$\rho = \rho_g + \rho_l. \quad (1)$$

Введя объемные доли компонентов смеси $\alpha_k = \rho_k/\rho_k^0$, где ρ_k^0 — истинная плотность k -го компонента, соотношение (1) перепишем в виде

$$\rho = \alpha_g \rho_g^0 + \alpha_l \rho_l^0, \quad \alpha_g + \alpha_l = 1. \quad (2)$$

В модели Рахматулина принят закон независимой сжимаемости компонентов среды, причем давление в каждой составляющей смеси равно давлению среды p . Зависимости

$$\rho_l^0 = \varphi_l(p), \quad \rho_g^0 = \varphi_g(p) \quad (3)$$

считаются известными функциями давления. Для жидкости, которую будем считать несжимаемой, $\rho_l^0 = \varphi_l(p) = \text{const}$. При необходимости можно учесть сжимаемость жидкости, воспользовавшись для этого, например, уравнением состояния в форме Тэта [4].

Отметим индексом нуль значения параметров смеси в начальном состоянии. Тогда из условия сохранения массы следует соотношение

$$\rho_0/\rho = \alpha_{g0} \rho_{g0}^0/\varphi_g(p) + \alpha_{l0}. \quad (4)$$

Так как газ полагался идеальным с показателем адиабаты γ , для изоэнтропических

процессов его плотность связана с давлением соотношением $\rho_g^0 = \rho_{g0}^0 (p/p_0)^{1/\gamma}$.

С учетом принятых допущений уравнение состояния смеси (4) для указанного процесса принимает вид

$$p = p_0 \left(\frac{\alpha_{g0} \rho}{\rho_0 - \alpha_{l0} \rho} \right)^\gamma. \quad (5)$$

С использованием (5) скорость звука в смеси вычисляется из выражения

$$c_f = \frac{c_{f0} \rho_0}{\rho} \left(\frac{\alpha_{g0} \rho}{\rho_0 - \alpha_{l0} \rho} \right)^{(\gamma+1)/2}, \quad (6)$$

где $c_{f0} = \sqrt{p_0 \gamma / \rho_0 \alpha_{g0}}$ — скорость звука, относящаяся к начальному состоянию среды с параметрами p_0, ρ_0 . Соответствующие инварианты Римана имеют вид

$$s = u - \sigma(\rho), \quad r = u + \sigma(\rho), \quad \sigma(\rho) = \int_0^\rho \frac{c_f(\rho) d\rho}{\rho} = \frac{2c_f(\rho_0 - \alpha_{l0} \rho)}{(\gamma - 1)\rho_0}. \quad (7)$$

В случае ударного сжатия смеси вместо зависимостей (3) используются выражения $\rho_l^0 = \psi_l(p), \rho_g^0 = \psi_g(p)$ [4]. Так как жидкость несжимаема, то $\rho_l^0 = \psi_l(p) = \text{const}$. Сжатие газа происходит в соответствии с ударной адиабатой Гюгонио

$$\psi_g(p) = \rho_{g0} \frac{\chi p + p_0}{\chi p_0 + p}, \quad \chi = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

Таким образом, уравнение состояния смеси (4) для данного процесса принимает вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_{l0} + \alpha_{g0} \frac{\chi p_0 + p}{\chi p + p_0}. \quad (8)$$

Пусть имеются две бесконечные массы дисперсной среды, граничащие в начальный момент ($t = 0$) вдоль плоскости $x = 0$, которые характеризуются постоянными параметрами $p_1, u_1, \rho_1, \alpha_{l1}$ и $p_0, u_0, \rho_0, \alpha_{l0}$. Необходимо рассчитать течение, возникающее при $t > 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $p_1 \geq p_0, u_0 = 0$.

Известно, что если произвольный разрыв не является контактным или УВ, то он распадается (при $t > 0$), формируя либо две УВ, либо волну разрежения и УВ, либо две волны разрежения [5]. Рассмотрим подробнее перечисленные случаи.

Две ударные волны. Система уравнений для правой УВ, выражающая законы сохранения массы и импульса при переходе через фронт УВ, совместно с уравнением состояния (8) имеет вид

$$(\rho_+ - \rho_0)D_+ = \rho_+ u_+, \quad \rho_+ u_+ D_+ = p_+ + \rho_+ u_+^2 - p_0, \quad \frac{\rho_0}{\rho_+} = \alpha_{l0} + \alpha_{g0} \frac{\chi p_0 + p_+}{\chi p_+ + p_0}. \quad (9)$$

Для левой УВ система уравнений аналогична:

$$(\rho_- - \rho_1)D_- = \rho_- u_- - \rho_1 u_1, \quad (\rho_- u_- - \rho_1 u_1)D_- = p_- + \rho_- u_-^2 - p_1 - \rho_1 u_1^2, \quad (10)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_-} = \alpha_{l1} + \alpha_{g1} \frac{\chi p_1 + p_-}{\chi p_- + p_1}.$$

В (9), (10) индексами плюс и минус отмечены параметры смеси в области контактного разрыва, относящиеся к величинам, расположенным соответственно справа и слева от него.

На контактной границе давление и скорость не претерпевают изменений. Таким образом, выполняются условия сопряжения

$$u_+ = u_- = U, \quad p_+ = p_- = P. \quad (11)$$

Из соотношений (9)–(11) получим уравнение для вычисления P :

$$u_1 - \sqrt{\frac{(P - p_1)(\beta_1 P - \beta_2 p_1)}{\rho_1(\chi P + p_1)}} = \sqrt{\frac{(P - p_0)(\alpha_1 P - \alpha_2 p_0)}{\rho_0(\chi P + p_0)}}, \quad (12)$$

где $\alpha_1 = \alpha_{g0}(\chi - 1)$, $\alpha_2 = \alpha_{g0}\chi$, $\beta_1 = \alpha_{g1}(\chi - 1)$, $\beta_2 = \alpha_{g1}\chi$. Искомый корень уравнения (12) находится численно с помощью стандартного решения нелинейных уравнений. Заметим, что $P \geq p_1$, иначе уравнение (12) не имеет действительных корней. Остальные параметры вычисляются из выражений

$$U = \sqrt{\frac{(P - p_0)(\alpha_1 P - \alpha_2 p_0)}{\rho_0(\chi P + p_0)}}, \quad \rho_- = \frac{\rho_1(\chi P + p_1)}{\beta_3 P + \beta_4 p_1}, \quad \rho_+ = \frac{\rho_0(\chi P + p_0)}{\alpha_3 P + \alpha_4 p_0},$$

где $\alpha_3 = \alpha_{g0} + \chi\alpha_{l0}$, $\alpha_4 = \alpha_{g0}\chi + \alpha_{l0}$, $\beta_3 = \alpha_{g1} + \chi\alpha_{l1}$, $\beta_4 = \alpha_{g1}\chi + \alpha_{l1}$.

Конфигурация с двумя УВ имеет место в случае, когда $u_1 \geq u_*$, где

$$u_* = \sqrt{\frac{(p_1 - p_0)(\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_0)}{\rho_0(\chi p_1 + p_0)}}. \quad (13)$$

Волна разрежения и ударная волна. Если $u_1 < u_*$, то реализуется режим течения с волной разрежения, распространяющейся влево от контактного разрыва, и с УВ, движущейся вправо. Для УВ справедливы соотношения (9). Учитывая, что в волне разрежения r -инвариант Римана постоянен, имеем

$$u_1 + \frac{2c_{f1}\alpha_{g1}}{\gamma - 1} = u_- + \frac{2c_{f-}(\rho_1 - \alpha_{l1}\rho_-)}{(\gamma - 1)\rho_1}. \quad (14)$$

Давления в невозмущенной среде и за центрированной волной разрежения связаны выражением

$$p_- = p_1 \left(\frac{\alpha_{g1}\rho_-}{\rho_1 - \alpha_{l1}\rho_-} \right)^\gamma. \quad (15)$$

Из соотношений (9), (11), (14), (15) получаем следующее уравнение для вычисления давления P на контактном разрыве:

$$u_1 + \frac{2c_{f1}\alpha_{g1}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] = \sqrt{\frac{(P - p_0)(\alpha_1 P - \alpha_2 p_0)}{\rho_0(\chi P + p_0)}}. \quad (16)$$

Уравнение (16), как и в случае течения с двумя УВ, решалось численно. Корень уравнения (16) располагается на отрезке (p_0, p_1) .

Указанная конфигурация имеет место в случае, когда $u_{**} \leq u_1 < u_*$, где

$$u_{**} = -\frac{2c_{f1}\alpha_{g1}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right]. \quad (17)$$

Две волны разрежения. Если $u_{***} \leq u_1 < u_{**}$, где

$$u_{***} = -\frac{2}{\gamma - 1} (\alpha_{g0}c_{f0} + \alpha_{g1}c_{f1}), \quad (18)$$

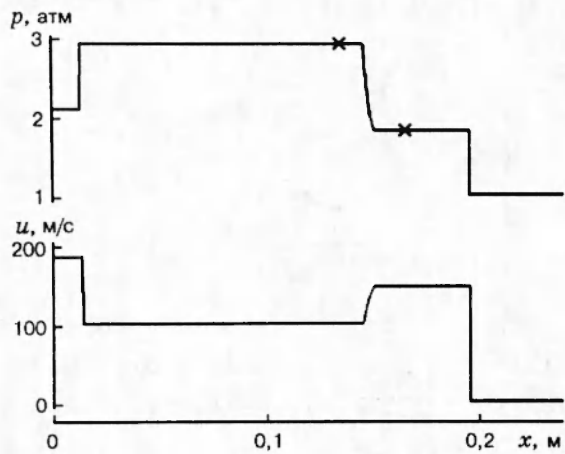


Рис. 1

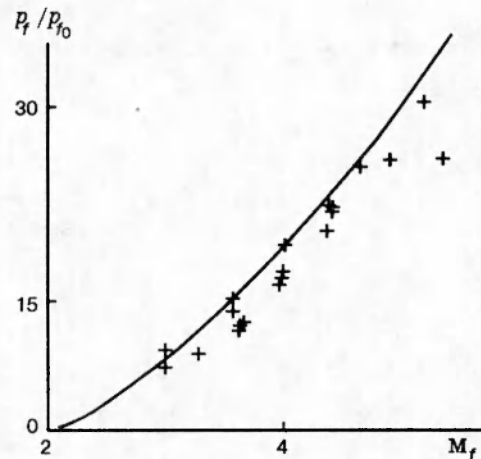


Рис. 2

Рис. 1. Распределения $p(x)$ и $u(x)$, рассчитанные к моменту времени $t = 0,35$ мс (пена располагается между крестиками на кривой давления)

Рис. 2. Зависимости перепада давления на фронте ударной волны в пене от числа Маха M_f , полученные расчетным (линия) и экспериментальным (точки, данные работы [2]) путем

то реализуется режим течения с двумя волнами разрежения. Для левой волны разрежения справедливы соотношения (14), (15). Для правой волны необходимо использовать условие сохранения z -инварианта Римана

$$u_+ - \frac{2c_{f+}(\rho_0 - \alpha_{l0}\rho_+)}{(\gamma - 1)\rho_0} = -\frac{2c_{f0}\alpha_{g0}}{\gamma - 1} \tag{19}$$

совместно с уравнением состояния

$$p_+ = p_0 \left(\frac{\alpha_{g0}\rho_+}{\rho_+ - \alpha_{l0}\rho_0} \right)^\gamma \tag{20}$$

Из соотношений (14), (15), (19), (20) получим уравнение для расчета P

$$u_1 + \frac{2c_{f1}\alpha_{g1}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] = \frac{2c_{f0}\alpha_{g0}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right] \tag{21}$$

Корень уравнения (21) располагается на отрезке $(0, p_0)$.

В случае $u_1 < u_{***}$ между волнами разрежения имеется зона вакуума ($P = 0$). С течением времени область вакуума расширяется в соответствии со скоростью перемещения ее крайних границ:

$$u_{\nu 1} = u_1 + \frac{2\alpha_{g1}c_{f1}}{\gamma - 1}, \quad u_{\nu 0} = -\frac{2\alpha_{g0}c_{f0}}{\gamma - 1}.$$

Отметим, что при $\alpha_{l0} \rightarrow 0, \alpha_{l1} \rightarrow 0$ все приведенные выше соотношения асимптотически стремятся к соответствующим выражениям для идеального газа [5].

С использованием описанного алгоритма решения задачи распада произвольного разрыва рассчитано взаимодействие воздушной УВ со слоем однородной пены толщиной h . Число Маха $M_{gs} = D_{gs}/c_{g0}$ в УВ, падающей на пену варьировалось от 1,1 до 4.

На рис. 1 представлены характерные распределения давления и скорости при $M_{gs} =$

1,4, $\rho_{f0} = 10 \text{ кг/м}^3$, $\gamma = 1,4$, $h = 5 \text{ см}$. Время отсчитывалось с момента касания поверхности пены фронтом УВ. Расчет течения, возникающего при их взаимодействии, сводился к решению двух задач. С помощью первой определялись параметры в отраженной от пены воздушной УВ и движущейся в пене волны. В момент, когда УВ достигает границы раздела пена — газ, рассчитывалась вторая задача, с помощью которой определялись параметры двухфазной среды в волне разрежения и в УВ, распространяющейся в газе за пеной.

На рис. 2 приведены значения перепада давления p_f/p_{f0} на фронте УВ, распространяющейся в пене ($\rho_{f0} = 20 \text{ кг/м}^3$), в зависимости от числа Маха $M_f = D_f/c_{f0}$. Эти значения рассчитаны по равновесной модели дисперсной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rudinger G. Some effects of finite particle volume on the dynamics of gase-particle mixtures // AIAA J. 1965. V. 3, N 7.
2. Малахов А. Т., Паламарчук Б. И. Отражение ударных волн в газожидкостных пенах // ПМТФ. 1985. № 1. С. 129.
3. Суров В. С. О распространении волн в пенах / Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34, № 2. С. 285.
4. Рахматулин Х. А. О распространении волн в многокомпонентных средах // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, Вып. 4. С. 598.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 12/III 1996 г.,
в окончательном варианте — 17/V 1996 г.*
