



**ОБ ОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ  
УПРУГИХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА**

**А. Ф. Ревуженко, С. В. Лавриков, О. А. Микенина**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: lvk64@mail.ru,  
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Плоская деформация упругого тела должна описываться пятью определяющими уравнениями. В законе Гука фигурируют только три уравнения. Еще два уравнения неявно содержатся в предположении о гладкости поля перемещений. В работе строится разностная схема решения плоской задачи теории упругости, которая опирается на пять определяющих уравнений и две разностные сетки, вложенные друг в друга с определенным шагом. Рассмотрена численная реализация построенной схемы и даны примеры решения краевых задач.

*Упругость, определяющие уравнения, разностные схемы, гладкость функций*

**ABOUT ONE ALTERNATIVE DIFFERENCE SCHEME OF NUMERICAL SOLUTION OF ELASTIC  
PROBLEMS OF DETERMINING ROCK MASS STRESS-STRAIN STATE**

**A. F. Revuzhenko, S. V. Lavrikov, and O. A. Mikenina**

*Chinakal Mining Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
E-mail: lvk64@mail.ru, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The plane deformation of an elastic body should be described by five constitutive equations. Hook's law contains only three equations. Two more equations are implicitly contained in the assumption of displacement field smoothness. In the paper a difference scheme is constructed to solve a plane elastic problem. The scheme is based on five constitutive equations and two difference meshes embedded in each other with a certain step. The numerical implementation of the scheme and examples of solving the boundary value problems are considered.

*Elasticity, constitutive equations, difference schemes, smoothness of functions*

Как известно, теория упругости является основным инструментом решения задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) горного массива. На ее основе решается множество практических задач механики горных пород с привлечением как аналитических [1–6], так и численных [7–15] методов исследования (конечных разностей, конечных элементов, граничных интегральных уравнений, бессеточных и др.). Развитие теории идет в двух направлениях: первое — это учет неупругих деформаций пластичности и ползучести, второе — это развитие самой теории упругости. И это направление еще далеко не исчерпало себя.

**Разностная схема.** Интересно отметить, что необходимость в альтернативных подходах к самой теории упругости можно увидеть уже на самых первых шагах ее построения. Как строится теория? Вначале берется образец материала любой удобной формы и изучается его поведение в условиях однородного напряженно-деформированного состояния. Например, в случае плоской деформации можно прийти к выводу о том, что для образца номер  $(i, j)$ , показанного на рис. 1а, выполняются три соотношения (закон Гука):

$$\begin{aligned} \frac{u_1(A_{ij}) - u_1(C_{ij})}{2l} &= \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_{11}(A_{ij}) + \sigma_{11}(C_{ij})}{2} - \nu \frac{\sigma_{22}(B_{ij}) + \sigma_{22}(D_{ij})}{2} \right), \\ \frac{u_2(B_{ij}) - u_2(D_{ij})}{2l} &= \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_{22}(B_{ij}) + \sigma_{22}(D_{ij})}{2} - \nu \frac{\sigma_{11}(A_{ij}) + \sigma_{11}(C_{ij})}{2} \right), \\ \frac{u_2(B_{ij}) - u_2(D_{ij})}{2l} &= \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_{22}(B_{ij}) + \sigma_{22}(D_{ij})}{2} - \nu \frac{\sigma_{11}(A_{ij}) + \sigma_{11}(C_{ij})}{2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$ ,  $\nu$  — постоянные материала;  $2l$  — размер образца;  $Ox_1x_2$  — декартовы координаты;  $u_1, u_2$  — компоненты перемещений;  $\sigma_{11}, \dots$  — компоненты соответствующих сил, отнесенные к  $2l$ . В указанных равенствах размер  $l$  можно принять любым. Например, если предполагается построение континуальных моделей классического математического анализа, то  $l$  — это бесконечно малая величина, если возникает необходимость использования неархимедова анализа [16], то  $l$  — это актуальная бесконечно малая величина, для численного решения задач  $l$  — малая, но конечная величина. Во всех случаях необходимо переходить к изучению неоднородного напряженно-деформированного состояния. Но здесь мы сразу сталкиваемся с одним парадоксом. Его можно пояснить на таком примере. Пусть требуется найти численное решение задачи о деформировании области размером  $8l \times 8l$  (рис. 1б) (элемент среды  $2l \times 2l$  будем называть частицей). Рассмотрим баланс уравнений. На каждом внутреннем и граничном контакте определены вектор силы и вектор смещения (четыре степени свободы). Число внутренних контактов — 24, внешних — 16, всего — 40. Имеем 160 степеней свободы. Граничные условия уменьшают число степеней свободы на 32 (на каждом из 16 внешних контактов заданы два условия: смещения или силы, либо их определенные комбинации). Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(A_{ij}) - \sigma_{11}(C_{ij}) + \sigma_{21}(B_{ij}) - \sigma_{21}(D_{ij}) + X_1(O_{ij}) &= 0, \\ \sigma_{12}(A_{ij}) - \sigma_{12}(C_{ij}) + \sigma_{22}(B_{ij}) - \sigma_{22}(D_{ij}) + X_2(O_{ij}) &= 0, \\ \sigma_{12}(A_{ij}) + \sigma_{12}(C_{ij}) - \sigma_{21}(B_{ij}) - \sigma_{21}(D_{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

уменьшают число степеней свободы на 48 (три уравнения для каждой частицы). Следовательно, определяющие уравнения должны уменьшить число степеней свободы на  $160 - (32 + 48) = 80$ . Значит, для каждой из 16 частиц должно быть сформулировано  $80 / 16 = 5$  определяющих уравнений. Однако в классической теории их только три!

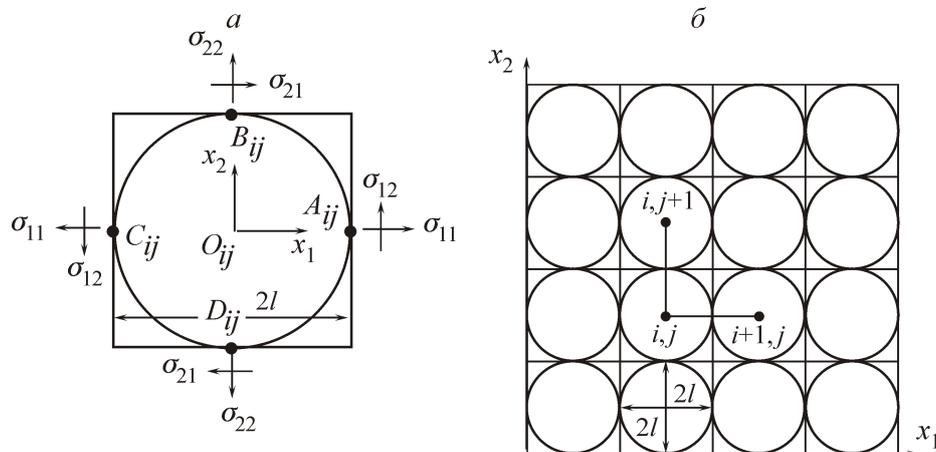


Рис. 1. Направления усилий в образце упругого тела размером  $2l$  (а) и модельная схема из 16 частиц, формирующих область размером  $8l \times 8l$  (б)

Парадоксальность ситуации состоит в том, что с одной стороны, трех определяющих уравнений вполне достаточно для построения классической континуальной теории упругости. Значит, трех уравнений достаточно и для построения любых разностных схем, которые отвечают данной континуальной модели. С другой стороны, элементарный подсчет показывает, что для разностной схемы, приведенной выше, уравнений должно быть все же пять. В этой ситуации не остается ничего другого, кроме как принять, что обе посылки верны, и рассмотреть два недостающих определяющих уравнения.

В наиболее простом варианте, который удовлетворяет условиям инвариантности, данные уравнения сводятся к следующим [17]:

$$\begin{aligned} \frac{u_1(A_{ij}) + u_1(C_{ij})}{2} - \frac{u_1(B_{ij}) + u_1(D_{ij})}{2} &= \xi \left( \frac{\sigma_{11}(A_{ij}) - \sigma_{11}(C_{ij})}{2l} - \frac{\sigma_{21}(B_{ij}) - \sigma_{21}(D_{ij})}{2l} \right), \\ \frac{u_2(A_{ij}) + u_2(C_{ij})}{2} - \frac{u_2(B_{ij}) + u_2(D_{ij})}{2} &= \xi \left( \frac{\sigma_{12}(A_{ij}) - \sigma_{12}(C_{ij})}{2l} - \frac{\sigma_{22}(B_{ij}) - \sigma_{22}(D_{ij})}{2l} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi$  — новая упругая постоянная. Элементарные объемы взаимодействуют между собой. Напряжения на контактах всегда непрерывны. Для упругого тела должны быть непрерывны и смещения, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(C_{i+1j}) = \sigma_{11}(A_{ij}); \quad \sigma_{12}(C_{i+1j}) = \sigma_{12}(A_{ij}), \quad \sigma_{22}(D_{ij+1}) = \sigma_{22}(B_{ij}); \quad \sigma_{21}(D_{ij+1}) = \sigma_{21}(B_{ij}), \\ u_1(C_{i+1j}) = u_1(A_{ij}); \quad u_2(C_{i+1j}) = u_2(A_{ij}), \quad u_1(D_{ij+1}) = u_1(B_{ij}); \quad u_2(D_{ij+1}) = u_2(B_{ij}). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) совместно с краевыми условиями образуют замкнутую систему алгебраических уравнений, вполне достаточную для решения краевых задач упругости [18, 19]. Последнее можно рассматривать как аргумент в пользу адекватности модели с пятью определяющими уравнениями.

Возникает вопрос: почему уравнений (3) нет в классической модели упругости? Оказывается, они все же есть, но только скрыты в предположении о существовании частных производных перемещений по координатам. Из данного предположения сразу следует, что левые части в равенствах (3) тождественно равны нулю ( $\xi = 0$ ). Таким образом, если предположить гладкость поля смещений, то мы приходим к классической модели теории упругости и разностной системе алгебраических уравнений (1)–(4).

Данная разностная схема по ряду позиций принципиально отличается от разностных схем, которые строятся для уравнений классической упругости. Рассмотрим этот альтернативный подход подробнее:

1. Альтернативная разностная схема (1)–(4) построена для упругости с пятью определяющими уравнениями. Положив  $\xi = 0$ , мы по-прежнему имеем дело с пятью определяющими уравнениями. В техническом отношении иметь дело с пятью определяющими уравнениями удобнее, чем с тремя. При  $\xi \neq 0$  из уравнений (1)–(3) можно выразить компоненты  $\sigma_{11}, \dots$  через смещения  $u_1, \dots$  и подставить полученные выражения в (4), т. е. свести задачу к системе только относительно смещений. Это понижает порядок замкнутой системы. С этой точки зрения схему (1)–(4) можно рассматривать как решение уравнений классической теории упругости методом на установление при  $\xi \rightarrow 0$ .

2. В классической теории уравнения на перемещения (уравнения Ламе) получаются в результате дифференцирования поля напряжений по координатам. Поэтому разностные схемы строятся уже для уравнений второго порядка. Уравнения для перемещений, указанные в п. 1, опираются только на исходную алгебраическую систему (1)–(4) и не требуют дополнительных ограничений на гладкость поля перемещений.

3. В классической теории для решения задачи задается одна разностная сетка. В предлагаемой альтернативной численной схеме фигурируют две вложенных друг в друга сетки. На рис. 2а узлы одной из них отмечены горизонтальной чертой, а другой — вертикальной чертой. При этом на одной сетке задаются только компоненты напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$ , а на другой — только компоненты  $\sigma_{21}, \sigma_{22}$ . Смещения задаются на обеих сетках. Это позволяет составить разностную схему, в которой фигурируют и напряжения и смещения.

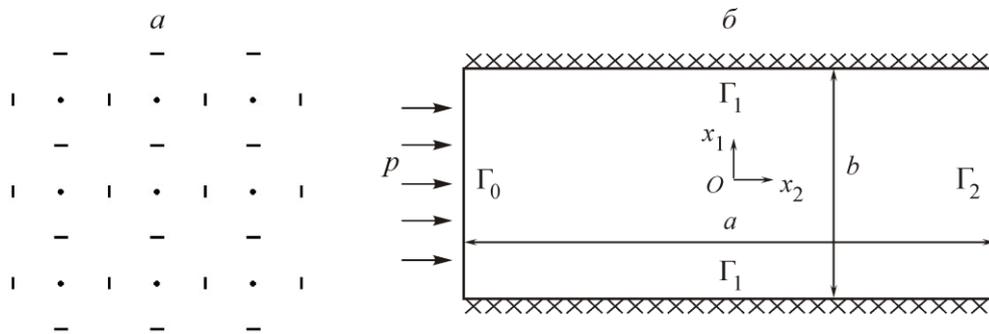


Рис. 2. Схема расположения узлов в двух вложенных сетках (а) и постановка краевой задачи (б)

**Пример численного расчета.** Рассмотрим пример расчета с использованием разностной схемы (1)–(4). Пусть задана прямоугольная область с линейными размерами  $a, b$  (рис. 2б). Материал внутри области идеально упругий, т. е.  $\xi \rightarrow 0$ . Будем считать, что верхняя и нижняя границы  $\Gamma_1$  — жесткие неподвижные стенки. Правая граница  $\Gamma_2$  от напряжений свободна, а на левой  $\Gamma_0$  задано давление  $p$ . Краевые условия в этом случае принимают вид:

$$\sigma_{11}|_{\Gamma_0} = -p, \quad \sigma_{12}|_{\Gamma_0} = 0, \quad u_1|_{\Gamma_1} = 0, \quad u_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad \sigma_{11}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \sigma_{12}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (5)$$

При построении разностных схем один из ключевых вопросов заключается в анализе устойчивости схемы и ее сходимости к решению дифференциальной задачи. Проведем ряд численных экспериментов. Зададим следующие безразмерные значения параметров (величины размерности длины отнесены к  $a$ , размерности напряжений — к  $p$ , параметр  $\xi$  имеет размерность  $[m^2/Па^2]$  и отнесен к  $a^2/p$ )

$$E = 2 \cdot 10^3, \quad \nu = 0.25, \quad \xi = 10^{-20}, \quad a = 1, \quad b = 0.5, \quad l = 0.05, \quad p = 1. \quad (6)$$

Выбор параметра  $\xi = 10^{-20}$  при численном решении задачи означает, что фактически,  $\xi \rightarrow 0$ . Будем теперь варьировать число частиц  $n$ . На рис. 3а изображены расчетные изолинии интенсивности касательных напряжений  $T = 0.5\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$  в случае  $n = 200$ . Учет сравнительно малого числа упругих частиц приводит к “рваному” характеру изолиний. Расчеты при последовательном удвоении числа частиц  $n = 200, 400, 800, 1600$  показывают, что схема сходится.

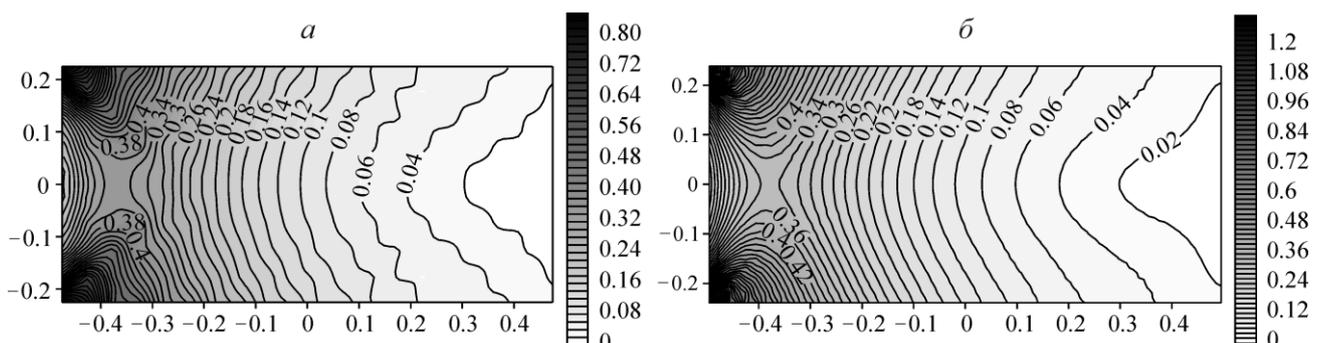


Рис. 3. Изолинии интенсивности касательных напряжений  $T$ : а —  $n = 200$ ; б —  $n = 1600$

На рис. 3б изображены изолинии  $T$  для  $n = 1600$ . С увеличением числа частиц (разрешающей способности) изолинии сглаживаются, а максимальная концентрация интенсивности касательных напряжений  $T$  локализуется в угловых точках расчетной области — концентраторах напряжений.

Изолинии компоненты смещения  $u_2$  представлены на рис. 4. В силу особенностей краевой задачи изолинии этой компоненты делят область на четыре подобласти (в зависимости от знака  $u_2$ ), а их конфигурация является весьма чувствительной к любой неустойчивости или расходимости процесса вычислений. Из сравнения результатов расчетов для различного числа частиц следует, что схема сходится.

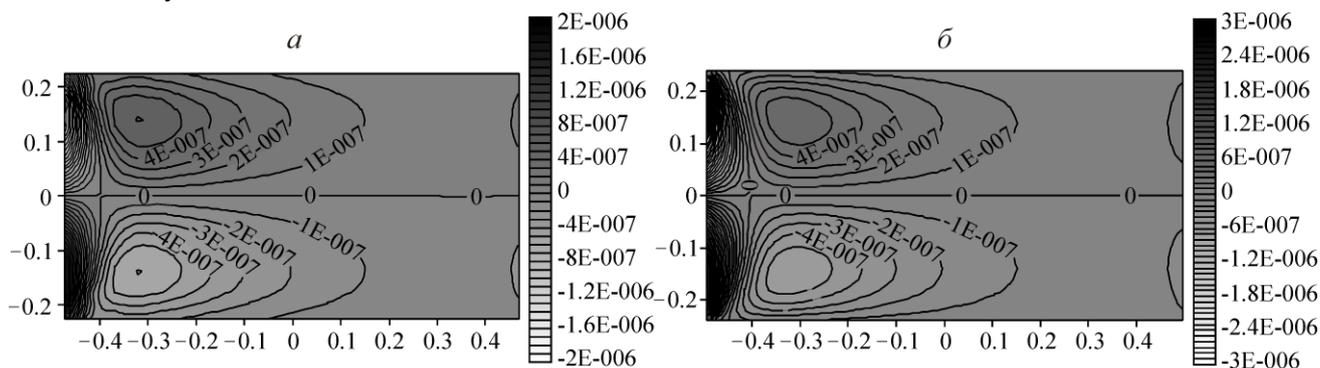


Рис. 4. Изолинии интенсивности касательных напряжений  $u_2$ : а —  $n = 200$ ; б —  $n = 1600$

Проведена также серия численных экспериментов при варьировании параметров задачи (б). В качестве иллюстрации на рис. 5а, б показаны изолинии компоненты перемещения  $u_1$ , полученные соответственно при значениях коэффициента Пуассона  $\nu = 0.15$  и  $0.35$ , остальные параметры (б) неизменны,  $n = 1600$ . Видно, что увеличение податливости среды в боковом направлении приводит к смещению изолиний вправо при сохранении абсолютных значений  $u_1$ . Иными словами, прогиб материала, обусловленный приложенным на боковой границе давлением, распространяется глубже внутрь расчетной области.

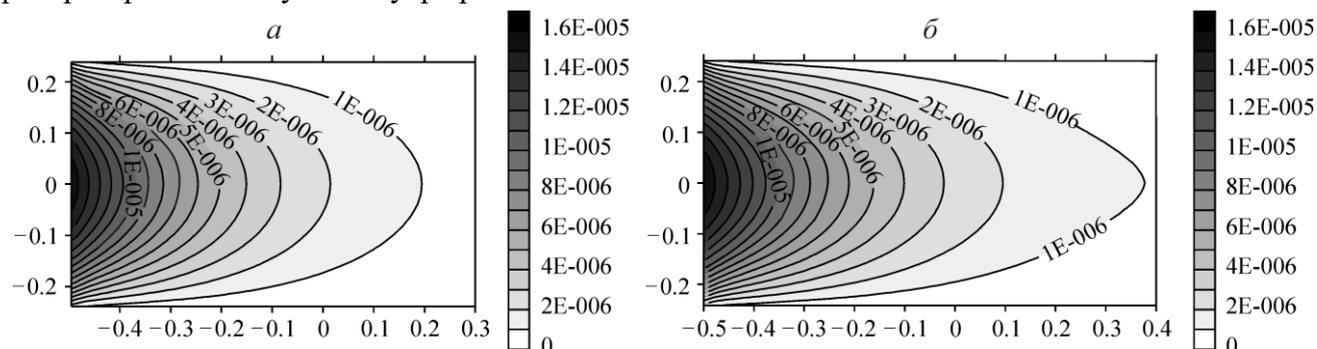


Рис. 5. Изолинии компоненты смещения  $u_1$ : а —  $\nu = 0.15$ ; б —  $\nu = 0.35$

По результатам ряда численных экспериментов можно заключить, что разностная схема (1)–(4) обладает свойствами сходимости и устойчивости к возмущениям параметров.

## ВЫВОДЫ

Плоская деформация упругого тела должна описываться пятью определяющими уравнениями. В классической модели закон Гука дает только три уравнения. Два уравнения содержатся в предположении о гладкости поля перемещений. Разностная схема, которая опирается на пять определяющих уравнений, имеет ряд преимуществ перед классическими схемами и позволяет расширить круг исследуемых задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Mirsalimov V. M.** Modeling Partial Closure of a Variable-Width Slot with Cohesion End Zones in Rock Mass, *Journal of Mining Science*, 2020, vol. 56, pp. 9–19. [**Мирсалимов В. М.** Моделирование частичного закрытия щели переменной ширины с концевыми зонами в массиве горных пород // ФТПРПИ. — 2020. — № 1. — С. 11–22.]
2. **Anciferov S. V.** Method for calculating multilayer lining of parallel tunnels of circular cross-section with shallow foundations. Tula: TulGU, 2014, 330 pp. (in Russian) [**Анциферов С. В.** Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. — 330 с.]
3. **Anciferov S. V., Sammal A. S., and Deev P. V.** Assessment of the stress-strain state of the multilayer support of the vertical shaft taking into account the deviations of the cross-sectional shapes from the design, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 19–25. (in Russian) [**Анциферов С. В., Саммаль А. С., Деев П. В.** Оценка напряженно-деформированного состояния многослойной крепи вертикального ствола с учетом отклонений форм поперечных сечений от проектных // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 19–25.]
4. **Dal Yu. M.** On Kolosov formula in plane problem of elasticity theory with periodical cuts, *SPbGU Bulletin, series 1*, 2014, vol. 1 (59), issue 2, pp. 228–235. (in Russian) [**Даль Ю. М.** О формулах Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости при наличии периодических разрезов // Вестник СПбГУ, Сер. 1. — 2014. — Т. 1 (59), — Вып. 2. — С. 228–235.]
5. **Bondar V. D.** Complex-potential method in the nonlinear theory of elasticity, *Journal Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 133–143. [**Бондарь В. Д.** Метод комплексных потенциалов в нелинейной теории упругости // ПМТФ. — 2000. — Т. 41. — № 1. — С. 133–143.]
6. **Protosenya A. G., Karasev M. A., and Belyakov N. A.** Elastoplastic problem for noncircular openings under Coulomb's criterion, *Journal of Mining Science*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 53–61. [**Протосеня А. Г., Карасев М. А., Беляков Н. А.** Упругопластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона // ФТПРПИ. — 2016. — № 1. — С. 71–81.]
7. **Trofimov V. A. and Filippov Yu. A.** Influence of Stress Variation in Roof Rocks of Coal Seam on Strata Gas Conditions in Longwalling, *Journal of Mining Science*, 2019, vol. 55, pp. 722–732. [**Трофимов В. А., Филиппов Ю. А.** Влияние изменения напряженного состояния пород кровли угольного пласта при развитии очистных работ на газовый режим залежи // ФТПРПИ. — 2019. — № 5. — С. 33–44.]
8. **Seryakov V. M., Rib S. V., Basov V. V., and Fryanov V. N.** Geomechanical Substantiation of Technology Parameters for Coal Mining in Interaction Zone of Longwall Face and Gate Roadway, *Journal of Mining Science*, 2018, vol. 54, pp. 899–906. [**Серяков В. М., Риб С. В., Басов В. В., Фрянов В. Н.** Геомеханическое обоснование параметров технологии отработки угольных пластов в зоне взаимовлияния очистного пространства и передовой выработки // ФТПРПИ. — 2018. — № 6. — С. 21–29.]
9. **Seryakov V. M.** Features of the stressed state of the support at various displacements of the free mine contour, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2016, vol. 1, no. 3, pp. 191–195. (in Russian) [**Серяков В. М.** Особенности напряженного состояния крепи при различных смещениях свободного контура выработки // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2016. — Т. 1. — № 3. — С. 191–195.]
10. **Fryanov V. N., Pavlova L. D., and Gordeev S. N.** Modeling of geomechanical processes during underground mining of coal seams with unstable host rocks, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2015, no. 2, pp. 162–167. (in Russian) [**Фрянов В. Н., Павлова Л. Д., Гордеев С. Н.** Моделирование геомеханических процессов при подземной разработке угольных пластов с неустойчивыми вмещающими породами // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2015. — № 2. — С. 162–167.]

11. **Rahimi B., Sharifzadeh M., and Feng X. T.** Ground behaviour analysis, support system design and construction strategies in deep hard rock mining, Justified in Western Australian's mines, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2020, vol. 12, pp. 1–20.]
12. **Sobhi M. A. and Li L.** Numerical investigation of the stresses in backfilled stopes overlying a sill mat, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 2017, vol. 9, pp. 490–501.
13. **Kolymbas D., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Deformation of anisotropic rock mass in the vicinity of a long tunnel, *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, pp. 962–974. [**Колимбас Д., Лавриков С. В., and Ревуженко А. Ф.** О деформировании анизотропного горного массива в окрестности горизонтальной протяженной выработки // ФТПРПИ. — 2012. — № 6. — С. 21–36.]
14. **Stankevich I. V.** Mathematical modeling of elasticity theory problems with one-side discrete contact, *J. Mathematics and Mathematical modeling, Bauman MGTU, electronic journal*, 2015, № 4, pp. 93–110. (in Russian) [**Станкевич И. В.** Математическое моделирование задач теории упругости с односторонним дискретным контактом // Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. — 2015. — № 4. — С. 93–110.]
15. **Bogulskii I. O. and Volchkov Yu. M.** Numerical solution of the problem of deformation of elastic solids under pulsed loading, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, no. 4, pp. 128–140. [**Богульский И. О., Волчков Ю. М.** Численное решение задач деформирования упругих тел при импульсном нагружении // ПМТФ. — 2020. — № 4. — С. 128–140.]
16. **Revuzhenko A. F.** Mathematical analysis of functions of a non-Archimedean variable, Novosibirsk, Nauka, 2012, 327 pp. (in Russian) [**Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной. — Новосибирск, Наука. — 2012. — 327 с.]
17. **Revuzhenko A. F. and Mikenina O. A.** Elastoplastic Model of Rocks with a Linear Structural Parameter, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 332–340. [**Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — № 2. — С. 167–176.]
18. **Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** The use of models of the elasticity theory with a structural parameter for solving problems of rock mechanics, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 91–97. (in Russian) [**Лавриков С. В., Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.** Использование моделей теории упругости со структурным параметром для решения задач механики горных пород // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 91–97.]
19. **Altukhov V. I., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Analysis of stress concentration in rock pillars in the framework of a nonlocal elastic model with a structural parameter, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 39–45. (in Russian) [**Алтухов В. И., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Анализ концентрации напряжений в целиках горной породы в рамках нелокальной упругой модели со структурным параметром // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 39–45.]