Проблемы логики и методологии науки

УДК 160.1
DOI:
10.15372/PS20170102

В.В. Целищев

IF-ЛОГИКА В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕОРЕТИЗИРОВАНИЯ*

Статья посвящена сопоставлению выразительных средств стандартной логики первого порядка и IF-логики как логики математического дискурса. В качестве примера рассмотрена проблема равномерной непрерывности в связи с теоремой Коши. Показано, что ограничения, свойственные стандартной логике первого порядка, преодолеваются в IF-логике. Продемонстрирована ошибочность критики о недостаточности IF-логики для математического теоретизирования.

Ключевые слова: IF-логика; логика первого порядка; равномерная непрерывность; квантор; теоретико-игровая семантика

V.V. Tselishchev

IF-LOGIC IN THE MATHEMATICAL THEORIZING

The article is deals with the comparison of expressive means of the standard first-order logic and IF-logic as the logic of mathematical discourse. The problem of the uniform continuity in Cauchy's theorem serves as an illustration of the analysis in both systems. It is shown that we can overcom limitations of the standard first-order logic in the IF-logic. Also, the fallacy of criticism of IF-logic as a vehicle for mathematical theorizing is shown.

Keywords: IF-logic; first-order logic; uniform continuity; quantifier; game-theoretic semantics

Разработанная Я. Хинтиккой и Г. Санду IF-логика (independent friendly logic) является исчислением, семантика которого представляет собой вариант теоретико-игровой семантики [11]. Позднее Хинтикка предпочел другое название для новой логики – гиперклассическая логика [7].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-02-00352-а).

© Целищев В.В., 2017

IF-логика имеет многочисленные применения, в частности в качестве представления дедуктивного знания [8]. Такое ее применение мотивировано более сильными выразительными возможностями, чем у традиционно используемого для этой цели стандартного языка первого порядка (FOL – first-order logic). Два аспекта возможностей IF-логики делают ее привлекательной в математическом теоретизировании. Во-первых, это изменение баланса логических и математических концепций в основаниях математики. Многие концепции, которые выходили за пределы выразительных возможностей FOL, оказались все-таки «логическими» – в смысле IF-логики. В определенном смысле это возрождение логицизма, хотя сам по себе логицизм, как расселовского, так и фрегевского толка, использует логику высших порядков, в то время как IF-логика претендует на статус языка первого порядка, хотя и с бо́льшими, выразительными возможностями. В частности, известно, что такие математические понятия, как математическая индукция, конечность, бесконечность, несчетная бесконечность, вполне-упорядочение, кардинальность и множество-степень, не могут быть схвачены FOL, однако могут быть схвачены IF-логикой, поскольку для категорических теорий математическая истина может быть приравнена к логической истине IF-логики первого порядка.

Провозглашение Хинтиккой IF-логики как адекватного средства математического теоретизирования вызвало критическую реакцию со стороны ряда исследователей, среди которых можно назвать С. Фефермана [6] и Н. Теннанта [15]. Совсем недавняя реакция подобного рода касалась частного вопроса о том, в какой степени IF-логика обладает бо́льшими выразительными средствами по сравнению с FOL в формализации понятия равномерной сходимости, которое является важной концепцией в математическом анализе. Этот частный случай высветил важные различия в формировании логических концепций и их применении к математическому дискурсу. В частности, А. Баззони критикует Я. Хинтикку в вопросе о формализации понятия равномерной сходимости средствами IF-логики [3]. Баззони полагает, что претензии IF-логики на то, что она имеет большую выразительную силу по сравнению с FOL, в случае рассмотрения концепции равномерной сходимости никак не оправданы и основаны на простой логической ошибке. Данная статья посвящена критике аргументации Баззони исходя из преимуществ IF-логики в каркасе более общих идей о принципах логики и логической семантики.

Впервые формализация содержательных математических утверждений была осуществлена Г. Фреге с помощью понятия квантора [1]. Дальнейшее развитие логики, нашедшее полное воплощение в концепции FOL, дало средства для такой формализации. Рассмотрим формализацию понятия равномерной сходимости в рамках известной $\varepsilon - \delta$-техники.

Так, определение сходимости последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_0(x)$ на неформальном языке гласит: для любого данного ε можно выбрать k такое, что для любого $n > k$ справедливо $\| f_n(x) - f_0(x)\| < \varepsilon$ всякий раз, когда $n > k$. С использованием кванторов это утверждение имеет вид

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists k)\ (\forall n)\ ((n > k) \supset \|\ f_n(x) - f_0(x))\ \|\ )) < \varepsilon.$$

Хотя оба выражения одного и того же математического факта эквивалентны, они концептуально различны. Дело в том, что действия кванторов Фреге могут быть сформулированы в семантике Тарского, в то время как $\varepsilon - \delta$-техника требует иной семантики. Действительно, там речь идет о возможности выбора функциями. Если требуется концептуальное единство обоих представлений математического факта, нужно кванторному представлению придать возможности такого выбора. Потенциально очевидно, что универсальный квантор отвечает тому, что «дано», в то время как экзистенциальный квантор отвечает за то, что можно выбрать. Для обычной логики первого порядка такая трактовка кванторов не проходит из-за зависимости кванторов друг от друга [10].

Для понимания идеи зависимости кванторов рассмотрим следующий пример истинного в стандартной модели арифметики предложения:

$$(\forall x)\ (\exists y)\ [x = y].$$

Здесь экзистенциальный квантор зависит от универсального, потому что для любого заданного числа можно выбрать тождественное ему число, а именно то, которое уже было задано.

Хинтикка и Санду задали вопрос: что если убрать такую зависимость кванторов? Что если выбор y осуществляется в условиях, когда x не задан заранее? Другими словами, что если выбор y осуществляется независимо от выбора x? В этом случае приведенное выше выражение не будет истинным в стандартной модели арифметики, потому что выбор y не всегда совпадает с выбором x, который в момент первого выбора просто неизвестен. Эта идея независимости кванторов лежит в основе IF-логики. Подобная реформа логики имеет такие далеко идущие следствия, как выразимость понятия истины (в противоречии с известным результатом Тарского), нарушение закона исключенного третьего, нарушение теоремы Геделя о полноте кванторной теории и т.д. Тем не менее IF-логика имеет большую выразительную силу, чем FOL, в том отношении, что в первой можно выразить то, что недоступно в другой.

Но IF-логика требует такой семантики, которая бы отвечала таким математическим утверждениям, как $\varepsilon - \delta$-аргументация. В частности, речь идет о выражении в IF-логике концепции равномерной сходимости, играющей ключевую роль в опровержении ошибочной теоремы Коши, которая гласила, что предел сходящейся последовательности непрерывных функций сам является непрерывным. Как известно, для теоремы были найдены контрпримеры, и, как было указано позднее математиками, ошибочность теоремы была связана с отсутствием различения обычной сходимости и однородной сходимости [4].

Но перед тем как изложить способ выражения этой концепции на языке IF-логики, рассмотрим семантику этого языка. Главной особенностью IF-логики является наличие у нее теоретико-игровой семантики (GTS), являющейся для этой логики стандартной [14]. Рассмотрим сначала GTS в отношении логики первого порядка.

Интерпретация предложений IF-логики определяется в терминах игры между Верификатором, ходы которого ассоциируются с экзистенциальным квантором, и Фальсификатором, ходы которого ассоциируются с универсальным квантором. Игра идет в модели с универсумом M. Для иллюстрации механизма игры вновь рассмотрим предложение $(\forall x)$ $(\exists y)$ ([$x = y$]. Поскольку первым стоит универсальный квантор, первый ход делает Фальсификатор, выбирая элемент из M, скажем элемент с именем a. Игра переходит в стадию $(\exists y)$ $[a = y]$. Следующий квантор – экзистенциальный, и поэтому ход делает Верификатор, который выбирает некоторый элемент из M, скажем b. Игра переходит в стадию $[a = b]$. Коль скоро игра достигает такой стадии, когда остаются только атомарные предложения, то остается проверить, принадлежит ли пара (a, b) к отношению тождества в модели M.

В теоретико-игровой интерпретации предложение является истинным в модели, если Верификатор имеет выигрышную стратегию независимо от того, как играет Фальсификатор. Соответственно, предложение является ложным в модели, если Фальсификатор может выиграть независимо от того, какие ходы будет делать Верификатор. Ясно, что $(\forall x)$ $(\exists y)$ $[x = y]$ будет логически истинным в этом смысле, поскольку в ответ на любой выбор Фальсификатора Верификатор выберет число, которое будет равно числу Фальсификатора.

В IF-логике ситуация несколько иная, потому что на стадии игры $(\exists y)$ $[a = y]$ Верификатор не имеет доступа к информации о том, какой ход сделан Фальсификатором, и поэтому Верификатор делает свой ход независимо от Фальсификатора. Ясно, что Верификатор не имеет выигрышной стратегии в отношении игры $(\forall x)$ $(\exists y)$ $[x = y]$, и поэтому в IF-логике это выражение не будет истинным. Но оно не будет и ложным, поскольку выигрышной стратегии нет и у Фальсификатора, потому что Верификатор может, хотя и случайно, без доступа к информации выбрать то же число. Таким образом, в IF-логике закон исключенного третьего не соблюдается.

Независимость кванторов в IF-логике символизируется нотацией в виде слэша, так что вместо $(\forall x)$ $(\exists y)$ $[x = y]$ мы имеем $(\forall x)$ $(\exists y\ /\ \forall x)$ $[x = \mathrm{y}]$ или же $(\forall x)$ $(\exists y\ /x)$ $[x = y]$. Важно отметить, что игровая интерпретация переносится и на логические связки, где с Верификатором ассоциируется дизъюнкция, а с Фальсификатором – конъюнкция.

В чем состоит преимущество IF-логики при представлении математических концепций? Возвращаясь к теореме Коши, согласно которой предел сходящейся последовательности непрерывных функций сам является непрерывным, следует отметить исторический факт, что эта теорема оказалась ошибочной и доказательство ее основывалось на неявном предположении. Оно состояло в том, что члены последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_0(x)$ являются непрерывными и что они сходятся к $f_0(x)$. Дело в том, что требовалось ввести понятие равномерной сходимости, которое отличается от понятия обычной сходимости [9].

Различие между двумя видами сходимости видно из сопоставления двух определений в кванторном виде. FOL-определение непрерывности при обычной сходимости имеет такой вид:

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists\delta)\ (\forall\gamma)\ ((\|\,\gamma\,\| <)\delta) \supset \|\ (f(x+y) - f(x)\ \| < \varepsilon),$$

в то время как это определение с равномерной сходимостью имеет вид

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists\delta)\ (\forall\gamma)\ (\exists x)\ ((x_1 < x < x_2) \supset ((\|\gamma\| < \delta) \supset (\|f\,(x+y) - f(x)\| < \varepsilon))).$$

Изменение касается различения двух видов сходимости по отношению к значению переменной x, точнее, равномерная сходимость фиксирует, что происходит в произвольно малой окрестности x. Именно это обстоятельство нашло отражение в вводимых некоторыми исследователями для равномерной сходимости эпитетах «медленная сходимость», «бесконечно медленная сходимость». Другими словами, равномерная сходимость определяется относительно области значений $x_1 < x < x_2$.

В определении с равномерной сходимостью важно отметить, что экзистенциальный квантор, связывающий δ, независим от универсального квантора, связывающего переменную x. Хинтикка отмечает, что для определенного значения переменной x стоит выбор между сходимостью и несходимостью. Это обстоятельство Хинтикка использует для обоснования утверждения о неполной корректности определения с равномерной сходимостью.

Действительно, отрицание этого определения имеет следующий вид:

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists\delta)\ (\forall\gamma)\ (\exists x)\ ((x_1 < x < x_2)\ \&\ ((\|\gamma\| < \delta)\ \&\ (\|f(x + y) - f(x)\| \geq \varepsilon))).$$

Здесь экзистенциальный квантор, связывающий переменную x, зависит от универсального квантора, связывающего переменную δ. В данном случае мы имеем нарушение логики математического рассуждения. В самом деле, как утверждает Хинтикка, это отрицание определения равномерной непрерывности говорит о том, что для некоторого ε функция $f(x)$ имеет разрыв в интервале $x_1 < x < x_2$. Но не таким должно быть отрицание равномерной сходимости, потому что функция может не быть равномерно непрерывной, но при этом быть все-таки непрерывной.

Как видно, причина этого состоит в том, что попытка ввести в оборот равномерную непрерывность в рамках FOL сводится к смене порядка кванторов. Успешность этой попытки бесспорна для многих исследователей [13], однако Хинтикка настаивает на том, что нужен более широкий каркас, в рамках которого производится математическое теоретизирование. Такого же рода соображения он высказывает в полемике с Феферманом [6], говоря о различии концептуальных подходов логики первого порядка и IF-логики.

Сопоставим выражение для равномерной непрерывности в IF-логике с этим же определением в логике первого порядка. IF-логика дает

$$(\forall x)\ (\exists\varepsilon)\ (\forall\delta/\ \{x\})\ (\forall\gamma)\ ((x_1 < x < x_2) \supset ((\|\gamma\| < \delta) \supset (\|f(x + y) - f(x)\| < \varepsilon))).$$

В данном случае важна независимость $\exists\delta$ от $\forall x$, поскольку в случае логики первого порядка мы имеем как раз эту зависимость. Хинтикка полагает, что независимость кванторов в случае IF-логики адекватно выражает поведение равномерно сходящихся последовательностей функций. Этот факт виден интуитивно в неформализованном утверждении, что для любого данного ε можно выбрать k такое, что для любого $n > k$ $\|f_n(x) - f_0(x)\| < \varepsilon$, всякий раз, когда $n > k$. Для получения равномерной сходимости нужно лишь, чтобы выбор k делался независимо от x (в формализованном выражении квантор с x неявно присутствует). Другими словами, попытка выразить равномерную сходимость (соответственно, непрерывность) в FOL выпадает из общей установки в этой логике и в известной мере может считаться попыткой *ad hoc*. Между тем в IF-логике такая независимость является общей установкой. В этом Хинтикка усматривает преимущество IF-логики по сравнению с FOL.

Баззони считает парадоксальным тот факт, что хотя сторонники IF-логики признают адекватность формализации равномерной сходимости в логике первого порядка, Хинтикка настаивает на преимуществе первой. При этом Баззони не принимает во внимание «идеологическую» установку Хинтикки на предпочтительность и своеобразие другого, более общего, каркаса, связанного с отрицанием важности и уникальности логики первого порядка. Действительно, теоретико-игровая семантика IF-логики радикально отличается от семантики Тарского для FOL и включает совсем иной корпус идей. Эти идеи ведут к радикальному пересмотру логики, включая ограничительные теоремы Геделя и Тарского и в этом смысле представляя более широкие перспективы логики как таковой.

Исходя из отказа принять (или понять) более общий подход Хинтикки Баззони предлагает весьма своеобразное объяснение того, почему Хинтикка настаивает на преимуществах IF-логики для частного случая формализации равномерной сходимости. Одним из интересных следствий IF-логики являются отличие ее от FOL в трактовке перемены местами кванторов и, как следствие, понимание эквивалентности.

Дело в том, что перестановка местами кванторов имеет для этих двух логик существенное различие. В IF-логике, как и в логике первого порядка, предложения ψ_1 и ψ_2 эквивалентны, если и только если эти предложения истинны в одних и тех же моделях, формально $\psi_1 \equiv_t \psi_2$. Однако симметрия нарушается в отношении ложности предложений. Ввиду того, что в IF-логике не выполняется закон исключенного третьего, истинность в одних и тех же моделях автоматически не означает ложности в одних и тех же моделях. Различие между двумя логиками видно из следующего примера. Выражение $(\forall x)(\exists y/\ \{x\}[x = y]$ эквивалентно выражению $(\exists y)\ (\forall x)\ [x = y]$, поскольку обе формулы истинны в модели с одним элементом, но уже в модели с двумя элементами первое выражение неразрешимо, а второе – ложно.

Поэтому требуется ввести другой смысл эквивалентности: если для каждой модели ψ_1 ложно, если и только если, ψ_2 ложно, тогда эти предложения эквивалентны. Формально, $\psi_1 \equiv_{\mathrm{f}} \psi_2$. Более общее понятие эквивалентности, очевидно, должно быть по определению следующим:

$$\psi_1 \equiv \psi_2 \Leftrightarrow_{Df} \psi_1 \equiv_t \psi_2 \text{ и } \psi_1 \equiv_f \psi_2 .$$

Отсюда

$$(\forall x)\,(\exists y / \{x\}\;[x = y\,] \equiv_t (\exists y)\,(\forall x)\,[x = y].$$

Однако для случая ложности эквивалентности нет:

$$(\forall x)\,(\exists y / \{x\}\;[x = y\,] \neg \equiv_f (\exists y)\,(\forall x)\,[x = y].$$

Так что внешне сходные предложения IF-логики и логики первого порядка не эквивалентны, т.е.

$$(\forall x)\,(\exists y / \{x\}\;[x = y\,] \neg \equiv_{Df} (\exists y)\,(\forall x)\,[x = y].$$

Это означает, что понятие логической эквивалентности $\equiv_{Df}$ сильнее, чем понятие эквивалентности $\equiv_t$ в IF-логике [5].

На этом обстоятельстве основана критика выразительных преимуществ IF-логики, предпринятая Баззони. Он указывает на парадоксальную ситуацию, которая состоит в следующем. С одной стороны, приверженцы IF-логики признают, что в логике первого порядка концепция равномерной сходимости может быть выражена путем перемены местами кванторов. С другой стороны, эти приверженцы предпочитают для выражения равномерной сходимости использовать IF-логику. Однако здесь возникает очевидное противоречие, поскольку изменение порядка кванторов дает разные смыслы эквивалентности. Действительно, $(\exists y)$ $(\forall x)$ … и $(\forall x)\,(\exists y / \{x\})$… эквивалентны только в смысле $\equiv_t$.

Из этого Баззони делает вывод, что отрицание формализации концепции равномерной непрерывности не влечет отрицания просто непрерывности, на чем основывается аргумент Хинтикки. Настаивая на том, что на самом деле разрыва функции нет, Баззони предполагает ошибку в аргументации Хинтикки. При этом критика Баззони распадается на две части. Он предлагает реконструкцию неявных посылок в аргументации Хинтикки. Суть их состоит в следующем: если отрицание равномерной непрерывности приводит к утверждению о наличии разрывов и если IF-логика адекватно схватывает эту концепцию, тогда FOL не схватывает концепцию равномерной непрерывности, что говорит о ее ограниченности по сравнению с IF-логикой. Но для такой аргументации Баззони нужно, во-первых, указать, что же за ошибку совершил Хинтикка, а во-вторых, показать, что реконструкция неявных предположений Хинтикки верна. В отношении второго обстоятельства надо сказать следующее. Баззони меняет порядок посылок: Хинтикка идет от идеи, что перестановка кванторов при определении равномерной непрерывности в логике первого порядка не является решающим обстоятельством, потому что лежащая в основе решения формализации этого понятия идея независимости кванторов представляет собой часть более общего каркаса идей и имеет гораздо большую сферу применения. То есть Хинтикка не приспосабливается к одному лишь примеру, где выразительная способность логики первого порядка может соперничать с IF-логикой, используя различия в определении эквивалентности для обеих логик, а предлагает более общий взгляд на логику, с другой семантикой, нежели семантика Тарского.

Что касается логической ошибки, на которой делает упор Баззони, то она касается сопоставления двух формул, которые, по предположению, должны демонстрировать неадекватность логики первого порядка. Предлагаемая Хинтиккой формализация условия разрыва функции в точке x выражается в FOL следующей формулой:

$$(\forall\varepsilon)\,(\exists\delta)\,(\forall\gamma)\,(\exists x)\,((x_1 < x < x_2)\ \&\ ((\|\gamma\| < \delta)\ \&\ (\|f(x+y) - f(x)\| \geq \varepsilon))),$$

в то время как требуется формула

$$(\exists x)\,(\exists\varepsilon)\,(\forall\delta)\,(\exists\gamma)\,((x_1 < x < x_2)\ \&\ ((\|\gamma\| < \delta)\ \&\ (\|f(x+y) - f(x)\| \geq \varepsilon))).$$

Эта формула, по мнению Баззони, должна представлять фразу «функция $f(x)$ имеет разрыв порядка ε где-то в интервале $x_1 < x < x_2$». Но эти две формулы не эквивалентны и предполагаемая ошибка Хинтикки состоит в том, что он не заметил этого. Баззони утверждает, что тот факт, что x зависит от δ, очень важен для сути вопроса, потому что существование некоторого x для данного δ, удовлетворяющего условиям разрыва, недостаточно для существования точки разрыва функции f. Дело в том, что для этого требуется, чтобы один и тот же x удовлетворял условию для каждого возможного δ [3].

Аргументация данного толка, представленная Баззони, не достигает цели, поскольку Хинтикка «играет на чужом поле», указывая на аномалии в FOL-представлении концепции равномерности и утверждая, что IF-логика делает это лучше. Баззони же указывает на неправильность представления в FOL, т.е. только «на своем поле». Для убедительности аргумента ему нужно перейти к критике общей стратегии Хинтикки. Больше того, если выразить условие равномерности в IF-логике, то аномалии, на которую указывает Баззони, нет, и именно это является мотивом утверждения о бóльших выразительных возможностях IF-логики.

Плодотворность IF-логики демонстрируется для более общих утверждений о концепции равномерности. Так, Янсен указывает, что IF-логика весьма приспособлена для выражения таких утверждений, как «все функции g из множества G равномерно непрерывны» [12]. Все, что требуется для этого, чтобы в формуле

$$(\forall g)\in \mathrm{G}\ (\forall\varepsilon)\ (\forall x)\ (\exists\delta\ /\ \{x\}\ (\forall y)\ [\ |x-y|<\delta\rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

δ было независимо от x, в то время как зависимость δ следует из кванторной структуры.

Разработка IF-логики преследует цель получить истинную логику математического дискурса. Соперничество этой логики с FOL возникает в связи с обстоятельством, которое емко выразил Д. Бэрвайз: «Листая современные математические сочинения, все время натыкаешься на концепции, которые не могут быть выражены в (обычной. – *В.Ц.*) логике первого порядка. Концепции из теории множеств (подобно бесконечному множеству, счетному множеству), из анализа (подобно множеству меры 0 или множества со свойством Бэра), из теории вероятностей (подобно случайной переменной или же обладанию вероятностью, большей некоторого действительного числа r) являются центральными понятиями в математике, которые с точки зрения обычного математика, имеют свою собственную логику, не обеспечиваемую обычной логикой первого порядка» [2, p. 5–6]. В этом смысле IF-логика представляет собой одну из жизнеспособных альтернатив логике первого порядка как средству математического теоретизирования.

Литература

1. *Фреге Г.* Основоположения арифметики: логико-математическое исследование о понятии числа. – Томск: Водолей, 2000.

2. *Barwise I.* Model-theoretic logics: background and aims // Model-Theoretic Logics / Ed. I. Barwise, S. Feferman. – N.Y.: Springer, 1985. – P. 5–6.

3. *Bazzoni A.* Hintikka on the foundations of mathematics: IF-logic and uniformity concepts // Journal of Philosophical Logic. – 2015. – Vol. 44, No. 5. – P. 507–516.

4. *Bottazini U.* The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. – N.Y.: Springer, 1986.

5. *Dechene F.* Investigating the Basic Notions of Hintikka's Independence Friendly Logic. – URL: www. pure.tue.nl .

6. *Feferman S.* What kind of logic is «Independent Friendly» Logic? // The Philosophy of Jaakko Hintikka (Library of Living Philosophers) / Ed. R. Auxier, L. Hahn. – N.Y.: Open Court, 2006. – P. 453–469.

7. *Hintikka J.* Hyperclassical logic (A.K.A. IF Logic) and its implication for logical theory // Bulletin of Symbolic Logic. – 2002. – Vol. 8, No. 3. – P. 404–423.

8. *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited. – N.Y.: Cambridge University Press, 1996.

9. *Hintikka J.* Which mathematical logic is the logic of mathematics // Logica Universalis. – 2012. – Vol. 6, No. 3–4. – P. 459–475.

10. *Hintikka J., Sandu G.* Informational independence as a semantic phenomen // Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII / Ed. by J. Fenstad et al. – Amsterdam, Elsevier, 1989.

11. *Hintikka J., Sandu G.* A revolution in logic? // Nordic Journal of Philosophical Logic. – 1996. – Vol. 1, No. 2. – P. 169–183.

12. *Janssen T.* Application of IF-logic. – URL: www.illc.uva.nl

13. *Mann A., Sandu G., Sevenster M.* Independence-Friendly Logic. – N.Y.: Cambridge University Press, 2011.

14. *Sandu G.* Logic, language, and games // Acta Philosophica Fennica. – Helsinki, 2015. – Vol. 91.

15. *Tennant N.* Games some people would have all of us play // Philosophia Mathematica (3). 1998. – Vol. 6. – P. 90–115.

References

1. *Frege, G.* (2000). Osnovopolozhenya arifmetiki. Tomsk, Vodolei, 2000.

2. *Barwise, I.* (1985). Model-theoretic logics: background and aims // Model-Theoretic Logics / Ed. I. Barwise, S. Feferman. – N.Y.: Springer. – P. 5–6.

3. *Bazzoni, A.* (2015). Hintikka on the Foundations of Mathematics: IF-logic and Uniformity Concepts // Journal of Philosophical Logic. Vol. 44, No. 5. – P. .507-516.

4. *Bottazini, U.* (1986). The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. – N.Y.: Springer.

5. *Dechene, F.* Investigating the Basic Notions of Hintikka's Independence Friendly Logic. Available at: www. pure.tue.nl

6. *Feferman, S.* (2006). What kind of ogic is 'Independent Friendly' Logic? // The Philosophy of Jaakko Hintikka (Library of Living Philosophers) / eds. R. Auxier, L.Hahn. N.Y.: Open Court. – P. 453-469.

7. *Hintikka J.* (2002). Hyperclassical logic (A.K.A. IF Logic) and its Implication for Logical Theory // Bulletin of Symbolic Logic, vol. 8, n. 3. p. 404- 423.

8. *Hintikka, J.* (1996). The Principles of Mathematics Revisited. N.Y.: Cambridge University Press.

9. ***Hintikka, J***. Which Mathematical Logic is the Logic of Mathematics // Logica Universalis, vol.6, 2012, n.3-4. p.459-475.

10. ***Hintikka, J.,*** and ***G Sandu***. (1989). Informational independence as a semantic phenomen // Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII/ eds. Fenstad et al. Elsevir Science.

11. ***Hintikka, J.,*** and ***G Sandu***. (1996). A revolution in logic? // Nordic Journal of Philosophical Logic, vol. 1, n. 2. p. 169-183.

12. ***Janssen, T***. Application of IF-logic. Available at: www.illc.uva.nl

13. ***Mann, A., G. Sandu*** and ***M. Sevenster***. (2011). Independence-Friendly Logic. N.Y.: Cambridge University Press,.

14. ***Sandu, G***. (2015). Logic, language, and games. Acta Philosophica Fennica, Vol. 91. Helsinki.

15. ***Tennant, N***. (1998). Games some people would have all of us play // Philosophia Mathematica (3), Vol. 6, p. 90-115.

Информация об авторе

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); директор Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail:leitval@gmail.com)

Information about the author

Tselishchev, Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Chief of the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Director of the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Science (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: leitval@gmail.com).

Дата поступления 12.10.2016