

УДК 534.1:532.59

## ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВОЛНЫ В ЦЕНТРИФУГИРОВАННОМ СЛОЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Ключева, В. М. Сандалов\*, М. Е. Ткач, И. Н. Солдатов

Институт проблем машиностроения РАН, 603024 Нижний Новгород, Россия

\* Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, Россия

E-mails: natali.kl01@gmail.com, jb1942@yandex.ru, tkach.mikee@gmail.com, erfv@newmail.ru

Рассмотрены волновые процессы в центрифугированном слое несжимаемой вязкой проводящей жидкости, находящейся в аксиальном магнитном поле, в полости быстро вращающегося бесконечного цилиндра с изолирующими стенками. Инерционные моды — решения линеаризованной краевой задачи магнитогидродинамики — представлены в виде суперпозиции винтовых полей. Приведены выражения для параметров завихренности винтовых течений, формирующих инерционную моду, при малом числе Стюарта. Построены дисперсионные кривые инерционных волн и проанализировано влияние магнитного поля на поле течения. Определены критические частоты, на которых возникает низшая (поверхностная) мода. Исследованы пространственная и временная устойчивости мод.

Ключевые слова: проводящая вязкая жидкость, инерционные волны, вращающееся магнитное поле.

Интерес к исследованию волновых движений жидкости, находящейся в быстро вращающемся цилиндре, обусловлен большим количеством различных технических приложений, таких как жидкостные центрифуги, турбомашин, компрессоры вращательного типа, жидкостные автобалансирующие устройства и др. Резонансное возбуждение волн в жидкости, находящейся в полости ротора, является основной причиной потери устойчивости стационарного вращения роторных систем [1, 2]. В настоящее время находят применение системы, в которых влияние силы тяжести пренебрежимо мало по сравнению с влиянием центробежной и кориолисовой сил. Волновые движения, в возникновении которых основную роль играют сила Кориолиса и градиент давления, называются инерционными, или гироскопическими. Сведения об основных свойствах этих волн можно найти в работах [3–6]. В [7] рассматривалось распространение плоских инерционных волн в проводящей невязкой жидкости. Стационарные гироскопические волны в слое идеальной жидкости, ограниченном твердыми цилиндрическими стенками, рассматривались в [8]. В [9] получены и исследованы дисперсионные соотношения для волн в центрифугированном слое вязкой жидкости.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00888) и Российского научного фонда (код проекта 14-19-01637).

© Ключева Н. В., Сандалов В. М., Ткач М. Е., Солдатов И. Н., 2015

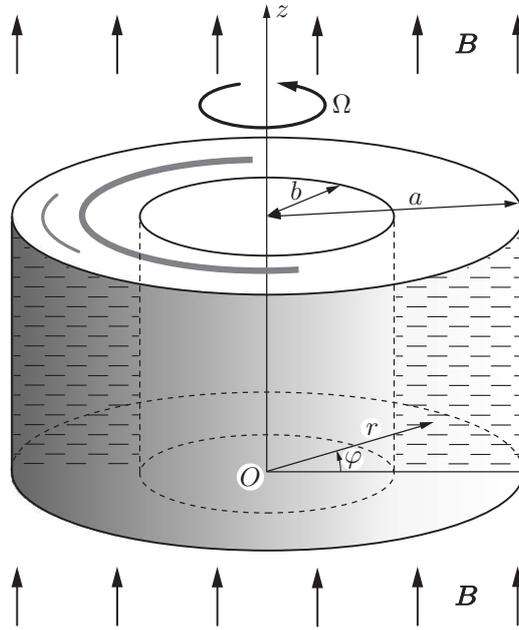


Рис. 1. Схема течения жидкости в магнитном поле

**1. Основные уравнения и винтовые потоки.** Рассмотрим слой проводящей несжимаемой вязкой жидкости, находящейся в бесконечном цилиндре кругового сечения радиусом  $a$ , быстро вращающемся вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Скорость вращения велика:  $\Omega^2 a/g \gg 1$ , поэтому влиянием силы тяжести можно пренебречь. С вращающимся цилиндром жестко скреплены источники магнитного поля, создающие однородное постоянное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль оси симметрии. Материал стенок цилиндра полагается непроводящим. Индуцированным магнитным полем будем пренебрегать. Введем связанную с цилиндром равномерно вращающуюся цилиндрическую систему координат  $Or\varphi z$  (рис. 1). В невозмущенном состоянии жидкость движется вместе с твердой цилиндрической оболочкой как единое целое:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad p_0 = p_a + \rho\Omega^2(r^2 - b^2)/2, \quad \mathbf{E}_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь  $p_a$  — давление в полости цилиндра, свободной от жидкости, которое ниже принимаем равным нулю;  $\rho$  — плотность,  $b$  — радиус свободной невозмущенной поверхности;  $\mathbf{E}_0$  — вектор напряженности электрического поля.

Движение жидкости во введенной неинерциальной системе координат после линеаризации в окрестности невозмущенного состояния (1) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \frac{p}{\rho} + 2[\mathbf{v}, \Omega] + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\sigma}{\rho} [\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \mathbf{B}], \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом задавались следующие граничные условия: условия непротекания тока и прилипания частиц жидкости к боковой стенке полости ( $r = a$ ):

$$E_r = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

условия непрерывности нормального напряжения, условия равенства нулю касательных напряжений и кинематическое условие на невозмущенной свободной поверхности жидкости ( $r = b$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{b} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{p}{\rho} - \Omega^2 b h + 2\nu \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, & E_r + v B &= 0, & \frac{\partial h}{\partial t} - u &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $u, v, w$  — радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ ;  $\nu$  — кинематическая вязкость; функция  $h(\varphi)$  определяет форму свободной поверхности жидкости:  $r = b + h(\varphi)$ ;  $p$  — давление;  $E_r, E_\varphi, E_z$  — компоненты вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ ;  $\sigma$  — электропроводность жидкости.

Уравнения (2) допускают частные решения (винтовые поля, или потоки И. С. Громеки [10], называемые также течениями Бельтрами) вида

$$\varkappa \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}; \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = \hat{v}(r) e^{i(\omega t + kz + m\varphi)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \frac{ikB}{\varkappa} \mathbf{v} + \nabla \Phi, \quad p = -\left(\frac{2\rho\Omega}{\varkappa} + \frac{ik\sigma B^2}{\varkappa^2}\right)w, \quad (7)$$

при условии что циклическая частота  $\omega$ , параметр завихренности  $\varkappa$  и аксиальное волновое число  $k$  связаны соотношением

$$\omega \varkappa^2 - 2\Omega k \varkappa - i\nu \varkappa^4 - ik^2 \sigma B^2 \rho^{-1} = 0, \quad (8)$$

а функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \Phi = 0$ . В этом нетрудно убедиться, применив операцию  $\text{rot}$  к первому уравнению (2) и используя (5). Для рассматриваемых винтовых полей первое уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{2}{\varkappa} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{ik\sigma B}{\rho \varkappa^2} (\mathbf{v}, \mathbf{B}) \right) + \text{rot} \left( \frac{2}{\varkappa} [\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] - \nu \text{rot } \mathbf{v} + \frac{\sigma}{\rho} \Phi \mathbf{B} \right),$$

откуда несложно получить выражение для давления (7).

Применяя к равенству (5) операцию  $\text{rot}$ , получаем

$$\Delta \mathbf{v} + \varkappa^2 \mathbf{v} = 0. \quad (9)$$

В проекции на ось  $z$  уравнение (9) имеет наиболее простой вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varkappa^2 \right) w = 0. \quad (10)$$

Подставляя (6) в (10), находим, что амплитуда  $\hat{w}(r)$  осевой компоненты вектора скорости должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} + \left( -\frac{m^2}{r^2} + \lambda^2 \right) \hat{w} = 0,$$

где  $\lambda^2 = \varkappa^2 - k^2$ . В винтовом потоке радиальная  $u$  и азимутальная  $v$  скорости связаны с компонентой  $w$  следующим образом:

$$u = \frac{im\varkappa}{\lambda^2 r} w + \frac{ik}{\lambda^2} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = -\frac{mk}{\lambda^2 r} w - \frac{\varkappa}{\lambda^2} \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (11)$$

Заметим, что в случае идеальной непроводящей жидкости соотношение (8) принимает вид

$$\omega \varkappa - 2\Omega k = 0. \quad (12)$$

Отметим также, что для плоской инерционной волны в невязкой жидкости параметр завихренности  $\varkappa$  имеет смысл модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Действительно, применив к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p - \frac{\rho}{2} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}]^2 \right) + 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}],$$

полученному из первого уравнения системы (2) отбрасыванием последних двух членов, операцию rot, имеем

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{v}}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (13)$$

Подставляя в (13) решение в виде плоской бегущей гармонической волны  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$ , получаем

$$\omega[\mathbf{k}, \mathbf{v}] = 2i\Omega k \mathbf{v}, \quad (14)$$

где  $k = (\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega})/\Omega$  — осевая (параллельная  $\boldsymbol{\Omega}$ ) компонента волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Модуль волнового вектора  $\mathbf{k}$  обозначим через  $\varkappa' = |\mathbf{k}|$ . Умножим уравнение (14) слева векторно на  $\mathbf{k}$ , а затем, используя тождество  $[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}]] \equiv \mathbf{k}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) - \varkappa'^2 \mathbf{v}$  и условие несжимаемости  $(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = 0$ , приведем его к виду

$$-\omega \varkappa'^2 \mathbf{v} = 2i\Omega k [\mathbf{k}, \mathbf{v}]. \quad (15)$$

Выражения (14), (15) позволяют при исключении  $[\mathbf{k}, \mathbf{v}]$  получить дисперсионное уравнение для плоской волны  $\omega = 2\Omega k/\varkappa'$ . Сравнивая полученную формулу с (12), нетрудно заметить, что  $\varkappa \equiv \varkappa'$ .

Обозначив через  $\theta$  угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$ , выражение (13) можно записать в виде  $\omega = 2\Omega \cos \theta$ . Таким образом, диапазон частот, в котором во вращающейся жидкости может быть возбуждена распространяющаяся инерционная волна, ограничен:  $|\omega| < 2\Omega$ .

**2. Инерционные моды.** Покажем, что краевая задача (2)–(4) имеет решения в виде инерционных мод, образуемых суперпозицией винтовых потоков с различными параметрами завихренности.

Введем безразмерные переменные  $r' = r/a$ ,  $z' = z/a$ ,  $t' = t\Omega$ ,  $\tau = \omega/\Omega$ ,  $\delta = b/a$ ,  $k' = ka$ ,  $\varkappa' = \varkappa a$ ,  $\lambda' = \lambda a$ ,  $E = \nu/(\Omega a^2)$ ,  $S = \sigma B^2/(\rho\Omega)$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\Omega a)$  (далее штрихи опускаем). Уравнение (8), принимающее в безразмерных переменных вид

$$\tau \varkappa^2 - 2k\varkappa - iE\varkappa^4 - ik^2S = 0, \quad (16)$$

позволяет определить параметр завихренности  $\varkappa$  как функцию отношения частот  $\tau$ , аксиального волнового числа  $k$ , чисел Экмана  $E$  и Стюарта  $S$ . Для всех корней алгебраического уравнения (16) (четвертой степени относительно  $\varkappa$ ) можно записать точные выражения. (Точные выражения для корней уравнения (16) при  $S = 0$  приведены в [9].) Однако эти выражения имеют громоздкий вид. Для рассматриваемого случая малых чисел  $E$  и  $S$  целесообразно использовать приближенные выражения для  $\varkappa$ . Один из четырех корней уравнения (16) (наименьший по абсолютной величине во всем диапазоне частот, за исключением малой окрестности точки  $\tau = 0$ ) зависит от параметров крупномасштабного движения жидкости:

$$\varkappa_j \approx \frac{1 - (-1)^j \sqrt{1 + iS\tau}}{\tau} k + i \frac{\beta_1 - (-1)^j \beta_2}{\tau^4} E k^3 + O(E^2), \quad (17)$$

где

$$j = 1, \quad \beta_1 = 4i - 2S\tau, \quad \beta_2 = \frac{8i - 8S\tau - iS^2\tau^2}{2\sqrt{1 + iS\tau}}.$$

Второй корень, получающийся из выражения (17) при подстановке в него  $j = 2$ , определяется воздействием магнитного поля на жидкость; во многих случаях для этого корня можно использовать более простое приближенное выражение

$$\varkappa_2 \approx i \frac{S}{2} k.$$

Оставшиеся два корня  $\varkappa_3, \varkappa_4$  уравнения (16) зависят от параметров вязких пограничных слоев:

$$\varkappa_j \approx (-1)^j \sqrt{\frac{|\tau|}{2E}} \left( -\frac{\tau}{|\tau|} + i \right) - \frac{k}{\tau} + O(E), \quad j = 3, 4.$$

Далее будем использовать не собственно  $\varkappa_j$ , а соответствующие  $\lambda_j = \sqrt{\varkappa_j^2 - k^2}$  ( $\text{Im } \lambda_j > 0$  при  $\tau > 0$ ).

Используя (11), можно искать решение только для осевой компоненты скорости  $w$ . Опуская  $e^{i(\tau t + kz + m\varphi)}$ , представим это решение в виде

$$w_m = \sum_{j=1}^4 \tilde{w}_{mj}(\lambda_j r), \quad (18)$$

где  $\tilde{w}_{mj}(\lambda_j r) = C_{2j-1} H_m^{(1)}(\lambda_j r) + C_{2j} H_m^{(2)}(\lambda_j r)$ ; индекс  $m$  указывает на порядок функций Ганкеля  $H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z)$ ;  $C_j$  — константы. Соответственно для радиальной и азимутальной компонент скорости, давления и радиальной компоненты электрического поля имеем выражения

$$u_m = \sum_{j=1}^4 \left( \frac{im(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} + \frac{ik}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right), \quad v_m = \sum_{j=1}^4 \left( \frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} - \frac{\varkappa_j}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right),$$

$$p_m = - \sum_{j=1}^4 \left( \frac{2}{\varkappa_j} + \frac{ikS}{\varkappa_j^2} \right) \tilde{w}_{mj}, \quad E_{rm} = B \sum_{j=1}^4 \left( -\frac{m}{\varkappa_j r} \tilde{w}_{mj} + \frac{\lambda_j}{\varkappa_j} \tilde{w}_{m-1j} \right).$$

Последнее граничное условие в (4), определяющее свободную поверхность  $h$  жидкости, позволяет исключить этот параметр из третьего граничного условия системы (4). Далее последнее граничное условие в (4) не используется. Последовательно подставляя решение (18) и записанные выше выражения для  $u_m, v_m, p_m, E_{rm}$  в граничные условия (3), (4), получаем

$$\sum_{j=1}^4 \left( -\frac{m}{\varkappa_j} \tilde{w}_{mj}(\lambda_j) + \frac{\lambda_j}{\varkappa_j} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j) \right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \left( \frac{im(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2} \tilde{w}_{mj}(\lambda_j) + \frac{ik}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j) \right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \left( \frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2} \tilde{w}_{mj}(\lambda_j) - \frac{\varkappa_j}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j) \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \tilde{w}_{mj}(\lambda_j) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \left( -\frac{2m(m+1)(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 \delta^2} + \varkappa_j \right) \tilde{w}_{mj}(\lambda_j \delta) + 2 \frac{\varkappa_j - mk}{\lambda_j \delta} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j \delta) \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \left( \frac{m(\varkappa_j^2 - 2k^2 + \varkappa_j k)}{\lambda_j^2 \delta} \tilde{w}_{mj}(\lambda_j \delta) - \frac{\varkappa_j^2 - 2k^2}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j \delta) \right) = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \left( \frac{2}{\varkappa_j} - \frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 \tau} - 2iE \frac{m(m+1)(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 \delta^2} - 2iEk \right) \tilde{w}_{mj}(\lambda_j \delta) + \left( -\frac{k\delta}{\lambda_j \tau} + 2iE \frac{m\varkappa_j - k}{\lambda_j \delta} \right) \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j \delta) \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \left( \frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 \varkappa_j \delta} \tilde{w}_{mj}(\lambda_j \delta) + \frac{k}{\lambda_j \varkappa_j} \tilde{w}_{m-1j}(\lambda_j \delta) \right) = 0.$$

Для компактности система (19) записана таким образом, что неизвестные величины  $C_j$  не выписаны в явном виде. Переход к стандартной форме

$$A\mathbf{C} = 0, \tag{20}$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_8)^T$ ;  $A = (a_{ij})$  — матрица размером  $8 \times 8$  с элементами  $a_{11} = (im(\varkappa_1 - k)/\lambda_1^2)H_m^{(1)}(\lambda_1) + (ik/\lambda_1)H_{m-1}^{(1)}(\lambda_1)$  и т. д., достаточно очевиден и в данной работе опускается.

Из условия разрешимости однородной системы (20) относительно восьми неизвестных постоянных  $C_j$  получаем дисперсионное уравнение

$$\det A = 0.$$

Заметим, что матрица  $A$  является плохо обусловленной, поэтому при вычислениях целесообразно переопределить часть коэффициентов  $C_j$  следующим образом:

$$C'_{2j-1} = C_{2j-1}H_m^{(1)}(\lambda_j \delta), \quad C'_{2j} = C_{2j}H_m^{(2)}(\lambda_j), \quad j = 2, 3, 4.$$

Дисперсионная кривая имеет счетное множество ветвей. С точки зрения приложений (в частности, исследования устойчивости роторных систем, частично заполненных жидкостью) наиболее интересны волны с  $m = 1$ . На рис. 2 приведены зависимости действительной части безразмерного аксиального волнового числа  $\text{Re}(k)$  от безразмерной частоты  $\tau \geq 0$  для нескольких низших инерционных мод. Моды пронумерованы таким образом, что

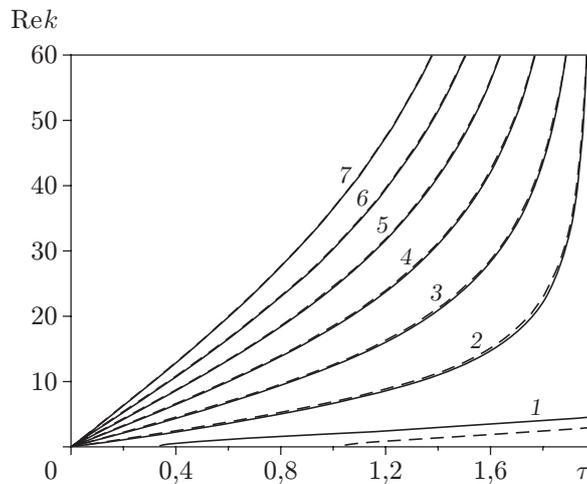


Рис. 2. Зависимость действительной части аксиального волнового числа  $k$  от частоты  $\tau$  для низших мод при  $E = 10^{-6}$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $S = 0,002$ : сплошные кривые —  $m = 1$ , штриховые —  $m = -1$ ; 1 —  $n = 0$ , 2 —  $n = 1$ , 3 —  $n = 2$ , 4 —  $n = 3$ , 5 —  $n = 4$ , 6 —  $n = 5$ , 7 —  $n = 6$

на фиксированной частоте волновое число  $u$  моды с бóльшим номером больше по абсолютной величине.

Пренебрегая влиянием вязкости и проводимости жидкости, дисперсионное уравнение можно записать в компактном виде [9]

$$\left[ k\gamma J_{m-1}(k\gamma) - m\left(1 - \frac{2}{\tau}\right) J_m(k\gamma) \right] \left[ k\delta\gamma Y_{m-1}(k\delta\gamma) - \left(m - \frac{2m}{\tau} + 4 - \tau^2\right) Y_m(k\delta\gamma) \right] - \\ - \left[ k\delta\gamma J_{m-1}(k\delta\gamma) - \left(m - \frac{2m}{\tau} + 4 - \tau^2\right) J_m(k\delta\gamma) \right] \left[ k\gamma Y_{m-1}(k\gamma) - m\left(1 - \frac{2}{\tau}\right) Y_m(k\gamma) \right] = 0, \quad (21)$$

где  $\gamma = \sqrt{4/\tau^2 - 1}$ ;  $J_m(x)$ ,  $Y_m(x)$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. При  $-2 < \tau < 2$  уравнение (21) имеет счетное множество вещественных корней. Неосесимметричная низшая ( $n = 0$ ) мода, являющаяся поверхностной волной, существует не при всех  $\tau \in (-2, 2)$ , а лишь в интервалах частот  $(\tau_{c1}, 2)$ ,  $(-2, \tau_{c2})$ . Частоты запирания  $\tau_{cj}$ , зависящие от параметров  $\delta$  и  $m$ , можно определить из уравнения

$$(1 + \delta^{m+1})(\tau^4 - 4\tau^2) + (1 - \delta^{m+1})(2\tau^3 - m\tau^2 - 8\tau + 4m) = 0, \quad m \neq 0, \quad (22)$$

полученного из (21). Один из четырех корней уравнения (22), а именно

$$\tau_{c1} = \frac{-1 + \delta^{m+1} + \sqrt{1 + m - 2\delta^{m+1} + (1 - m)\delta^{2m+2}}}{1 + \delta^{m+1}},$$

при  $m \leq 8$  и  $0 < \delta < 1$  лежит в интервале  $(0, 2)$ , второй корень

$$\tau_{c2} = \frac{-1 + \delta^{m+1} - \sqrt{1 + m - 2\delta^{m+1} + (1 - m)\delta^{2m+2}}}{1 + \delta^{m+1}}$$

лежит в интервале  $(-2, 0)$  только при  $\delta \approx 1$  (рис. 3). Оставшиеся два корня уравнения (22) имеют значения  $\tau_{c3} = 2$ ,  $\tau_{c4} = -2$ .

По сравнению с низшей модой у более высоких мод ( $n > 0$ ) свободная поверхность жидкости при распространении волн незначительно отклоняется от невозмущенного положения, поэтому высшие моды можно определить как внутренние инерционные волновые движения. Волны с частотой  $\tau$  с азимутальным волновым числом  $m \neq 0$ , распространяющиеся в прямом и обратном направлениях, имеют различную длину. Поскольку  $n$ -й моде

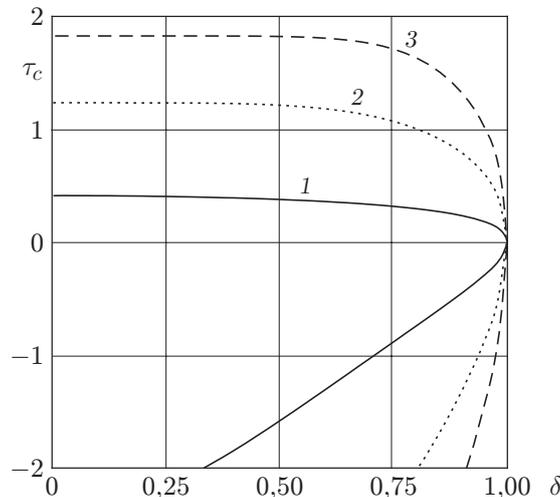


Рис. 3. Зависимость частоты запирания  $\tau_c$  от  $\delta$  при различных значениях  $m$ :  
1 —  $m = 1$ , 2 —  $m = 4$ , 3 —  $m = 7$

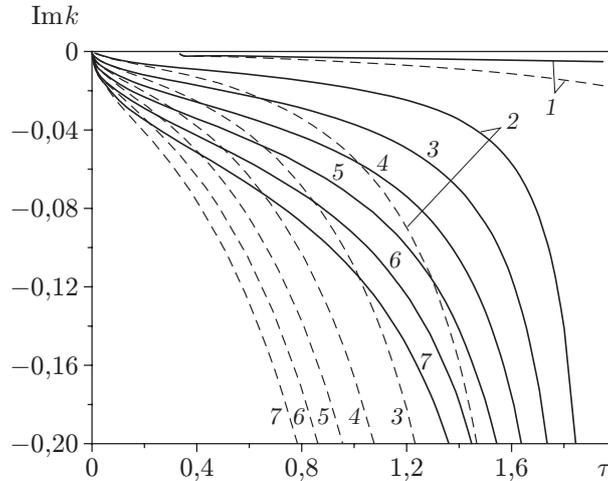


Рис. 4. Зависимость мнимой части осевой компоненты волнового вектора от частоты  $\tau$  при  $E = 10^{-6}$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $m = 1$ ,  $S = 0,002$  (сплошные линии),  $S = 0,02$  (штриховые линии) для низших мод:  
 1 —  $n = 0$ , 2 —  $n = 1$ , 3 —  $n = 2$ , 4 —  $n = 3$ , 5 —  $n = 4$ , 6 —  $n = 5$ , 7 —  $n = 6$

частоты с азимутальным волновым числом  $m$  при отрицательных  $\tau$  соответствует  $n$ -я мода с  $-m$  при  $\tau > 0$ , можно ограничиться рассмотрением положительных частот. С увеличением азимутального волнового числа растет аксиальное волновое число (уменьшается осевая фазовая скорость), что наиболее существенно для низких мод.

**3. Затухание инерционных волн.** Под влиянием вязкости и проводимости жидкости у волнового числа  $k$  появляется мнимая часть (коэффициент затухания) при вещественных  $|\tau| < 2$ . В отличие от действительной части  $k$ , чувствительность которой к изменениям малых чисел  $E$ ,  $S$  незначительна, влияние изменений  $E$  и  $S$  на коэффициент затухания более существенное, особенно при значениях  $\tau \rightarrow -2$ ,  $\tau \rightarrow 2$ .

На рис. 4 показана зависимость мнимой части  $\text{Im } k$  безразмерного аксиального волнового числа  $k$  от безразмерной частоты  $\tau$  для нескольких первых мод. Видно, что с увеличением номера моды  $n$  коэффициент затухания моды растет по абсолютной величине. С увеличением номера моды происходит усложнение ее пространственной структуры, которая приобретает более осциллирующий характер, чем объясняется увеличением  $\text{Im } k$ . При  $|\tau| \rightarrow 2$  резко возрастает коэффициент затухания, что обусловлено быстрым увеличением параметра завихренности  $\varkappa_1$ , определяющим крупномасштабное течение в инерционной моде. Таким образом, из рис. 4 следует, что под влиянием вязкости нейтрально-устойчивые инерционные волны в жидкости без учета вязкости и проводимости становятся затухающими, а осевое магнитное поле вносит дополнительный вклад, усиливая затухание.

Поскольку задача об эволюции граничных возмущений принципиально отличается от задачи об эволюции начальных возмущений, линейный анализ пространственной устойчивости целесообразно дополнить исследованием временной устойчивости. На рис. 5 видно, что действительной части аксиального волнового числа соответствуют комплексные частоты  $\tau$  с мнимой частью  $\text{Im } \tau > 0$ , т. е. возмущение, имеющее вид монохроматической волны, уменьшается со временем.

**Заключение.** Преимущество рассмотрения вращательных движений вязкой жидкости с использованием суперпозиции винтовых полей заключается в отсутствии необходимости выделять пограничные слои и использовать соответствующие приближения. С помощью указанных разложений единообразно описываются и крупномасштабное ядро течения, и вязкие (и магнитогидродинамические) пограничные слои. Осевое магнитное поле

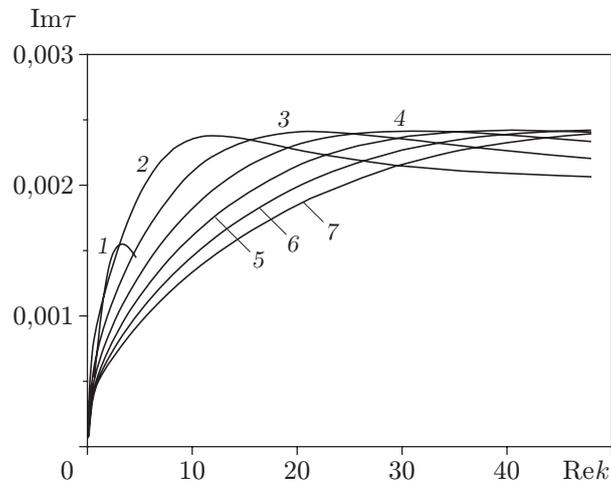


Рис. 5. Зависимость мнимой части  $\tau$  от действительной части аксиального волнового числа  $k$  при  $E = 10^{-6}$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $S = 0,002$ ,  $m = 1$  для нескольких первых мод:

1 —  $n = 0$ , 2 —  $n = 1$ , 3 —  $n = 2$ , 4 —  $n = 3$ , 5 —  $n = 4$ , 6 —  $n = 5$ , 7 —  $n = 6$

усиливает затухание инерционных волн во вращающемся слое проводящей вязкой жидкости. Этот результат позволяет предположить, что для проводящих жидкостей магнитное поле можно использовать в качестве дополнительного фактора, стабилизирующего режим стационарного вращения роторных систем, содержащих жидкость.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Моисеев Н. Н.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. М.: Наука, 1965.
2. **Дерендяев Н. В., Сандалов В. М.** Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // *Машиноведение*. 1986. № 1. С. 19–26.
3. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
4. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
5. **Копачевский Н. Д.** Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Зуй Кан Нго. М.: Наука, 1989.
6. **Алексеев С. В.** Введение в теорию концентрированных вихрей / С. В. Алексеев, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005.
7. **Nigam S. D., Nigam P. D.** Magnetohydrodynamic waves in rotating liquids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1963. V. 272. P. 529–541.
8. **Салтанов Н. В.** Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 305, № 6. С. 1325–1327.
9. **Солдатов И. Н.** Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости // *ПМТФ*. 2008. Т. 49, № 2. С. 15–20.
10. **Васильев О. Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958.

*Поступила в редакцию 28/1 2014 г.,  
в окончательном варианте — 30/V 2014 г.*