

25. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
26. Гурин С. С., Ламбина Е. Н. Приближенный расчет термоупругих напряжений в биметаллических отливках.— В кн.: Теор. и приклад. механика. Вып. 2. Минск, «Вышэйш. школа», 1975.

УДК 539.4

## ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ И РАЗМЕРОВ ИНДЕНТОРА НА КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

И. М. Каганова

(Москва)

1. В настоящее время экспериментально и теоретически исследован вопрос о контакте параболоидов [1] (задача Герца). Детально определенное распределение напряжений вблизи площадки соприкосновения позволяет в этой задаче оценить разрушающую нагрузку как по критериям начала пластического течения [2], так и при хрупком разрушении [3].

Влияние формы сжимаемых тел на величину максимального давления, достижимого в плоскости контакта до начала пластического течения, рассматривалось в [4] на примере осесимметрических тел, ограниченных поверхностью

$$(1.1) \quad z = Ar^{2\lambda},$$

ось  $z$  перпендикулярна плоскости контакта;  $r$  — радиус-вектор в плоскости контакта. При  $\lambda = 1$  такая контактная задача переходит в задачу Герца. Результаты данной работы показывают, что давление в плоскости контакта можно повысить до предельного значения  $p_*$ , допустимого критерием Мизеса [5], если максимум интенсивности сдвиговых напряжений достигается на поверхности соприкосновения и совпадает с местом действия наибольшего нормального контактного давления. Возможность реализации такого напряженного состояния не зависит от значения размерного коэффициента  $A$ , определяющего масштаб поверхности (1.1). Необходимым условием достижения давления  $p_*$  является выбор показателя степени  $\lambda$  в (1.1) из интервала  $1/2 < \lambda \leq \lambda^*$  ( $\lambda^* < 1$  и определяется прочностными и упругими характеристиками материала).

В данной работе развито представление о характере распространения микротрещин при хрупком разрушении под сферическим индентором [3] обобщается на случай индентора, поверхность которого описывается степенной функцией (1.1). Полученные результаты применяются для оценки давления в миниатюрной камере [6], где высокое давление создается при вдавливании в плиту сглаженного конического индентора. Такая модификация широко применяемых аппаратов типа «наковальни Бриджмена» представляется перспективной при решении задачи о расширении диапазона доступных для исследования давлений. В [7] сообщается о наблюдавшихся на этой аппаратуре переходах в металлическое состояние диэлектриков BN, C, SiO<sub>2</sub>, MgO.

2. Критерий хрупкого разрушения может быть получен из уравнения энергетического баланса [5]. В этом случае исследуется изменение свободной энергии  $F$ , связанное с наличием трещины длины  $c$ . Трещина становится неустойчивой, если ее размер  $c = c_k$  соответствует одному из экстремумов функции  $F(c)$ . С ростом растягивающего усилия трещина растет квазистатически, если  $c_k$  определяет минимум  $F(c)$ ; критическая трещина спонтанно удлиняется при неизменных внешних условиях, если  $c_k$  соответствует максимуму  $F(c)$ .

При таком подходе в задачу изначально вводятся два параметра размерности длины: средний размер имеющихся в материале трещин  $c$  и отношение  $\gamma/E$ , значение которого определяется силой межатомных связей.

Характер развития опасной трещины зависит от соотношения между  $c$ ,  $\gamma/E$  и размером области повышенных растягивающих напряжений, в которой расположена данная трещина.

При контакте значения  $c$  и  $\gamma/E$  должны сравниваться с размером пятна контакта  $a_p$  при разрушении. Для инденторов, ограниченных поверхностью (1.1), значение  $a_p$  при данном значении  $\lambda$  определяется величиной коэффициента  $A$ , характеризующего размер индентора. Как будет показано ниже, «размер» вступающих в контакт тел существенно влияет на величину давления, достижимого в плоскости контакта к моменту хрупкого разрушения.

Вблизи центра контакта все главные значения тензора напряжений соответствуют сжатию, что препятствует развитию трещин. Хрупкое разрушение начинается обычно на поверхности контакта вне площадки соприкосновения ( $z = 0$ ,  $r \geq a$ ,  $a$  — радиус контакта), где реализуется чистый сдвиг в условиях плоского напряженного состояния: компоненты  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{rz}$  тензора напряжений обращаются в нуль, а  $\sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{rr}$ . Наиболее вероятным местом начала хрупкого разрушения является край пятна контакта, где растягивающее напряжение  $\sigma_{rr}$  достигает своего максимального значения  $\sigma_m$ :

$$(2.1) \quad \sigma_m = \frac{1-2\nu}{2} \frac{Q}{\pi a^2}$$

( $Q$  — величина сжимающей силы,  $\nu$  — коэффициент Пуассона). Напряжение  $\sigma_m$  возрастает с ростом  $Q$ . В эксперименте наблюдается образование круговых конических трещин по краю пятна контакта.

Поле напряжений вблизи поверхности контакта удобно описывать главными значениями тензора  $\sigma_{ik}$ . Их нумерация выбрана так, что главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  совпадают на поверхности  $z = 0$  с напряжениями  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{zz}$  соответственно. Напряжение  $\sigma_{\varphi\varphi}$  совпадает с главным значением  $\sigma_2$ .

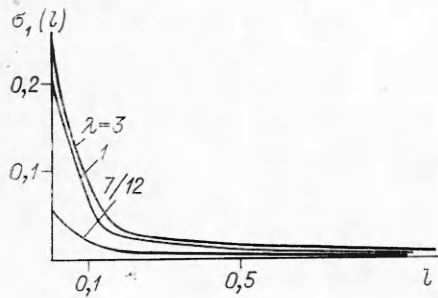
В экспериментах со сферическими инденторами [8] показано, что в первом приближении коническая трещина развивается нормально главному растягивающему напряжению  $\sigma_1$ . Ниже предполагается, что эта закономерность выполняется и для трещины, образующейся под индентором, поверхность которого описывается уравнением (1.1).

Для произвольных осесимметрических инденторов контактное давление около края площадки соприкосновения ( $r \rightarrow a$ ) убывает как  $(1 - r/a)^{1/2}$ . Эта общая зависимость должна сказываться и на скорости убывания напряжений вблизи края контакта. Для проверки по известным формулам Буссинеска [1] были численно рассчитаны напряжения под индентором, ограниченным поверхностью (1.1) при различных значениях  $\lambda$ , и построены зависимости  $\sigma_1 = \sigma_1(l)$ , определяющие распределение растягивающего напряжения  $\sigma_1$  вдоль предполагаемого направления развития трещины (фиг. 1). Наиболее удобное представление для распределения нормального давления под индентором такой формы получено в [9]. Следуя работе [3], где рассматривалось образование конической трещины при вдавливании в плиту сферического индентора, запишем  $\sigma_1(l)$  в виде

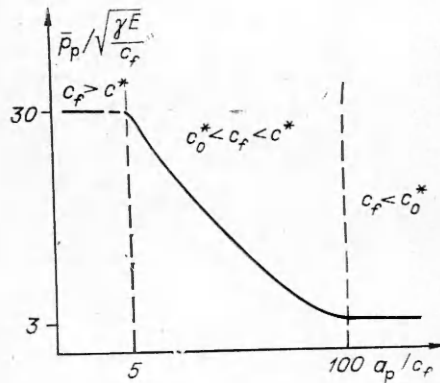
$$(2.2) \quad \sigma_1(l) = \begin{cases} \sigma' + (\sigma_m - \sigma')(1 - l/\delta), & l < \delta, \\ \sigma', & l > \delta, \end{cases}$$

адекватно описывающем значение  $\sigma_1$  при  $l \leq 0,5a$ ; расстояние  $l$  отсчитывается от поверхности контакта. Отношения  $\delta/a$  и  $\sigma'/\sigma_m$  слабо зависят от  $\lambda$ :  $\delta/a \approx 0,13$ ,  $\sigma'/\sigma_m \approx 0,1$ .

Влияние формы индентора (значения  $\lambda$  в (1.1)) на критические параметры хрупкого разрушения определяется зависимостью размеров пятна



Ф и г. 1



Ф и г. 2

контакта и, следовательно, величины напряжения  $\sigma_m$  (2.1) от геометрии индентора при данной нагрузке  $Q$ . Ниже результаты [3] записаны в виде, допускающем обобщение на случай разрушения под осесимметрическим индентором произвольной формы.

На основании теории разрушения [10] исследуются решения уравнения  $\partial F(c)/\partial c = 0$  в поле напряжений (2.2). Функция  $F(c)$  имеет три экстремума при  $c = c_k$ , значения  $c_k$  есть  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$ , если  $\sigma_m$  не превышает критического значения  $\sigma_m^*$ :

$$(2.3) \quad \sigma_m^* \approx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_m}{\sigma'} \right) \left( \frac{a}{\delta} \right) \frac{1}{1 - \nu^2} \right]^{1/2} \sqrt{\gamma E} \sim 6 \sqrt{\gamma E} / a.$$

Размер

$$(2.4) \quad c_0 \approx c_G \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \frac{c_G}{\delta} \right], \quad c_G = 2\gamma E / \pi (1 - \nu^2) \sigma_m^2,$$

определяется максимум  $F(c)$  при  $c_0 \ll \delta$ . Значение  $c_G$  совпадает с критическим размером трещины Гриффитса [5] при постоянном растягивающем напряжении  $\sigma = \sigma_m$ . Значения  $c_k = c_{1,2} > \delta$  и определяют соответственно минимум и максимум функции  $F(c)$ . При  $\sigma_m = \sigma_m^*$  эти экстремумы сливаются:  $c_1 = c_2 = c^*$ ; при возрастании нагрузки уравнение  $\partial F(c)/\partial c = 0$  не имеет действительных корней при  $c > \delta$

$$(2.5) \quad c^* \approx \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_m}{\sigma'} \right)^2 c_G.$$

Звездочкой отмечаются значения всех параметров при  $\sigma_m = \sigma_m^*$ . Изменение числа возможных равновесных размеров трещины при  $\sigma_m = \sigma_m^*$  связано с изменением условий устойчивости поверхностных трещин, спонтанное увеличение размеров которых приводит к появлению развитой конической трещины.

Пусть  $c_f$  — средний размер поверхностной трещины в недеформированном материале. Различие в характере распространения таких трещин при разных соотношениях между  $c_f$  и характерными размерами  $c_0^*$ ,  $c^*$  наиболее наглядно можно проиллюстрировать графиком зависимости среднего давления  $\bar{p}_p = Q_p / \pi a_p^2$  от размеров пятна контакта  $a_p$  к моменту разрушения. Такая зависимость является универсальной и должна наблюдаться для произвольных осесимметрических инденторов. При заданном значении  $\sigma_m$  среднее давление определяется по (2.1).

1. Пусть  $c_f < c_0^*$ . В этом случае рост трещины начнется при некотором значении  $\sigma_m = \sigma_m^1 > \sigma_m^*$ , когда критический размер  $c_0$  уменьшится до значения  $c_f$ . Поверхностная трещина, ставшая неустойчивой при  $\sigma_m > \sigma_m^*$ , спонтанно удлиняется, вызывая полное разрушение. Из (2.4), (2.5) следует, что  $\sigma_m^1 = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi(1-\nu^2)c_f}}$ . Условие  $c_f < c_0^*$  определяет возможные значения радиуса пятна контакта при разрушении:  $a_p > a_1 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\sigma_m^1}{\sigma'} \right) \left( \frac{a}{\delta} \right) c_f \sim 100c_f$  (фиг. 2).

2. Если  $c_0^* < c_f < c^*$  (или  $a_2 < a_p < a_1$ ;  $a_2 = \pi \left( \frac{\sigma'}{\sigma_m} \right) \left( \frac{a}{\delta} \right) c_f \sim 5c_f$ ), развитие конической трещины будет идти в два этапа. Сначала, когда значение  $c_0$  станет равным  $c_f$  (при  $\sigma_m^1 < \sigma_m^*$ ), поверхностная трещина растет до размеров, соответствующих равновесному значению  $c_1$ . Это увеличение глубины трещины незначительно и не воспринимается как полное разрушение. При дальнейшем нагружении размер трещины увеличивается равновесно до тех пор, пока при  $\sigma_m = \sigma_m^*$  не совпадает со значением  $c_2 (c_1 = c_2 = c^*)$ . Здесь размер трещины резко возрастает, приводя к разрушению. Максимальное растягивающее напряжение к моменту разрушения есть  $\sigma_m^*$  (фиг. 2).

3. Если радиус пятна контакта при разрушении достаточно мал ( $a_p < a_2$ ), что соответствует неравенству  $c_f > c^*$ , область повышенных напряжений  $\delta$  вблизи поверхности слишком мала, и развитие поверхностной трещины происходит в практически постоянном поле напряжений  $\sigma'$ . Разрушение начинается при  $\sigma_m < \sigma_m^*$ , когда значение нестабильного размера  $c_2$  сравнивается с  $c_f$  (фиг. 2).

Для определения величины разрушающей нагрузки  $\bar{Q}_p$  в зависимости от геометрии индентора соотношения (2.3)–(2.5) должны быть дополнены уравнением, определяющим радиус пятна контакта в зависимости от нагрузки. Если поверхность индентора описывается уравнением (1.1), то в соответствии с [9]

$$(2.6) \quad a^{2\lambda+1} = \frac{Q(1-\nu^2)\Gamma(\lambda+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)\lambda^2AE}.$$

Рассчитанные по (2.4), (2.5) значения  $c_0^*$  и  $c^*$  являются постоянными, характеризующими данный индентор. Различным соотношениям между  $c_f$ ,  $c_0^*$  и  $c^*$  можно сопоставить неравенства, ограничивающие возможные значения размерного коэффициента  $A$ , определяющего размер индентора. Используя (2.6), получаем

$$(2.7) \quad \begin{cases} c_f < c_0^*(\lambda), \text{ если } A < A_0^{(\lambda)} \equiv \frac{2^{4\lambda-1/2}\Gamma(\lambda+3/2)}{1-2\nu} \left[ \frac{\pi \left( \frac{\sigma_m}{\sigma'} \right) \left( \frac{a}{\delta} \right) \right]^{1-2\lambda} \times \\ \hspace{15em} \times \sqrt{\frac{\gamma(1-\nu^2)}{E c_f^{4\lambda-1}}}, \\ c_0^*(\lambda) < c_f < c^*(\lambda), \text{ если } A_0^{(\lambda)} < A < A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}, \\ c_f > c^*(\lambda), \text{ если } A > A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}. \end{cases}$$

Суммируя предыдущие результаты, выпишем выражение для разрушающей нагрузки  $Q_p^{(\lambda)}$  в зависимости от параметров, определяющих форму индентора,

$$(2.8) \quad Q_p^{(\lambda)} = \begin{cases} Q_\lambda^* \left[ \frac{c_0^*(\lambda)}{c_f} \right]^{\frac{2\lambda+1}{2(2\lambda-1)}}, & A < A_0^{(\lambda)}, \\ Q_\lambda^*, & A_0^{(\lambda)} < A < A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}, \\ Q_\lambda^* \left[ \frac{4c^*(\lambda)}{c_f} \right]^{\frac{2\lambda+1}{2(2\lambda-1)}}, & A \gg A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}, \end{cases}$$

$$Q_\lambda^* = \left[ \frac{E^{2(\lambda-1)} \nu^{2\lambda+1}}{A^3} \left( \frac{(1-\nu^2) \Gamma(\lambda + 3/2)}{\lambda^2 \Gamma(\lambda) \sqrt{\pi}} \right)^3 \left( \frac{2\pi^2 \left( \frac{\sigma_m}{\sigma'} \right) \left( \frac{a}{\delta} \right)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)^2} \right)^{2\lambda+1} \right]^{\frac{1}{4\lambda-1}}.$$

Явный вид  $Q_p^{(\lambda)}$  при  $A > A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}$  удается получить только асимптотически при  $A \gg A_0^{(\lambda)} \left( \frac{\sigma_m}{2\sigma'} \right)^{4\lambda-1}$ , когда  $c_f \gg c^*(\lambda)$ . В частном случае  $\lambda = 1$  (сферический индентор радиуса  $R = 1/2A$ ) полученные выше оценки критических условий разрушения совпадают с результатами работы [3].

3. Выражение (2.8) для предельной нагрузки  $Q_p^{(\lambda)}$  позволяет оценить максимальное давление, развивающееся в плоскости контакта к моменту хрупкого разрушения. С учетом результатов работы [4] такие расчеты могут быть использованы как исходные данные при конструировании аппаратов высокого давления типа «наковальни Бриджмена».

Сравнивая условия разрушения под инденторами, форма которых описывается уравнением  $z = Ar^{2\lambda}$  при различных  $\lambda$ , можно видеть, что разрушение крайне затруднено, если поверхность индентора близка к конической ( $\lambda \rightarrow 1/2$ ): эффекты пластического течения здесь проявляются только при предельно высоких давлениях (см. п. 1); при данном нормальном давлении  $P(0)$  в центре контакта значение максимального растягивающего напряжения  $\sigma_m$ , определяющего появление хрупких трещин на краю пятна контакта, стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 1/2$ :  $\sigma_m(\lambda) = (1-2\nu) \times \left( \frac{2\lambda-1}{2\lambda+1} \right) P(0)$ .

Можно показать, что при  $\lambda \leq 1$  максимальное нормальное давление  $P_\lambda^m = \frac{2\lambda+1}{2(2\lambda-1)} \frac{Q}{\pi a^2}$  достигается в центре контакта. Значение  $P_\lambda^m$  к началу хрупкого разрушения определяется по известному среднему давлению  $\bar{P}_p$  (см. фиг. 2). При данном  $\lambda$  увеличение контактного давления можно ожидать только на малом пятне контакта ( $a_p < a_1 \sim 100c_f$ ), что соответствует значениям\*  $A > A_0^\lambda$  (см. (27)).

При значениях  $\lambda$ , близких к  $1/2$ , распределение давления в плоскости контакта резко неоднородно, что позволяет вблизи центра получать давления, во много раз превышающие среднее по площадке нагружения. Повышение максимального давления в плоскости контакта связано с уменьшением размеров области, в которой давление велико.

\* Для сферических инденторов ( $\lambda = 1$ ,  $A = 1/2 R$ ) увеличение коэффициента  $A$  соответствует уменьшению радиуса индентора.

В аппаратуре [6] скругленный конический индентор

$$(3.1) \quad z(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2R}, & r \leq r_0, \\ r \operatorname{tg} \beta + \left( \frac{r_0^2}{2R} - r_0 \operatorname{tg} \beta \right), & r \geq r_0 \end{cases}$$

(в точке  $r_0$  сглаженная часть индентора плавно переходит в коническую:  $r_0 = R \operatorname{tg} \beta$ ,  $\beta = \pi/2 - \alpha$ ,  $2\alpha$  — угол раствора конуса) и плита из искусственных алмазов типа карбонадо были использованы как рабочие элементы камеры высокого давления.

Возможности схемы скругленный конус — плоскость широко обсуждались в литературе. Наиболее подробно этот вопрос разбирается в работе [11], где величина максимального давления  $P_p^m$ , реализуемого в такой камере до начала разрушения, оценивается по значению растягивающего напряжения на краю пятна контакта в рамках теории Герца, откуда  $P_p^m \sim 60$  кбар. Такая оценка справедлива только при определенных соотношениях между радиусом скругления конуса  $R$  и углом раствора  $2\alpha$ , когда  $R$  достаточно велико и разрушающая нагрузка меньше усилия, необходимого для участия в контакте конической поверхности индентора. Если параметры системы (3.1) допускают участие конической поверхности в контакте до разрушения, то результаты работы [11] неприменимы; приведенное там значение  $P_p^m$  существенно занижено.

Распределение нормального давления  $P(r)$  под скругленным коническим индентором можно определить по общей формуле [12], связывающей значение  $P(r)$  с формой осесимметрического индентора интегральным соотношением

$$(3.2) \quad P(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_r^a \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad 0 < r \leq a,$$

$$F(s) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ h - s \int_0^s \frac{z'(\sigma) d\sigma}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} \right]$$

( $h$  — перемещение индентора). Радиус контакта  $a$  определяется из условия равновесия  $\left( Q = 2\pi \int_0^a P(r) r dr \right)$ , которое может быть приведено к виду

$$\int_0^a z'(\sigma) \sigma^2 (a^2 - \sigma^2)^{-1/2} d\sigma = Q(1 - \nu^2)/E.$$

Исследование выражения (3.2), где  $z(r)$  задано равенством (3.1), показывает, что коническая поверхность индентора принимает участие в контакте только при нагрузках  $Q > Q_0$ , где  $Q_0$  — усилие, при котором радиус пятна контакта  $a = r_0$ ,

$$Q_0 = \frac{2}{3} \frac{E \operatorname{tg} \beta r_0^3}{(1 - \nu^2)}.$$

При  $Q < Q_0$  распределение давления в плоскости контакта может быть определено по решению Герца:  $P(r) = \frac{3}{2} \frac{Q}{\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ .

При нагрузках  $Q \gg Q_0$

$$(3.3) \quad P(r) = \frac{E \operatorname{tg} \beta}{4(1-\nu^2)} \begin{cases} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - r^2/c^2}}{r_0/a + \sqrt{r_0^2/a^2 - r^2/a^2}} \right], & r < r_0, \\ \ln \left( \frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right), & r > r_0, \end{cases}$$

здесь  $a \approx 2((1 - \nu^2)Q/\pi E \operatorname{tg} \beta)^{1/2}$ .

Формула (3.3) при  $r > r_0$  описывает зависимость контактного давления от радиуса  $r$  для конических инденторов ( $r_0 = 0$ ). Логарифмическое возрастание давления в центре контакта при  $r_0 \ll a$  может быть получено непосредственно отсюда как результат усреднения по малой площадке радиуса  $r_0$ .

Поликристаллические алмазы типа карбонадо — новый сверхтвердый материал, для которого характерно хрупкое разрушение. Нагрузка, при которой происходит разрушение инденторов, изготовленных из этого материала, может быть оценена по (2.8).

В системе (3.1) условие  $Q_0 < Q_p^1$ , где  $Q_p^1$  — разрушающая нагрузка сферического индентора, определяет соотношение между параметрами  $R$  и  $\beta$ , допускающее участие в контакте конической поверхности индентора. Неравенство  $Q_0 < Q_p^1$  выполняется, если

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \beta < \frac{3}{1-2\nu} \sqrt{\frac{2\pi(1-\nu^2)\gamma}{E c_f^3}}, \quad R > R_0,$$

$$\operatorname{tg}^3 \beta R < \frac{9\pi^2}{2} \frac{\left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma'}\right) (1-\nu^2) (\gamma/E)}{(1-2\nu)^2}, \quad R < R_0,$$

где

$$R_0 = \frac{1-2\nu}{24} \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma'}\right) \sqrt{\frac{2\pi E c_f^3}{(1-\nu^2)\gamma}}.$$

Отсутствие достоверных данных о значении поверхностной энергии  $\gamma$  и средних размерах поверхностных трещин  $c_f$  в алмазах типа карбонадо затрудняет реалистическую оценку величины давления в рассматриваемой схеме. Если, однако, предположить, что значение  $c_f$  по порядку величины совпадает с обычными размерами поверхностных трещин в хрупких материалах [3] ( $c_f \sim 10^{-4}$  см), то значение  $\gamma$  можно вычислить, используя данные о разрушении сферических инденторов большого радиуса, когда для оценки разрушения достаточно знать значение растягивающего напряжения на краю пятна контакта (см. п. 2). В [6] указывается, что среднее давление при разрушении шаров радиуса  $R \sim 2 - 2,5$  см порядка  $4 \cdot 10^4$  кг/см<sup>2</sup>. При  $E \sim 10^7$  кг/см<sup>2</sup> (значение модуля Юнга для алмазов) это соответствует значению  $\gamma \sim 1,5 \cdot 10^{-3}$  кг/см.

Результаты расчетов [11] справедливы только вне области (3.4) при  $R > R_0$ ,  $R_0 \sim 0,4$  см. При выполнении неравенств (3.4) оценка давления  $P_p^m$  должна проводиться по формуле (3.3), где  $Q = Q_p^{(1/2)}$ , значение  $Q_p^{(1/2)}$  определяется выражением (2.8) при  $\lambda = 1/2$ . Здесь давление в центре контакта может достигать значений порядка  $10^6$  кг/см<sup>2</sup> без разрушения. Так, например, при угле раствора конуса  $2\alpha \sim 160^\circ$  и радиусе  $R \sim 10^{-4}$  см давление  $P_p^m \sim 1,5 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Следует заметить, что проведенное выше рассмотрение условий разрушения предполагает наличие поверхностной трещины данного размера  $c_f$  на краю пятна контакта при любом размере площадки соприкосновения. Это предположение справедливо, если  $a \gg c_f$ . Если же разрушение происходит на пятне контакта, размеры которого порядка расстояния между поверхностными трещинами, то может оказаться, что при  $a = a_p$  трещина размера  $c_f$  не попадает в область повышенных растягивающих напряжений и индентор выдерживает нагрузки  $Q > Q_p$ . В этом смысле полученные значения  $P_p^m$  при малых размерах пятна контакта надо понимать как оценку снизу.

Автор выражает благодарность Р. Г. Архипову, который детально ознакомился с работой и предложил ряд изменений, способствовавших более наглядному изложению результатов, Б. В. Виноградову, Г. Н. Ермолаеву, А. В. Рахманиной и Е. Н. Яковлеву за интерес к работе и полезные дискуссии.

Поступила 23 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. Беляев Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. — В кн.: Труды по теории упругости и пластичности. М., Гостехтеориздат, 1957.
3. Frank F. C., Lawn B. R. On the theory of Hertzian fracture. — «Proceedings of the Royal Society; ser. A», 1967, vol. 299, N 1458.
4. Архипов Р. Г., Каганова И. М. К теории оптимального распределения напряжений в наковальнях Бриджмена. — «Докл. АН СССР», 1978, т. 239, № 4.
5. Разрушение. Т. 2. Под ред. Г. Либовица. М., «Мир», 1975.
6. Vereshchagin L. F., Yakovlev E. N., Vinogradov B. V., Stepanov G. N., Bibaev K. Kh., Alaeva T. I., Sakun V. P. Megabar pressure between anvils. — «High Temperatures-High Pressures», 1974, vol. 6, N 5.
7. Яковлев Е. Н., Верещагин Л. Ф., Виноградов Б. В., Тимофеев Ю. А. Порядок следования переходов диэлектрик — металл в мегабарном диапазоне статических давлений. — «Письма в ЖТФ», 1976, т. 2, вып. 12.
8. Roesler F. C. Indentation hardness of glass as an energy scaling law. — «Proceedings of the Physics Society; B», 1956, vol. 69, N 433.
9. Дейч Э. Г. Об одной осесимметрической контактной задаче для неплоского штампа кругового в плане. — ПММ, 1962, т. 26, № 5.
10. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. — «J. Appl. Mech.», 1957, vol. 24.
11. Ruoff A. L., Chan K. S. Analysis of contact pressures using indentors which are bodies of revolution. — «J. Appl. Phys.», 1976, vol. 47, N 11.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.

УДК 539.389.1

#### К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В. В. Дудукаленко, С. И. Мешков, Л. А. Сараев

(Куйбышев)

Макроскопические механические характеристики композиционного материала, представляющего смесь включений и матрицы, определяются механическими свойствами фаз и его геометрической структурой. Структуру композита определим таким равномерным распределением сферических включений в матрице, что характеристическая функция  $\chi$ , равная единице в точках включений и нулю в точках матрицы, статистически однородна и изотропна. Относительно