

УДК 536.3+536.42

**ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
НА НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-
КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В СЛОЕ
ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЫ***

Н.А. РУБЦОВ, С.Д. СЛЕПЦОВ

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Проведено численное моделирование нагрева полупрозрачной серой среды с прозрачными и непрозрачными границами, находящимися под влиянием внешних, конвективных и радиационных потоков. Выявлены оптимальные значения конвективного и радиационного параметров для равномерного прогрева полупрозрачного образца.

Процессы, связанные с радиационно-кондуктивным теплообменом (РКТ) в полупрозрачных средах, широко распространены в разнообразных технических приложениях и явлениях природы. При этом сложный интегродифференциальный вид уравнения переноса энергии излучения и разнообразие граничных условий затрудняют качественное описание задач РКТ. В настоящее время большое количество математических моделей приближенно описывает уравнения переноса энергии излучения. В данной работе такие уравнения вычисляются методом средних потоков (СП-метод). Указанный метод хорошо зарекомендовал себя при решении многих задач РКТ, в том числе задач с фиксированными температурами границ [1]. В настоящей работе температуры на границах сред варьируются, а результаты этих работ сопоставляются.

Ниже описываются исследования нагрева полупрозрачной серой среды с прозрачными границами при температуре границ, оказывающейся функционалом процесса и граничных условий. Рассматривается одномерный нагрев пластины из полупрозрачной среды.

Целью настоящей работы является определение температурных полей и радиационных потоков в слое полупрозрачной среды при оси $x = [0, S_0]$ (рис. 1), а также оптимальных значений параметров конвективных и радиационных потоков на границах этой среды для равномерного прогрева полупрозрачного образца по его толщине. На границе при $x = 0$ (слева) тепловая энергия уносится конвекцией и собственным излучением образца (см. рис. 1). На границу при $x = S_0$ (справа) подводятся радиационный и конвективный потоки, определяющие процесс нагрева образца. Процесс продолжается до тех пор, пока справа температура не достигнет фазового перехода T_f .

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант № НШ – 523.2003.1).

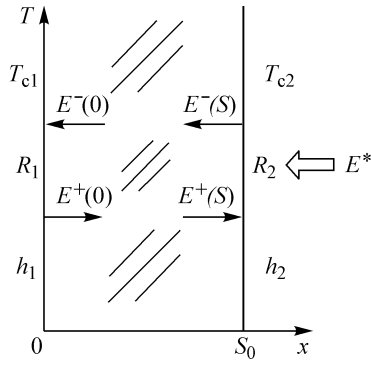


Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

С предположением о постоянстве теплофизических свойств среды, уравнение энергии в пластине будет иметь вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_v c} \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}$$

для $0 \leq x \leq S_0, t > 0$, (1)

где a — коэффициент температуропроводности пластины, E — плотность интегрального по спектру ν , результирующего радиационного потока (РПП) в образце. Она выражается через интенсивность излучения, падающего вперед ($I_v^+(x, \mu, t)$) и назад ($I_v^-(x, \mu, t)$) следующим образом:

$$E(x,t) = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 (I_v^+(x, \mu, t) - I_v^-(x, \mu, t)) \mu d\mu dv = E^+(x,t) - E^-(x,t).$$

Граничные условия краевой задачи для полупрозрачной среды с прозрачными границами имеют вид:

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1 (T_{c1} - T(0,t)), \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = h_2 (T_{c2} - T(1,t)). \quad (3)$$

Радиационные граничные условия на прозрачных границах среды, диффузно отражающих излучение, записываются в следующем виде:

$$E^+(0,t) = (1-R_1)T_{c1}^4 + [1-(1-R_1)/n^2]E^-(0,t),$$

$$E^-(1,t) = (1-R_2)E^*(x,t) + [1-(1-R_2)/n^2]E^+(1,t). \quad (4)$$

Здесь T_{c1} и T_{c2} — температура среды слева и справа от образца соответственно, R_1 и R_2 — коэффициенты полусферического диффузного отражения от границ среды, h_1 и h_2 — коэффициенты теплоотдачи на границе раздела фаз, E^* — суммарная плотность потока излучения, E^\pm — плотности потоков излучения, падающего вперед и назад, $\mu = \cos \theta$ — косинус угла направления распространения излучения и оси x , σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана.

Введем безразмерные параметры: $\theta = \frac{T}{T_f}$, $\xi = \frac{x}{S_0}$, $\eta = \frac{a}{S_0^2} t$. В указанных переменных уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (5)$$

а граничные условия (2) и (3)

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} = \text{Bi}_1 (\theta_{c1} - \theta(0, \eta)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} = \text{Bi}_2 (\theta_{c2} - \theta(1, \eta)). \quad (7)$$

Для непрозрачных границ, излучающих в спектре абсолютно черного тела, уравнения (4) и (5) примут вид [1]:

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} = \text{Bi}_1 (\theta_{c1} - \theta(0, \eta)) + \frac{1}{N} \left(\frac{\theta_{c1}^4}{4} - \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} - \Phi(0, \eta) \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} = \text{Bi}_2 (\theta_{c2} - \theta(1, \eta)) + \frac{1}{N} \left(\frac{\theta_{c2}^4}{4} - \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} + \Phi(1, \eta) + F^* \right), \quad (9)$$

где $\Phi(\xi, \eta) = \frac{E(x, t)}{4\sigma_0 T_f^4}$ — безразмерная плотность результирующего потока излучения,

$N = \frac{\lambda}{4\sigma_0 T_f^3 S_0}$ — радиационно-кондуктивный параметр, $\text{Bi}_i = \frac{h_i \alpha}{\lambda}$ — число

Био, $F^* = \frac{E^*}{4\sigma_0 T_f^4}$ — безразмерная плотность потока суммарного падающего из-

лучения, T_f — определяющая температура, численно равна температуре плавления, n — показатель преломления, i — индекс [1, 2].

Система уравнений (5)–(7) дополняется начальным условием

$$\theta(\xi, 0) = \theta_{c1}. \quad (10)$$

При такой постановке решение задачи сводится к определению температурного поля $\theta(\xi, t)$ и плотностей потока РПП $\Phi(\xi, \eta)$ в области $G\{0 \leq \xi \leq 1; \eta \geq 0\}$.

Краевая задача (5)–(9) решается конечно-разностным методом, а нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. Радиационные потоки представляют собой внутренние источники энергии и определяются из решения преобразованного уравнения переноса излучения с известным распределением температуры по всему плоскому слою излучающей и поглощающей среды [1–5].

Применительно к радиационному теплообмену широкие возможности для расчета переноса излучения в поглощающих и излучающих средах, учитывающие отражения излучения от граничных поверхностей, предоставляет модифицированный метод средних потоков [2–5]. В рамках этого метода интегродифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков записывается в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau} (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \xi)) + (m^+ \Phi^+(\tau, \xi) - m^- \Phi^-(\xi, \eta)) = n^2 \Phi_0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m^+ \delta^+ \Phi^+(\tau, \eta) - m^- \delta^- \Phi^-(\tau, \eta)) + (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) = 0. \quad (12)$$

Граничные условия на прозрачных диффузно излучающих поверхностях определяются как:

$$\Phi^+(0, \eta) = (1 - R_1) \frac{\theta_{c1}^4}{4} + \left(1 - \frac{(1 - R_1)}{n^2}\right) \Phi^-(0, \eta), \quad (13)$$

$$\Phi^-(1, \eta) = (1 - R_2) \left(F^* + \frac{\theta_s^4}{4}\right) + \left(1 - \frac{(1 - R_2)}{n^2}\right) \Phi^+(1, \eta). \quad (14)$$

В частном случае, когда слой образован двумя непрозрачными границами со степенями черноты ε_1 и ε_2 , поддерживаемыми при постоянных температурах $T_1 = T(0)$ и $T_2 = T(S_0)$, граничные условия (13) и (14) принимают вид:

$$\Phi^+(0, \eta) = \varepsilon_1 n^2 \frac{\theta^4(0)}{4} + R_1 \Phi^-(0, \eta), \quad (15)$$

$$\Phi^-(1, \eta) = \varepsilon_2 n^2 \frac{\theta^4(1)}{4} + R_2 \Phi^+(1, \eta). \quad (16)$$

В уравнениях (11)–(14):

$$\Phi^\pm(\tau, \eta) = \frac{2\pi \int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) d\mu}{4\sigma_0 T_f^4}, \quad m^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}, \quad \delta^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}.$$

Здесь $\Phi^\pm(\tau, \eta)$ — безразмерные плотности потоков полусферического ($\Omega = 2\pi$) падающего излучения, а m^\pm и δ^\pm — коэффициенты распределения интенсивности и диффузии излучения по направлениям распространения в сечении τ объема слоя, которые определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [4, 5]; I — интенсивность излучения, $\tau_0 = \alpha S_0$ — начальная оптическая толщина всего слоя, R — коэффициент отражения излучения от внешней поверхности; индексы 1 и 2 относятся соответственно к границам образца слева и справа. Плотность радиационного потока излучения в произвольном сечении τ определяется соотношением

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-.$$

Для решения радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (5)–(16) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость данного метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

Коэффициенты отражения излучения от внешней поверхности R_1 и R_2 вычисляются по формуле Уолша — Данкла.

По описанному алгоритму решения был проведен численный расчет нагрева для полупрозрачного материала с физическими параметрами $S_0 = 0,1$ м, $T_f = 1000$ К, $T_{c1} = 300$ К, $E^* = 120$ кВт/м²; в зависимости от внешних условий $T_{c2} = 300, 600$ К и температур источника излучения $T_s = 1200$ и 1600 К. Приняты следующие теплофизические свойства среды: $\rho = 2000$ кг/м³, $\lambda = 1$ Вт/(м²·К), $a = 10^{-6}$ м²/с, а также коэффициенты теплоотдачи $h_1 = h_2 = 1; 10$ Вт/(м²·град). Показатель преломления

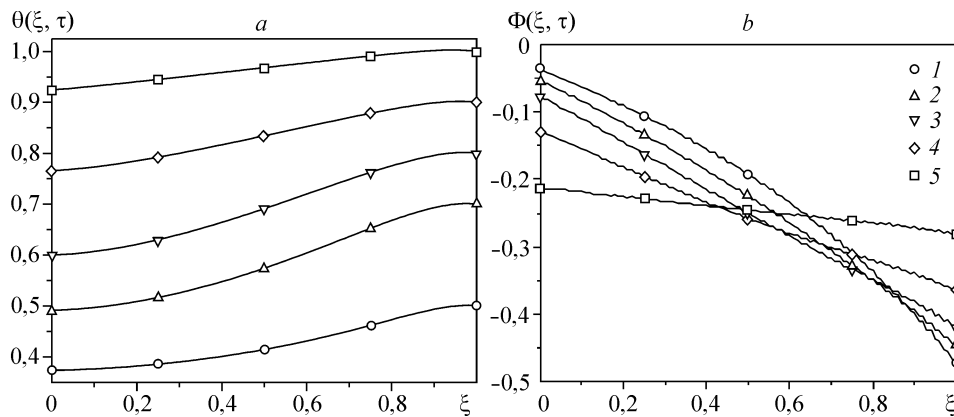


Рис. 2. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 1 \text{ Вт/(м}^2\text{-град); } 125 (1), 295 (2), 429 (3), 645 (4), 1073 \text{ с (5)}.$$

материала $n = 1,5$, коэффициент поглощения $\alpha = 10 \text{ м}^{-1}$, коэффициенты отражения воздух — стеклоподобный материал — воздух составили $R_1 = R_2 = 0,092$.

Численные исследования проводились при двух значениях температуры: источника излучения и окружающей среды справа, различных значениях коэффициентов теплоотдачи на границах образца, а также в случаях, когда одна из сторон прозрачная, другая непрозрачная и черная. На рис. 2–9 представлены профили температур и радиационных потоков. Конечное распределение температур в образце относится к условию, при котором граница справа достигает температуры плавления или рост температуры прекращается, достигнув стационарного состояния.

Из рисунков видно, что граничные условия существенно влияют на кинетику формирования температурного поля. В начальный момент процесса справа формируется зона перегрева относительно границы образца, обусловленная конвективным уносом. Левая сторона образца нагревается менее интенсивно за счет конвективных потоков слева и справа. С повышением температуры справа от твердого тела температура слева также повышается.

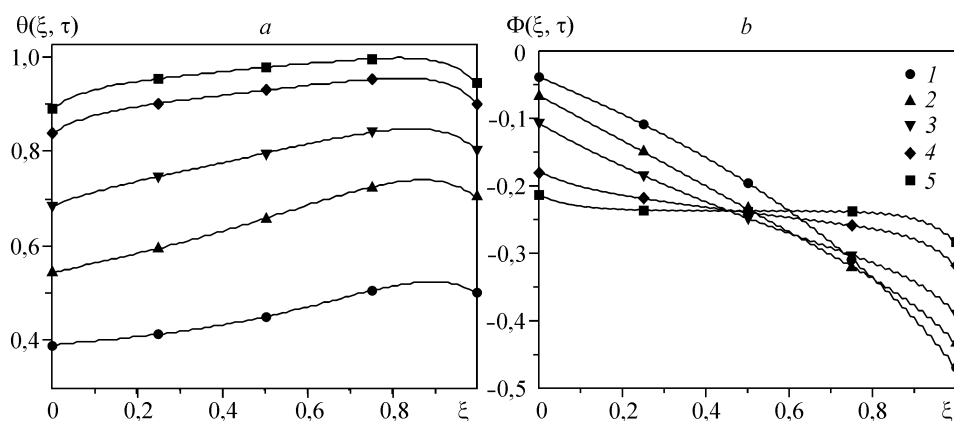


Рис. 3. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2\text{-град); } 164 (1), 401 (2), 612 (3), 1023 (4), 2312 \text{ с (5)}.$$

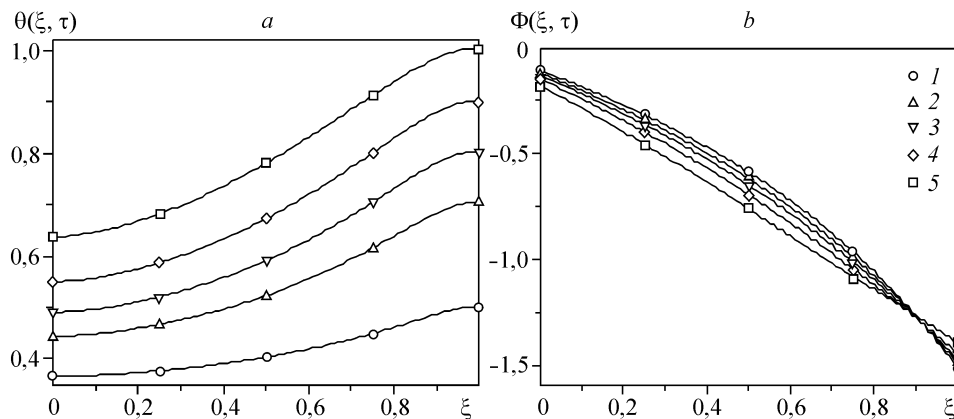


Рис. 4. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (б) при $T_s = 1600$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 1 \text{ Вт/(м}^2\text{·град)}; 36 (1), 77 (2), 100 (3), 127 (4), 163 \text{ с (5)}.$$

При $T_s = 1200$ К температура плавления достигается только при малых значениях коэффициентов теплоотдачи, при более высоких значениях конвекции, слева и справа от образца, на его границах устанавливается стационарный режим для тепловых потоков и рост температуры прекращается. Прогрев образца по всему объему равномерный.

Из рис. 2, 3 следует, что выход на стационарный режим (или режим, при котором в слое достигается предельно допустимое значение температуры $T_f = 1000$ К вблизи границы справа) существенно зависит от конвективной теплоотдачи пластины слева. Кроме того, квазистационарный режим характеризуется квазиравновесным распределением плотности потока результирующего излучения $\Phi(\xi, \tau)$, что связано со сравнительно невысоким значением коэффициента поглощения материала пластины.

При $T_s = 1600$ К (рис. 4, 5) температура плавления достигается при любом значении коэффициентов теплоотдачи, прогрев образца неравномерный из-за более высокого влияния радиационного потока на границу справа по сравнению с конвекцией.

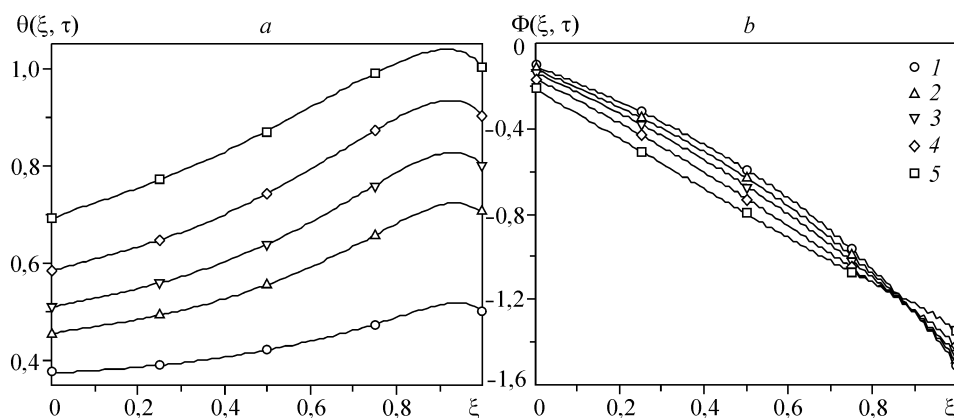


Рис. 5. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (б) при $T_s = 1600$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2\text{·град)}; 42 (1), 88 (2), 116 (3), 151 (4), 197 \text{ с (5)}.$$

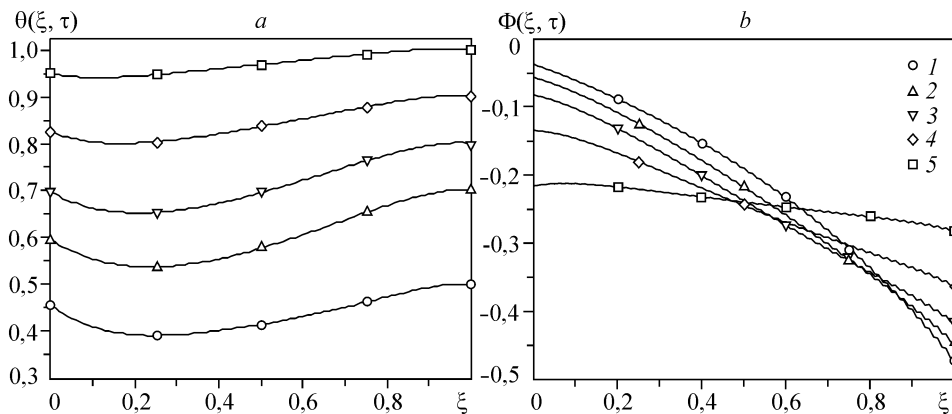


Рис. 6. Черная граница слева. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}; 125 (1), 293 (2), 421 (3), 614 (4), 993 \text{ с (5)}.$$

Плотность потока результирующего излучения за рассмотренный промежуток времени имеет неравномерный характер распределения по толщине образца и точку инверсии вблизи нагреваемой границы слоя справа.

Температура границы справа при $T_s = 1600$ К достигает предельно допустимого значения T_f гораздо быстрее, чем при $T_s = 1200$ К, а слой, в целом, оказывается непрогретым (существенная температурная неравносность). Подобный тепловой режим не может быть рассмотрен в рамках однофазной задачи Стефана, так в силу существенной температурной неравносности его рассмотрение должно быть дополнено описанием процессов объемного разрушения в слое. Режим нагрева пластины источником излучения с $T_s = 1200$ К оказывается более благоприятным с точки зрения долговечности полупрозрачной стенки стеклоплавильной камеры.

На рис. 6–9 представлены варианты, когда одна из сторон образца непрозрачная и черная, а другая прозрачная. Исследования проводились при температурах источника 1200 К и окружающей среды 300 К при одинаковых значениях коэффициентов конвективной теплоотдачи на обеих границах образца.

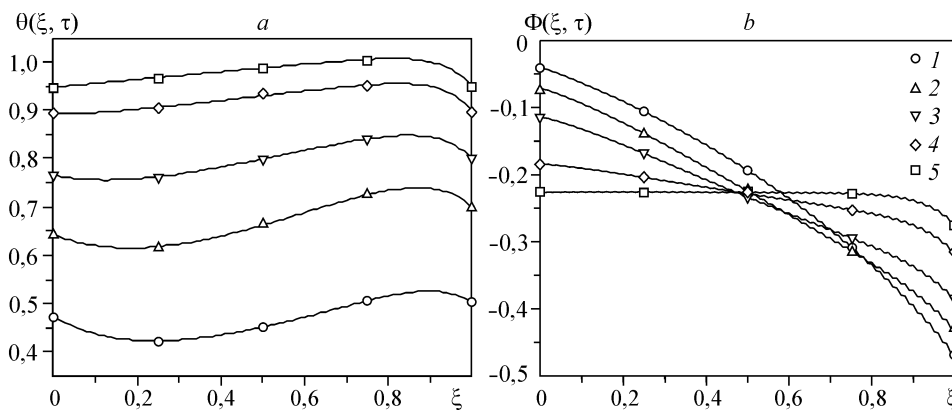


Рис. 7. Черная граница слева. Температурные поля (а) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}; 164 (1), 395 (2), 586 (3), 932 (4), 2758 \text{ с (5)}.$$

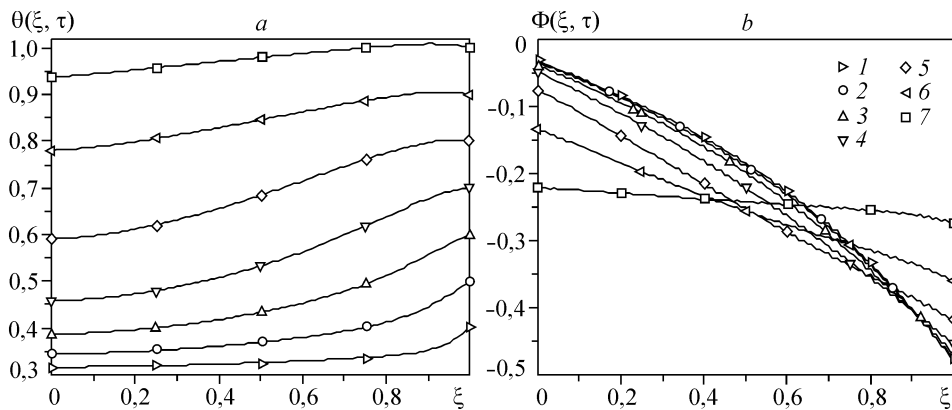


Рис. 8. Черная граница справа. Температурные поля (a) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 1 \text{ Вт/(м}^2\text{-град)}; 28 (1), 76 (2), 144 (3), 246 (4), 410 (5), 656 (6), 1181 \text{ с (7)}.$$

Анализ рис. 6–9 свидетельствует о том, что система достигает квазистационарного и предельно допустимого по температуре состояния раньше в случае, когда черной оказывается граница слева. Другими словами, нагрев пластины оказывается более эффективным за счет запирания попадающего в образец излучения при помощи черной границы слева. Более высокими, при этом, оказываются и температурные градиенты вблизи черных границ. Наличие черной границы справа повышает роль конвекции в теплоотводе в окружающую среду и этим может затягивать нагрев пластины.

Полученные результаты дают возможность рассчитать оптимальный прогрев образца по всему объему, выявить время выхода процесса нагрева в стационарное состояние, определить условия для фазового перехода в полупрозрачной среде при разных граничных условиях. Существенное влияние на характер тепловых процессов оказывают уровень температур источника излучения, греющего пластину, оптических свойств среды и границ слоя, а также вклад конвективного теплоотвода (теплоподвода) конвекцией.

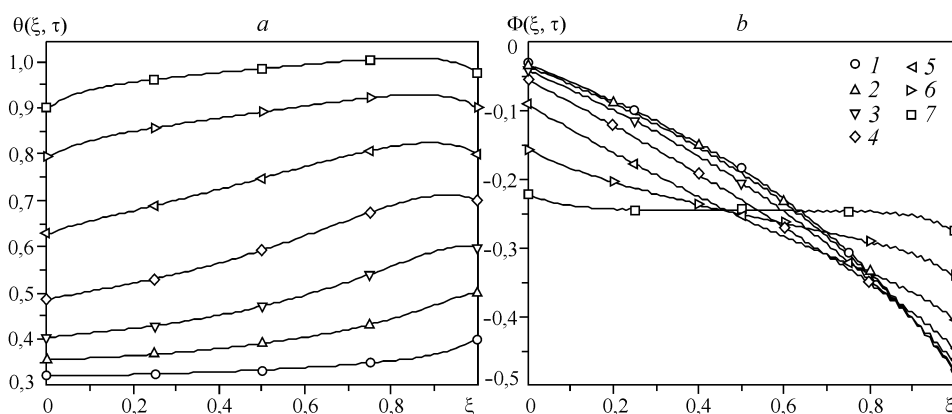


Рис. 9. Черная граница справа. Температурные поля (a) и результирующие радиационные потоки (b) при $T_s = 1200$ К, $T_{c2} = 300$ К.

$$h_1 = h_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2\text{-град)}; 37 (1), 99 (2), 184 (3), 312 (4), 509 (5), 812 (6), 2545 \text{ с (7)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубцов Н.А., Саввинова Н.А., Слепцов С.Д. Однофазная задача Стефана для полупрозрачной среды с учетом отражения излучения // Теплофизика и аэромеханика. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 255–264.
2. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Пономарев Н.Н. О поведении коэффициентов переноса в прямых дифференциальных методах теории радиационного теплообмена в рассеивающих средах // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1987. — Вып. 5, № 18. — С. 3–8.
3. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М. Радиационно-кондуктивный теплообмен в многослойной полупрозрачной системе // Теплофизика и аэромеханика. — 2000. — Т. 7, № 3. — С. 411–422.
4. Пономарев Н.Н. О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1979. — Вып. 3, № 13. — С. 64–68.
5. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. — 277 с.

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2004 г.