

УПРАВЛЯЮЩИЕ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 62-40

РАВНОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С АМПЛИТУДНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

© Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плещивцева

*Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.raporto@mail.ru, yulia_pl@mail.ru*

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичных задач пространственно-временного управления с амплитудными ограничениями управляемых воздействий в системах с распределёнными параметрами параболического типа при заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на ранее разработанном альтернанском методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления. Показано, что уравнения оптимальных регуляторов сводятся к линейным с ограничениями алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с предварительно определяемыми нестационарными коэффициентами передачи.

Ключевые слова: системы с распределёнными параметрами, амплитудные ограничения управляемых воздействий, программное управление, альтернансный метод, синтез оптимального управления.

DOI: 10.15372/AUT20240606

EDN: FLYNTB

Введение. Известные аналитические решения базовых линейно-квадратичных задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределёнными параметрами (СРП) получены в основном применительно к формулировке ЗОУ СРП со свободным правым концом траектории движения объекта в условиях открытой области определения рассматриваемых управляемых воздействий [1–7]. При подобной постановке ЗОУ СРП, во-первых, критерий оптимальности уже содержит требования по минимизации квадратичной ошибки приближения к желаемому конечному состоянию СРП, что снимает существенные затруднения, связанные с достижением заданных пространственных распределений управляемых величин в конце процесса оптимального управления. Во-вторых, решение ЗОУ СРП в открытой области изменения управляемых воздействий позволяет определить экстремальную величину оптимизируемого функционала качества и установить по полученным результатам предельные значения управляемых воздействий, обеспечивающие реализацию максимального эффекта по значению квадратичного критерия оптимальности.

Однако в целом ряде типичных для приложений и представляющих самостоятельный интерес ситуаций требования к СРП в конце оптимального процесса ограниченной продолжительности предъявляются в чебышевской метрике в форме допустимой точности равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины к заданному состоянию [8]. Классические условия трансверсальности неприменимы на

негладкой границе соответствующего целевого множества в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, что существенно усложняет решение краевой задачи оптимального управления. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы её специальные альтернативные свойства, определяемые по схеме конструктивного альтернативного метода, распространяющегося на задачи параметрической оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений [8].

Решения ряда линейно-квадратичных задач равномерной оптимизации (ЛКЗРО) управляемых СРП в открытой области определения граничных и внутренних, сосредоточенных и пространственно-временных управляющих воздействий получены в [8, 9]. В то же время существенный интерес представляют ЗОУ СРП с изначально заданными амплитудными ограничениями на управляющие воздействия, если они нарушаются алгоритмами оптимального управления, найденными без учёта этих ограничений. Решения соответствующих ЛКЗРО в замкнутой области изменения искомых управлений отличаются целым рядом значительных особенностей. В частности, здесь появляется самостоятельная проблема компоновки алгоритмов программного управления на широком множестве возможных вариантов, содержащих участки выхода управляющих воздействий на заданные ограничения. При использовании пространственно-временных управлений возникает необходимость декомпозиции их амплитудных ограничений на предельно допустимые величины каждого из модальных управляющих воздействий [10].

В данной работе рассматривается указанная задача оптимизации с заданными амплитудными ограничениями на внутренние пространственно-временные управление. Некоторые частные случаи в задачах минимизации энергопотребления с ограниченными внутренними управляющими воздействиями представлены в [8, 11].

Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределёнными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t_*]$ одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряжённым дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x)Q(x, t) + u(x, t) \quad (1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0, \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

при кусочно-непрерывном [3] внутреннем пространственно-временном управляющем воздействии $u(x, t)$, стесняемом амплитудными ограничениями

$$0 \leq u_{\min} \leq u(x, t) \leq u_{\max}, \quad x \in [x_0, x_1], \quad t \in (0, t_*) \quad (4)$$

с заданными предельно допустимыми величинами u_{\max} и u_{\min} . Здесь в (1)–(3) $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов и $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, $\beta_0, \beta_1 > 0$ — постоянные коэффициенты. В соответствии с оценкой целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике необходимо обеспечить зафиксированное заранее ограниченное время t_* заданную точность ε равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемой величины $Q(x, t_*)$ к требуемому $Q^{**}(x) > Q_0$ $\forall x \in [x_0, x_1]$, согласно соотношению [8, 9]:

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t_*) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Известный аппарат конечных интегральных преобразований [12] позволяет получить аналогично [9] эквивалентное (1)–(3) представление модели объекта в форме бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x)$ системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определяемых вместе с собственными числами μ_n^2 известными методами [12, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t), & \bar{Q}_n(\mu_n, 0) &= \bar{Q}_n^{(0)}(\mu_n), & n &= 1, 2, \dots, \\ Q(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\bar{Q}_n^{(0)}(\mu_n)$ — моды $Q(x, 0)$ и

$$\bar{u}_n(\mu_n, t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) \varphi_n(\mu_n, x) r(x) dx \quad (7)$$

— временные моды разложения $u(x, t)$ в ряд вида (6)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x), \quad (8)$$

рассматриваемые далее в качестве автономных сосредоточенных управляющих воздействий, стеснённых ограничениями

$$\bar{u}_{n \min} \leq \bar{u}_n(\mu_n, t) \leq \bar{u}_{n \max}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

которые должны выбираться согласно связывающему их общему условию (4).

Подобно [9] здесь и далее в условиях выполнения усиленных условий Коши — Липшица будем учитывать N_1 слагаемых в суммах (6), (8). Здесь $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможности практической реализации исследуемых алгоритмов управления, ограничиваясь в случае $N_1 = N$ с любой требуемой точностью решением «укороченной» системы N первых уравнений в (6) при достаточно большой величине N , полагая при этом $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0$, $n > N$ [14].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1)–(5) оценивается типичным квадратичным функционалом качества с постоянным весовым коэффициентом $\rho_Q > 0$:

$$I(u) = \int_0^{t_*} \int_{x_0}^{x_1} r(x) (\rho_Q Q^2(x, t) + u^2(x, t)) dx dt \rightarrow \min_{u(x, t)}.$$

Переход к описанию объекта (6) в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности собственных функций к представлению критерия оптимальности $I(u)$ в следующем виде:

$$I_1(\bar{u}) = \int_0^{t_*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_n^2(\mu_n, t) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \quad \bar{u} = (\bar{u}_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (10)$$

а требования (5) к конечному состоянию представляются условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t_*) \varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Рассматриваемая задача оптимизации сводится к определению программного оптимального управления $\bar{u}^*(t)$ и алгоритма синтеза обратной связи $\bar{u}^*(\bar{Q}, t)$, $\bar{Q} = (\bar{Q}_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, обеспечивающих при $N_1 = \infty$ перевод объекта (6) за заданное время t_* в требуемое конечное состояние (11) при минимально возможном значении критерия оптимальности (10) в условиях амплитудных ограничений (4), (9) на управляющие воздействия. При использовании усечённой модели объекта при $N_1 = N < \infty$ все получаемые далее результаты следует считать субоптимальными.

Программное оптимальное управление.

Модальное управление в открытой области определения управляющих воздействий. При отсутствии ограничений (9) задача (6)–(8), (10), (11) решалась в [9]. Согласно полученным в [9] результатам, стандартная процедура принципа максимума Понтрягина, распространяемого на бесконечномерный объект управления (6) при $N_1 = \infty$ [15], определяет в открытой области изменения модальных управлений линейную зависимость $\bar{u}_n^*(t)$ от соответствующей оптимальному процессу сопряжённой переменной $\psi_n^*(t)$:

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (12)$$

При этом краевая задача принципа максимума, образуемая уравнениями (6) после подстановки (12) совместно с известными уравнениями, описывающими поведение сопряжённых функций, представляет собой линейную программно-управляемую систему второго порядка относительно двух переменных \bar{Q}_n , ψ_n для каждого $n = \overline{1, N_1}$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n, \quad \frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \psi_n, \quad (13)$$

замыкаемую требованиями к её конечному состоянию (11).

Решение этой системы путём прогонки в конечный момент времени t_* определяет следующее выражение для $\psi_n^*(t)$ в зависимости от $\psi_n^*(t_*)$ и начального состояния объекта $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$ [9]:

$$\psi_n^*(t) = K_n(t, t_*) \psi_n^*(t_*) + K_{1n}(t, t_*) \bar{Q}_n(\mu_n, 0), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} K_n(t, t_*) &= \hat{A}_{n11}(t_* - t) + \hat{A}_{n12}(t_* - t) B_n(t_*), & K_{1n}(t, t_*) &= \hat{A}_{n12}(t_* - t) B_{1n}(t_*), \\ B_n(t_*) &= A_{n21}(t_*) A_{n11}^{-1}(t_*), & B_{1n}(t_*) &= A_{n22}(t_*) - A_{n21}(t_*) A_{n11}^{-1}(t_*) A_{n12}(t_*). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь A_{nks} , $k, s = 1, 2$ — заданные в соответствии со структурой уравнений (13) элементы матрицы (матричной экспоненты) системы (13) и \hat{A}_{nks} , $k, s = 1, 2$ — подобные A_{nks} элементы обратной матрицы.

В работе [8] применительно к требованиям (11), предъявляемым к $\bar{Q}^*(t_*)$, предложен конструктивный метод последовательной конечномерной параметризации управляющих

воздействий (ψ -параметризация) на множестве M -мерных векторов $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M}$, $M < N_1$, $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t_*)$, конечных значений первых M сопряжённых функций при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t_*)$:

$$\begin{aligned} \psi(t_*) &= (\psi_i(t_*)), \quad i = \overline{1, N}; \\ \psi_i(t_*) &= \tilde{\psi}_i, \quad \psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t_*) = 0, \quad i > M. \end{aligned} \quad (16)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (16) управлений в целевое множество, сужающееся к заданному состоянию $Q^{**}(x)$ в пространстве (\bar{Q}_n) , гарантируя тем самым выполнение условий (11) для достижимых значений ε при некоторых $M \geq 1$ [8].

После подстановки в (12) $\psi_n^*(t)$ в виде (14) с определением $\psi_n^*(t_*)$ в форме (16) ψ -параметризованные оптимальные модальные управление принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^*(\mu_n, t) &= \frac{1}{2} [K_n(t, t_*)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_*)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)], \quad n \leq M; \\ \bar{u}_n^*(\mu_n, t) &= \frac{1}{2} K_{1n}(t, t_*)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), \quad n > M. \end{aligned} \quad (17)$$

Последующая подстановка (17) в (8) приводит к оптимальному пространственно-временному программному управлению

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_*)\tilde{\psi}_n^*\varphi_n(\mu_n, x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{1n}(t, t_*)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)\varphi_n(\mu_n, x), \quad (18)$$

определенному с точностью до выбора $\tilde{\psi}_n^*$, $n = \overline{1, M}$.

Интегрирование системы уравнений (6) с модальным управлением вида (17) позволяет получить зависимости для $Q(x, t_*)$ и критерия оптимальности $I_1(\bar{u})$ в (10) в форме явных функций $Q(x, \psi^{(M)})$ и $I_1(\psi^{(M)})$ только своих аргументов для каждого значения $\bar{Q}(0) = (\bar{Q}_n(\mu_n, 0))$. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [8, 9]:

$$I_1(\psi^{(M)}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}}; \quad \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)}) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon \quad (19)$$

на минимум функции $I_1(\psi^{(M)})$ конечного числа M переменных ψ_i , $i = \overline{1, M}$, в (16) с бесконечным числом ограничений для всех $x \in [x_0, x_1]$, заменяемых эквивалентным ограничением на функцию максимума в (19).

Размерность M вектора $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M}$, однозначно определяется в зависимости от заданной величины ε , согласно соотношению [8, 9]:

$$M = \omega \forall \varepsilon: \quad \varepsilon_{\min}^{(\omega)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\omega-1)}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\psi^{(\omega)}} \left\{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(\omega)}) - Q^{**}(x)| \right\}, \quad (20)$$

и значения минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\omega)}$ образуют убывающую с возрастанием ω цепочку неравенств.

Задача (19) оказывается разрешимой, если точная нижняя грань достижимых значений ε в рассматриваемой задаче оптимизации не превышает заданной в (19) величины [8, 9]. Решение задачи (19) относительно вектора $\psi^{(M)}$, а также априори неизвестной

величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$, получено в [9] альтернанским методом [8]. Согласно альтернанским свойствам искомого вектора $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*), i = \overline{1, M}$, выполняется замкнутая относительно всех неизвестных система соотношений:

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \\ R = \begin{cases} M, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)} \end{cases} \quad (21)$$

в некоторых R точках $x_j^0, j = \overline{1, R}$ на отрезке $[x_0, x_1]$, число R которых фиксируется в зависимости от M указанным в (21) соотношением.

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \psi_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$, равенства (21), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$ в точках $x_{jg}^{(0)} \in \text{int}[x_0, x_1], g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений альтернанского метода:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_1} \quad (22)$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке x_j^0 , которая разрешается в соответствии с правилом выбора R в (21) относительно $\tilde{\psi}_i^*, i = \overline{1, M}$ и значений $x_{jg}^0, g = \overline{1, R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если в (19) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$.

Явное выражение для зависимости $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$ в системе уравнений (22) представляется, согласно (6), в следующем виде [9]:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, \psi_*^{(M)}) \varphi_n(\mu_n, x_j^0), \\ \bar{Q}_n(\mu_n, \psi_*^{(M)}) = B_n(t_*) \psi_n^*(t_*) + B_{1n}(t_*) \bar{Q}_n(\mu_n, 0), \quad (23)$$

где $\bar{Q}_n(\mu_n, \psi_*^{(M)})$ находятся в подобной (14) форме.

В итоге решение системы уравнений (22) с подстановкой (23) полностью определяет искомые алгоритмы программного управления $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ и $u^*(x, t)$ в (17) и (18).

Модальное управление в замкнутой области определения управляющих воздействий. Согласно принципу максимума, при достижении амплитудных ограничений (9) для некоторых $n \in \{\overline{1, N_1}\}$ программное управление (17) дополняется участками движения на уровне $\bar{u}_{n\max}$ и $\bar{u}_{n\min}$, порождая тем самым многочисленные возможные варианты компоновки пространственно-временного управляющего воздействия $u^*(x, t)$ при известных допустимых пределах изменения $\bar{u}_n(t)$ в (9).

Центральной проблемой, возникающей при решении рассматриваемой задачи оптимизации, является при этом выбор $\bar{u}_{n\max}$ и $\bar{u}_{n\min}$ из условий выполнения исходного ограничения (4) и построение вычислительных алгоритмов определения $u^*(x, t)$ применительно к различным конкретным структурам его построения.

Выберем $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min}$ в (9) в виде n -й моды управлений $u(x, t) = u_{\max}$, $u(x, t) = u_{\min}$ соответственно для всех $x \in [x_0, x_1]$, согласно (4), (7):

$$\bar{u}_{n \max} = u_{\max} J_n, \quad \bar{u}_{n \min} = u_{\min} J_n, \quad J_n = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(\mu_n, x) r(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Используя замену переменной с переходом от $\bar{u}_n(t)$ к новому управлению $\tilde{u}(t)$ с симметричным ограничением

$$\bar{u}_n(t) = \frac{\bar{u}_{n \max} + \bar{u}_{n \min}}{2} + \frac{\bar{u}_{n \max} - \bar{u}_{n \min}}{2} \tilde{u}(t), \quad -1 \leq \tilde{u}(t) \leq 1, \quad (25)$$

получаем, что тогда в условиях (24) выполняются неравенства

$$|\bar{u}_{n \min}| \leq |\bar{u}_n(t)| \leq |\bar{u}_{n \max}|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

при любом знаке J_n , если $-1 \leq \tilde{u}(t) \leq 1$.

Подставляя (25) в (8), получим $u(x, t)$ в следующем виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{u}_{n \max} + \bar{u}_{n \min}}{2} + \frac{\bar{u}_{n \max} - \bar{u}_{n \min}}{2} \tilde{u}(t) \right] \varphi_n(\mu_n, x). \quad (27)$$

Так как здесь, согласно (24), $u(x, t) = u_{\max}$ при $\tilde{u}(t) = 1$ и $u(x, t) = u_{\min}$ при $\tilde{u}(t) = -1$, то получаем неравенства (4) для $u(x, t)$ при $-1 \leq \tilde{u}(t) \leq 1$.

Из изложенного следует, что используемый далее выбор предельно допустимых значений \bar{u}_n в (9), согласно (24), является достаточным условием выполнения исходного ограничения на $u(x, t)$ в (4).

Сравнение зависимостей $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ в (17) при найденных в результате решения системы уравнений (22) значениях $\tilde{\psi}_n^*$, $n = \overline{1, M}$, с заданными величинами $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min}$ в (24) позволяет определить структуру программного модального управления $\bar{u}_{1n}^*(\mu_n, t)$ с достижимыми ограничениями (9), (24) и способ её компоновки на всём протяжении оптимального процесса из участков вида (17), на которых $\bar{u}_{1n}^*(\mu_n, t)$ не стесняется ограничениями (9), и интервалов стабилизации $\bar{u}_{1n}^*(\mu_n, t)$ на уровнях $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min}$ с точностью до выбора h_n моментов t_{jn} , $j = \overline{1, h_n}$, $t_{jn} < t_{(j+1)n}$, их сопряжения. Тем самым находится явная форма $\bar{u}_{1n}(T_n, t)$, $T_n = (t_{jn})$, $j = \overline{1, h_n}$, параметрического представления $\bar{u}_{1n}^*(\mu_n, t)$ при сохранении на участках его изменения в пределах строгих неравенств в (9) в форме (17), минимизирующей соответствующие составляющие критерия оптимальности (10). Выход на ограничения (9) осуществляется в общем случае путём скачкообразного перехода от $\bar{u}_n^*(t)$ в точках t_{jn} . В частных вариантах при определённом выборе $u_{n \max}$, $u_{n \min}$ в (4) реализуется непрерывный переход к $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min}$ в моменты времени, заранее фиксируемые достижением соответствующих равенств в (17). В таких случаях эти моменты исключаются из числа искомых параметров t_{jn} . Пример такого рода для задачи минимизации энергопотребления приведён в [11].

Многочисленные возможные варианты конкретного описания $\bar{u}_{1n}(T_n, t)$ могут быть реализованы при различной размерности h_n вектора T_n со значениями h_n : $h_n \geq 1$; $h_n \leq M$ или $h_n > M$, где M — размерность вектора $\tilde{\psi}_n^{(M)}$ в (17), (18), (21). Упорядочивание по возрастанию моментов сопряжения t_{jn} , $j = \overline{1, h_n}$ для всех n , на которых $\bar{u}_{1n}^*(\mu_n, t)$ отличается от $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$, образует на временной оси последовательность параметров \tilde{t}_i , $i = \overline{1, P}$, $\tilde{t}_{i+1} > \tilde{t}_i$. В случае $P = M$ с суммарным числом M параметров \tilde{t}_i интегрирование уравнений (6) с параметризованными управлениями $\bar{u}_{1n}(T_n, t)$ позволяет получить зависимости

конечного состояния $Q(x, \tilde{T})$ и критерия оптимальности $I_1(\tilde{T})$, где $\tilde{T} = (\tilde{t}_i)$, $i = \overline{1, M}$, в виде явных функций своих аргументов, согласно (6), (10), с последующей редукцией, подобно (19), к вторичной задаче полубесконечной оптимизации:

$$I_1(\tilde{T}) \rightarrow \min_{\tilde{T}}; \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \tilde{T}) - Q^{**}(x)| \leq \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}, \quad (28)$$

которая решается по схеме (19)–(23) относительно искомого вектора \tilde{T}^* и $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$, если $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$, где $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} = \min_{\tilde{T}} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \tilde{T}) - Q^{**}(x)| \right]$. По найденному значению \tilde{T}^* определяются соответствующие векторы параметров T_n^* и находятся оптимальные модальные уравнения $\bar{u}_{1n}^*(T_n^*, t)$ в замкнутой области их определения, по которым $u^*(x, t)$ восстанавливается в форме (8).

Если $P = M_1 > M$, то учитываются только M первых моментов сопряжения \tilde{t}_i , $i = \overline{1, M}$, фиксируя остальные непрерывным переходом от $\bar{u}_n^*(t)$ к ограничениям в (9), и далее задача опять сводится к виду (28). В случае, когда $P = M_2 < M$, осуществляется редукция к ЗПО (28), разрешаемой по той же схеме с заменой M на $M_2 < M$ в (21) и (28), которая приводит к базовой системе соотношений вида (21) с меньшим числом точек альтернанса x_j^0 по сравнению с (21), соответствующим изменениям формы кривой $Q(x, \tilde{T}^*) - Q^{**}(x)$, где $\tilde{T}^* = (\tilde{t}_i)$, $i = \overline{1, M_2}$, и расчётной системы уравнений альтернанского метода. В результате в этой ситуации находятся все \tilde{t}_i^* , $i = \overline{1, M_2}$ и искомые программные управлении $\bar{u}_{1n}^*(T_n^*, t)$, $u^*(x, t)$.

Синтез оптимального управления. Как показано в [9], использование в качестве условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества (5) известных по результатам расчёта программного управления конечных значений сопряжённых переменных $\psi_n^*(t_*)$ и временных мод $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_*)$ в оптимальном процессе приводит в открытой области определения управляющих воздействий к линейному закону синтеза модального управления $\bar{u}_n^*(\bar{Q}_n^*, t)$ с нестационарными коэффициентами $W_{n1}(t)$, $W_{n2}(t)$ обратной связи по измеряемому состоянию:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^*(\bar{Q}_n^*, t) &= \frac{1}{2} W_{n1}(t) W_{n2}(t) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad n = \overline{1, N_1}; \\ W_{n1}(t) &= [\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_*) A_{n11}(t_* - t) - \psi_n^*(t_*) A_{n21}(t_* - t)]^{-1}; \\ W_{n2}(t) &= \psi_n^*(t_*) A_{n22}(t_* - t) - \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_*) A_{n12}(t_* - t). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь обозначения A_{nks} , $k, s = 1, 2$, соответствуют принятым в (15).

Искомое уравнение оптимального регулятора для пространственно-временного управляющего воздействия $u^*(\bar{Q}, x, t)$ восстанавливается в форме (8) по модальным составляющим (29):

$$u^*(\bar{Q}, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} W_{n1}(t) W_{n2}(t) \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x), \quad \bar{Q} = (\bar{Q}_n). \quad (30)$$

Переход в (30) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q(x_{uj}, t))$ в r точках $x_{uj} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, r}$, в условиях $N_1 = N = r = M$, где M определяется, согласно (20), производится в соответствии с (6) решением векторно-матричного уравнения наблюдения [9]:

$$\begin{aligned} u^*(Q_u, x, t) &= \frac{1}{2} \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) \varphi(x, t); & \Phi_u &= [\varphi_n(\mu_n, x_{ij})], \\ \varphi(x, t) &= (W_{n1} W_{n2} \varphi_n(\mu_n, x)), & n, j &= \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t)$ — матрица-строка; $\varphi(x, t)$ — матрица-столбец.

Точное решение задачи синтеза в замкнутой области определения модальных управлений связано с известными затруднениями [16, 17]. В первом приближении с приемлемой для большинства приложений точностью [16, 17] можно по аналогии с программным управлением $\bar{u}_{1n}^*(T_n^*, t)$ использовать регулятор (29) на интервалах изменения $\bar{u}_{1n}^*(T_n^*, t)$, не стесняемого ограничениями (9), с переходом на предельно допустимые значения $\bar{u}_{n \min}$ или $\bar{u}_{n \max}$ в точках сопряжения t_{jn}^* , $j = \overline{1, h_n}$, которые опознаются по достижению расчётных значений $\bar{Q}_n(\mu_n, t_{jn}^*)$, предварительно определяемых по результатам решения задачи программного управления. В итоге для каждого из рассматриваемых конкретных вариантов структуры программного управления $\bar{u}_{1n}(T_n^*, t)$ находится уравнение модального регулятора $\bar{u}_{1n}^*(\bar{Q}_n, t)$ и, согласно (8), определяются в условиях (9) законы обратной связи $u_1^*(\bar{Q}, x, t)$ и $u_1^*(Q_u, x, t)$ вместо (30) и (31):

$$u_1^*(\bar{Q}, x, t) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{1n}^*(\bar{Q}_n, t) \varphi_n(\mu_n, x); \quad (32)$$

$$u_1^*(Q_u, x, t) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{1n}^*([\Phi_u^{-1} Q_u]_n, t) \varphi_n(\mu_n, x), \quad (33)$$

где $[\Phi_u^{-1} Q_u]_n$ — n -й элемент матрицы-строки $[\Phi_u^{-1} Q_u]$.

Управление нестационарным процессом теплопроводности. В качестве примера рассмотрим задачу пространственно-временного управления процессом нагрева неограниченной пластины. Пусть температурное поле $Q(x, t)$ пластины в процессе её нагрева описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1)–(3) в относительных единицах:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t_*] \quad (34)$$

с заданными начальными и граничными условиями

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0; \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0, \quad (35)$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины $x = 1$ по закону конвективной теплопередачи с заданным значением α критерия Био.

Здесь $u(x, t)$ — кусочно-непрерывное пространственно-временное управляющее воздействие, подчинённое ограничению (4) при $u_{\min} = 0$. В пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ объект управления (34), (35) описывается бесконечной системой уравнений (6) с автономными управлениями $\bar{u}_n(\mu_n, t)$, стесняемыми ограничениями (9), (24).

Температурное поле $Q(x, t)$ представляется его разложением в ряд вида (6) по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x) = \cos(\mu_n x)$ [9]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n} \bar{Q}_n(\mu_n, t), \quad (36)$$

где $\mu_n, n = 1, 2, \dots$, — бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \alpha$ [13, 18].

Задача заключается в определении программного управления $u^*(x, t)$ и алгоритма обратной связи $u^*(Q, x, t)$, обеспечивающих перевод объекта (34), (35) за заданное время t_* в требуемое конечное состояние $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$ с заданной точностью равномерного приближения ε , согласно (11), при минимальном в условиях (4) значении квадратичного критерия качества (10), где примем для определённости $\rho_Q = 1$. В случае отсутствия ограничений (4) эта задача решалась в [9] по схеме (12)–(23) и (29)–(31) при поиске соответственно $u^*(x, t)$ и $u^*(Q, x, t)$.

Вычисление программного управления в открытой области определения управляемых воздействий. Ограничимся далее типичным в приложениях случаем $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (19), (21) [8, 9], для которого следует принять $M = 2, R = 3$ в (19), (22).

Как показано в [9], при нестесняемых условиях (4) управлении $u(x, t)$ физические закономерности предметной области определяют в таком случае конкретный вариант системы уравнений (22) в следующем виде при $x_1^0 = 0, x_2^0 \in (0, 1), x_3^0 = 1$:

$$\begin{aligned} Q(0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; & Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(1, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; & \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

которому отвечает форма кривой $Q(x, \psi_*^{(2)})$, показанная на рис. 1, a.

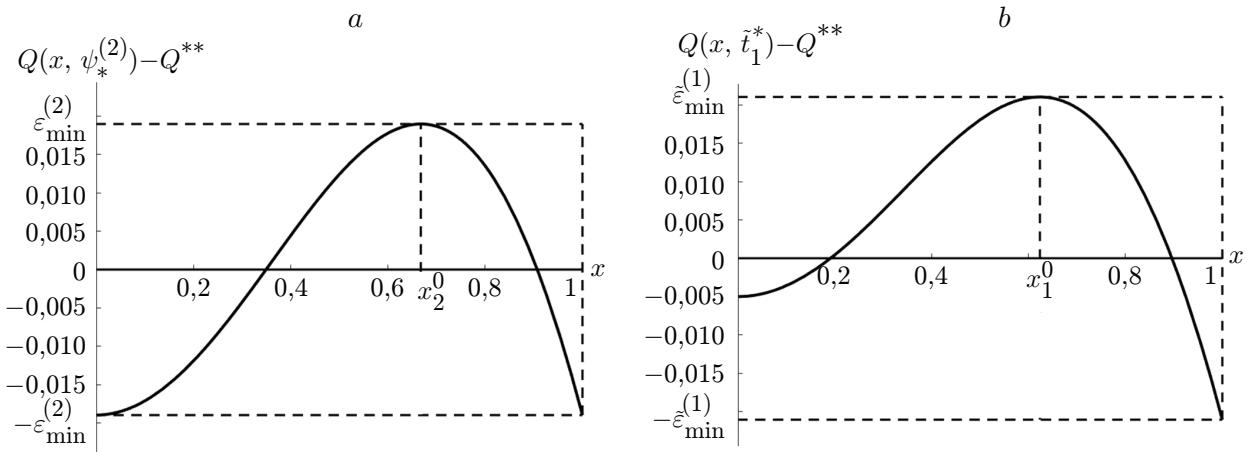


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса пространственно-временного управления: a — в задаче без ограничений на модальные управлении ($\tilde{\psi}_1^* = 5,14, \tilde{\psi}_2^* = -1,28, \varepsilon_{\min}^{(2)} = 0,019, x_2^0 = 0,67$); b — в задаче с ограничением на $\bar{u}_2(\mu_2, t)$ ($\tilde{t}_1^* = 0,175, \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)} = 0,021, x_1^0 = 0,623$)

Система четырёх уравнений (37) с подстановкой $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)})$, $j = \overline{1, 3}$ в форме (23) решается относительно четырёх неизвестных $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, x_2^0 стандартными численными методами. Последующая подстановка найденных значений $\psi_*^{(2)}$ в (17), (18), где $\tilde{\psi}_n^* = 0$ при $n > 2$, согласно (16), определяет искомые управляющие воздействия $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$ и $u^*(x, t)$.

Программное управление с амплитудными ограничениями на управляющие воздействия. Примем для простоты, что $N_1 = N = 2$ для учитываемого числа членов ряда в (6), (8). Сравнение зависимостей $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$, $n = 1, 2$, в открытой области определения программных модальных управлений с заданными значениями $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min} = 0$ в условиях (4), (24) показывает, что применительно к рассматриваемой задаче при $r(x) = 1$, $J_1 > 0$, $J_2 < 0$ в (24) и различных заданных значениях u_{\max} в (4) возможен выход только на ограничения $\bar{u}_{n \max}$ в конечной стадии оптимального процесса для обеих мод $\bar{u}_1^*(\mu_1, t)$ и $\bar{u}_2^*(\mu_2, t)$ либо для одной из них. В частности, при выборе $u_{\max} = 2,5$ реализуется второй вариант, для которого $\bar{u}_{12}^*(t)$ отличается от $\bar{u}_n^*(t)$ только при $n = 2$ с параметрическим описанием $\bar{u}_{12}^*(t)$ при $\tilde{T}^* = \tilde{t}_1^*$:

$$\bar{u}_{12}^*(\tilde{t}_1^*, t) = \begin{cases} \bar{u}_2^*(\mu_2, t), & 0 \leq t < \tilde{t}_1^*; \\ \bar{u}_{2 \max}, & \tilde{t}_1^* < t \leq t_* . \end{cases} \quad (38)$$

В этой ситуации осуществляется по аналогичной (19)–(22) схеме редукция к ЗПО вида (28) с заменой $M = 2$ на $M_2 = 1$, которая приводит при $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$ к решению системы трёх уравнений с двумя точками альтернанса $x_1^0 \in (0, 1)$, $x_2^0 = 1$ [8, 9] (рис. 1, б):

$$Q(x_1^0, \tilde{t}_1^*) - Q^{**} = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)}; \quad Q(1, \tilde{t}_1^*) - Q^{**} = -\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)}; \quad \frac{\partial Q(x_1^0, \tilde{t}_1^*)}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

относительно трёх неизвестных \tilde{t}_1^* , $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$ и x_1^0 .

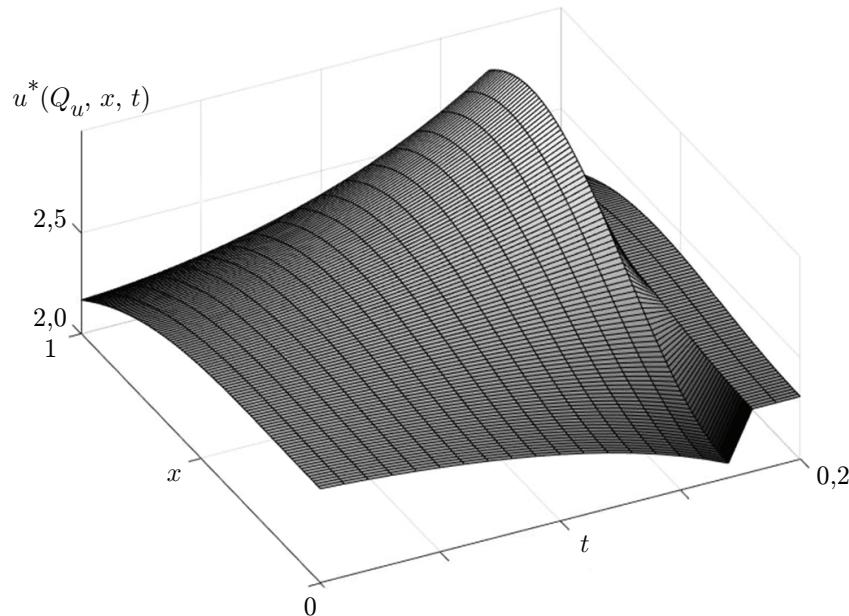
Найденная величина \tilde{t}_1^* полностью определяет оптимальное модальное управление $\bar{u}_{12}^*(\tilde{t}_1^*, t)$ в (38), по которому при сохранении первой составляющей $u(x, t)$ в форме $\bar{u}_1^*(\mu_1, t)$ находится $u^*(x, t)$, согласно (8).

Синтез оптимального управления. В условиях отсутствия ограничений (4) предлагаемый метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов приводит к линейным законам обратной связи $\bar{u}_n^*(\bar{Q}_n, t)$, $u^*(\bar{Q}, x, t)$ и $u^*(Q_u, x, t)$ в (29)–(31) с известными по результатам расчёта программного управления нестационарными коэффициентами передачи $W_{1n}(t)$, $W_{2n}(t)$ в принятых для рассматриваемого примера условиях $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, $M = 2$ в (21), (22) и $N_1 = N = 2$ в (6), (8).

Предлагаемая методика синтеза оптимального управления в замкнутой области (4) определения $u(x, t)$ приводит при выходе на ограничение только второго модального управления, согласно (38), к уравнениям модальных регуляторов:

$$\bar{u}_{12}^*(\bar{Q}_2, t) = \begin{cases} \bar{u}_2^*(\bar{Q}_2, t), & 0 \leq t < \tilde{t}_1^*; \\ \bar{u}_{2 \max}, & \tilde{t}_1^* < t \leq t_*; \end{cases} \quad \bar{u}_{11}^*(\bar{Q}_1, t) = \bar{u}_1^*(\bar{Q}_1, t), \quad t \in [0, t_*]. \quad (40)$$

Момент \tilde{t}_1^* переключения $\bar{u}_{12}^*(\bar{Q}_2, t)$ в (40) автоматически фиксируется при достижении расчётного значения $\bar{Q}_2(\mu_2, \tilde{t}_1^*)$, которое предварительно вычисляется путём решения задачи программного управления. По алгоритму (40) восстанавливаются при $N_1 = N = 2$ уравнения оптимальных регуляторов $u_1^*(\bar{Q}, x, t)$ и $u_1^*(Q_u, x, t)$ в форме (32), (33), где в (33)



Rис. 2. Управляющее воздействие на пространственно-временной плоскости в зависимости от изменяющегося во времени сигнала обратной связи в точке $x_{u1} = 1$ при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)} = 0,021$, $\hat{t}_1^* = 0,175$, $u_{\max} = 2,5$

$Q_u = Q_u(x_u, t)$, $x_u = (x_{uj})$, $j = 1$, с выбором точки контроля температуры x_{u1} на интервале $[0, 1] \ni x$.

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчётные результаты, полученные при $Q_0 = 0$, $Q^{**} = 0,5$, $\alpha = 0,5$, $t_* = 0,2$, $u_{\max} = 2,5$.

Заключение. Разработаны методы решения линейно-квадратичных задач пространственно-временного управления системами с распределёнными параметрами параболического типа применительно к оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике в условиях заданных амплитудных ограничений управляющих воздействий. Полученные уравнения оптимальных регуляторов сводятся к линейным с ограничениями алгоритмам обратной связи по наблюдаемым переменным с фиксируемыми предварительным решением задачи программного управления нестационарными коэффициентами передачи. Допустимые погрешности реализации предлагаемых методов решения рассматриваемой задачи оптимизации при неполном измерении состояния объекта определяются требованиями к точности описания его модели укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00180, <https://project/22-29-00180>) в ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А. Г.** Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Пер. с фр. Н. Х. Розова; Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.

4. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
5. Рей У. Х. Методы управления технологическими процессами / Пер. с англ. А. М. Шафира. М.: Мир, 1983. 368 с.
6. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 214 с.
7. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. С.-Пб.: Лань, 2017. 292 с.
8. Рапопорт Э. Я., Плещивцева Ю. Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.
9. Плещивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Пространственно-временное управление системами с распределёнными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 4. С. 49–65.
10. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
11. Рапопорт Э. Я., Плещивцева Ю. Э., Левин И. С. Энергосберегающее управление в системах с распределёнными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // Автометрия. 2023. 59, № 4. С. 49–60. DOI: 10.15372/AUT20230406.
12. Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1986. 304 с.
13. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
14. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределённых управляемых систем. Саратов: СГТУ, 1997. 192 с.
15. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // Математический сборник (новая серия). 1964. 64, № 1. С. 79–101.
16. Летов А. М. Динамика полёта и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
17. Летов А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 255 с.
18. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.

Поступила в редакцию 01.04.2024

После доработки 13.05.2024

Принята к публикации 04.06.2024
