УДК 519.7, 519.621

Управление воздействиями в правых частях большой системы ОДУ блочной структуры и оптимизация источников в неразделенных краевых условиях

К.Р. Айда-заде[1,2], Е.Р. Ашрафова[1,3]

[1]Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана, ул. Б. Вахабзаде, 68, Баку, Азербайджан, AZ1141

[2]Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, ул. Б. Вахабзаде, 68, Баку, Азербайджан, AZ1141

[3]Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, Баку, Азербайджан, AZ1148

E-mails: kamil_aydazade@rambler.ru (Айда-заде К.Р.), ashrafova.yegana@gmail.com (Ашрафова Е.Р.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 14, 2021.

Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Управление воздействиями в правых частях большой системы ОДУ блочной структуры и оптимизация источников в неразделенных краевых условиях // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 229–251.

В работе исследуется задача управления сложным объектом, описываемым большой системой ОДУ блочной структуры с неразделенными между блоками краевыми условиями. Оптимизируемыми являются управления в правых частях уравнений и значения параметров источников в краевых условиях. Для решения задачи оптимального управления предлагается применить численные методы оптимизации первого порядка, использующие формулы градиента функционала, участвующие в полученных необходимых условиях оптимальности. Для решения прямой и сопряженной краевых задач, имеющих блочную структуру и неразделенные нелокальные краевые условия, предложены специальные схемы метода прогонки, учитывающие специфику систем ОДУ и краевых условий, позволяющие производить перенос краевых условий для каждого блока и каждого краевого условия в блоке независимо друг от друга. Приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи, и их анализ.

DOI: 10.15372/SJNM20210301

Ключевые слова: *сложный объект, блочная структура, большая система ОДУ, неразделенные условия, градиент функционала, условия оптимальности, метод прогонки.*

Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Control of effects in the right-hand sides of a large ODE system of a block structure and optimization of sources in unseparated boundary conditions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 229–251.

In this paper, we investigate the problem of control of a complex object, described by a large ODE system of a block structure with unseparated boundary conditions between blocks. The controls in the right-hand sides of the equations and the values of the source parameters in the boundary conditions are to be optimized. We propose to apply the first order optimization methods for the numerical solution to the optimal control problem, using functional gradient formulas participating in the obtained necessary optimality conditions. Special schemes of the sweep method for the solution to the direct and conjugate boundary value problems, having a block structure, and unseparated non-local boundary conditions are offered. This method takes into account special features of ODE systems and boundary conditions, allows the transfer of boundary conditions for each block and each boundary condition in the block independent of each other. The obtained results of numerical experiments in solving the test problem and their analysis are given.

Keywords: *block structure, large system of ODE, unseparated conditions, functional gradient, optimality conditions, sweep method.*

Введение

В статье исследуется задача оптимального управления, описываемая системой дифференциальных уравнений и нелокальными (неразделенными) краевыми условиями, правые части которых требуется оптимизировать. В целом для многих классов задач оптимального управления были получены необходимые условия оптимальности в различных формах [1–3], которые позже переносились на нелокальные краевые условия более общего вида [4, 5] и различные виды дифференциальных уравнений [6–9], в том числе дифференциальные уравнения с частными производными [10].

Специфической особенностью исследований данной статьи является то, что рассматриваемая задача управления описывается системой большого числа независимых подсистем линейных неавтономных дифференциальных уравнений. Блоки (подсистемы) общей системы связаны между собой нелокальными неразделенными краевыми условиями. При этом предполагается, что бо́льшая часть элементов матрицы связей равны нулю, ненулевые элементы соответствуют наличию связи между начальными или конечными состояниями отдельных блоков сложного объекта. Подобные математические модели возникают, как правило, при использовании декомпозиционных методов моделирования сложных объектов, причем декомпозиция может проводиться как по пространственной, так и временной переменным или одновременно по пространственной и временной переменным [11, 12]. Примером такого подхода являются методы сеток, прямых и конечных элементов [13]. Различные аспекты методов решения соответствующих расчетных задач и алгоритмов распараллеливания исследовались во многих работах, в частности в [14–17].

В рассматриваемой в статье задаче оптимизируемыми являются управления в правых частях уравнений и значения параметров источников в краевых условиях. Получены необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи, которые используются для построения численного метода ее решения. Для решения задачи оптимального управления предлагается применить численные методы оптимизации первого порядка, использующие формулы градиента функционала, участвующие в полученных необходимых условиях оптимальности. Предложена численная схема решения прямой и сопряженной начально-краевых задач большой размерности и блочной структуры. Метод основан на предложенной специальной схеме метода прогонки [18–20], позволяющей проводить прогонку поблочно и по каждому условию отдельно. Таким образом, решения прямой и сопряженной задач приводятся к решению алгебраической системы уравнений, а далее к решению задач Коши для каждой подсистемы в отдельности. Преимущество предложенного подхода в сравнении с непосредственным использованием методов переноса сразу для всей системы в целом [7–9, 13–16, 21] заключается в том, что здесь перенос осуществляется только относительно тех переменных, коэффициенты которых в краевых условиях отличны от нуля. При этом перенос осуществляется с применением только той подсистемы дифференциальных уравнений, в которой участвует переносимая переменная. Подход позволяет естественным образом распараллеливать процесс решения прямой и сопряженной краевых задач с неразделенными краевыми условиями. Это существенно повышает эффективность решения всей задачи оптимизации, т. к. большая часть процессорного времени в численных методах решения этих задач расходуется на многократное вычисление значений целевого функционала, каждый раз требующих решения прямой краевой задачи.

К задаче, рассматриваемой в статье, приводят задачи моделирования, параметрической идентификации и оптимального управления [22–28] сложными техническими объектами и технологическими процессами с распределенными параметрами, описываемые начально-краевыми задачами относительно дифференциальных уравнений с частными производными, к которым применены методы аппроксимации. Важным классом проблем, приводящим к изучаемой в данной статье задаче, являются также обратные задачи и задачи параметрической идентификации математических моделей сложных объектов (процессов), о которых речь шла выше. В частности, к рассматриваемой задаче приводится задача оптимального управления процессом неустановившегося движения жидкости (газа) в трубопроводных сетях сложной структуры [22, 23]. Математические модели таких процессов описываются системами уравнений с частными производными, состоящими из подсистем уравнений гиперболического типа, описывающих процесс движения на каждом отдельном участке. В местах соединения участков, в которых могут находится внешние источники с оптимизируемыми параметрами (например давление или объемы закачиваемой или откачиваемой жидкости), выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые определяются неразделенными краевыми условиями. Применение метода прямых [29] по временной или пространственной переменных (аналог применения метода декомпозиции) приводит задачу управления режимами движения сырья транспортной сети [22, 23] к задаче, исследуемой в данной статье.

1. Постановка задачи

Рассматривается сложный объект, состоящий из m звеньев (блоков), в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Каждой дуге графа сопоставляется независимый подобъект (блок), состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Множество всех вершин графа обозначим через I, а множество дуг (звеньев) (k, s) длиной l^{ks} с началом в вершине $k \in I$ и концом в вершине $s \in I$ обозначим через $J = \{(k,s) : k,s \in I\}$, $|I| = N$, $|J| = m$, $|I|$ указывает на число элементов множества I.

Пусть $J_i^+ = \left\{(j,i) : j \in I_i^+\right\}$, $J_i^- = \left\{(i,j) : j \in I_i^-\right\}$ — множества ребер, входящих и выходящих из i-й вершины соответственно, I_i^+ и I_i^- — множества вершин, смежных с i-й вершиной, являющихся, соответственно, концами и началами дуг из множества J_i, $J_i = J_i^+ \bigcup J_i^-$, $I_i = I_i^+ \bigcup I_i^-$ (рисунок 1).

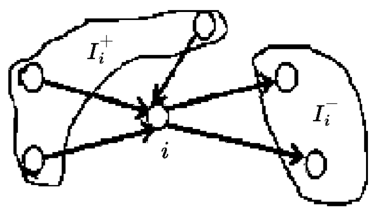


Рис. 1. Множества вершин, смежных с i-й вершиной

Обозначим:

$$\left|J_i^+\right| = \left|I_i^+\right| = \bar{n}_i, \quad \left|J_i^-\right| = \left|I_i^-\right| = \underline{n}_i, \qquad \bar{n}_i + \underline{n}_i = n_i, \ \ i \in I.$$

Ясно, что

$$\sum_{i\in I} \bar{n}_i = \sum_{i\in I} \underline{n}_i = m, \qquad \sum_{i\in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение $n_i \ll N$, $i \in I$, т. е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Пусть состояние каждого из звеньев $(k,i) \in J$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, описывается системой $\aleph$-мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}^{ki}(x) = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}(x)w^{ki}(x) + f^{ki}(x), \quad x \in [0, l^{ki}],\ k \in I_i^+,\ i \in I, \tag{1.1}$$

с M_i, $M_i \le n_i \cdot \aleph$, линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде:

$$\sum_{s=1,\, k_s\in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \mathrm{v}_j^i, \quad j = \overline{1, M_i},\ i \in I. \tag{1.2}$$

Функция $u^{ki}(x) = u^{ki}(x; \upsilon) \in R^{\aleph}$ характеризует состояние (k,i)-го звена длиной l^{ki} в точке $x \in \left[0, l^{ki}\right]$, соответствующее оптимизируемой паре параметров $\upsilon = (w, \mathrm{v})$. Здесь управление $w = \left(w^{ki}(\cdot) \in W^{ki} \subset R^{\mu_{ki}} :\ k \in I_i^+, i \in I\right)$ состоит из $w^{ki}(x) = (w_1^{ki}(x), \ldots, w_{\mu_{ki}}^{ki}(x))$, $x \in [0, l^{ki}]$, управляющих вектор-функций (k,i)-й подсистемой; параметры $\mathrm{v} = \left(\mathrm{v}^i \in V^i \subset R^{M_i},\ i \in I\right)$, состоящие из векторов $\mathrm{v}^i = \left(\mathrm{v}_1^i, \ldots, \mathrm{v}_{M_i}^i\right)^\top$, j-я компонента которых — v_j^i, определяемая воздействиями внешнего источника на i-ю вершину. В задаче заданными являются $A^{ki}(x) \neq \mathrm{const}$, $B^{ki}(x)$, $f^{ki}(x)$, соответственно, $\aleph$-мерные квадратные, $\aleph \times \mu_{ki}$-мерные матричные и $\aleph$-мерные векторные непрерывные при $x \in [0, l^{ki}]$ функции; $l^{ki} > 0$; строчные векторы $g_j^{ik_s} = \left(g_{j,1}^{ik_s}, \ldots, g_{j,\aleph}^{ik_s}\right)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, $q_j^{k_s i} = \left(q_{j1}^{k_s i}, \ldots, q_{j\aleph}^{k_s i}\right)$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, $i \in I$.

Будем предполагать, что множества допустимых значений W^{ki}, V^i, $k \in I_i^+$, $i \in I$, выпуклы.

Требуется минимизировать функционал

$$\Im(w, \mathrm{v}) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u, w, \mathrm{v}, x)\, dx + \Phi^i\left(\underline{u}^i, \bar{u}^i, \mathrm{v}^i\right) \right), \tag{1.3}$$

где заданные функции $f_0^{ki}(u, w, \mathrm{v}, x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i, \bar{u}^i, \mathrm{v}^i)$ непрерывны по своим аргументам вместе с частными производными. Использованы следующие обозначения: $u = u(x) = \left(u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I\right)$,

$$\underline{u}^i = \left(u^{ik_1}(0), \ldots, u^{ik_{\underline{n}_i}}(0)\right)^\top \in R^{\underline{n}_i \cdot \aleph}, \qquad \bar{u}^i = \left(u^{k_1 i}\left(l^{k_1 i}\right), \ldots, u^{k_{\bar{n}_i} i}\left(l^{k_{\bar{n}_i} i}\right)\right)^\top \in R^{\bar{n}_i \cdot \aleph}.$$

Отметим, что общее число дифференциальных уравнений в системе (1.1) и число краевых условий должны удовлетворять равенству

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i = m\aleph\,. \tag{1.4}$$

Общее число блоков, подсистем (1.1) равно числу звеньев m, текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий.

2. Необходимые условия оптимальности в задаче (1.1)–(1.4)

В данном пункте исследуем выпуклость и дифференцируемость функционала (1.3), получим формулы для градиента функционала и сформулируем необходимые условия оптимальности относительно управляющих параметров.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче* (1.1)–(1.4). *Если функции* $f_0^{ki}(u, w, \mathrm{v}, x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i, \bar{u}^i, \mathrm{v}^i)$ *выпуклы по* u, w, v, *то функционал* $\Im(w, \mathrm{v})$ *является выпуклым, а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то функционал является сильно выпуклым.*

Доказательство. Пусть w_1^{ki}, v_1^i и w_2^{ki}, v_2^i — произвольные допустимые управления и параметры из $W^{ki} \times V^i$, а $u_1^{ki}(x)$ и $u_2^{ki}(x)$ — соответствующие решения краевых задач (1.1), (1.2), т.е.

$$\dot{u}_1^{ki}(x) = A^{ki}(x)u_1^{ki}(x) + f^{ki}(x) + B^{ki}(x)w_1^{ki}(x), \quad x \in \left[0, l^{ki}\right],\ k \in I_i^+,\ i \in I, \tag{2.1}$$

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u_1^{ik_s}(0) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_1^{k_s i}\left(l^{k_s i}\right) = \mathrm{v}_{1j}^i, \quad j = \overline{1, M_i},\ i \in I, \tag{2.2}$$

$$\dot{u}_2^{ki}(x) = A^{ki}(x)u_2^{ki}(x) + f^{ki}(x) + B^{ki}(x)w_2^{ki}(x), \quad x \in \left[0, l^{ki}\right],\ k \in I_i^+,\ i \in I, \tag{2.3}$$

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u_2^{ik_s}(0) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_2^{k_s i}\left(l^{k_s i}\right) = \mathrm{v}_{2j}^i, \quad j = \overline{1, M_i},\ i \in I. \tag{2.4}$$

В силу выпуклости допустимых множеств W^{ki}, V^i для произвольного $\lambda \in [0;1]$ имеет место $w^{ki} = \lambda w_1^{ki} + (1-\lambda)w_2^{ki} \in W^{ki}$, $\mathrm{v}^i = \lambda \mathrm{v}_1^i + (1-\lambda)\mathrm{v}_2^i \in V^i$. Обозначим $u^{ki}(t) = \lambda u_1^{ki}(x) + (1-\lambda)u_2^{ki}(x)$.

Умножим обе части (2.1) на λ, а (2.3) — на $(1-\lambda)$, почленно сложим полученные равенства и сгруппируем:

$$\lambda\dot{u}_1^{ki}(x) + (1-\lambda)\dot{u}_2^{ki}(x) = A^{ki}(x)\left[\lambda u_1^{ki}(x) + (1-\lambda)u_2^{ki}(x)\right] + \left[\lambda f^{ki}(x) + (1-\lambda)f^{ki}(x)\right] +$$
$$B^{ki}(x)\left[\lambda w_1^{ki}(x) + (1-\lambda)w_2^{ki}(x)\right], \quad x \in \left[0, l^{ki}\right].$$

Отсюда следует, что пара $\left(u^{ki}(x), w^{ki}\right)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}^{ki}(x) = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}(x)w^{ki}(x) + f^{ki}(x), \quad x \in [0, l^{ki}],\ k \in I_i^+,\ i \in I.$$

Умножая обе части (2.2) на λ, а (2.4) — на $(1-\lambda)$, складывая и группируя, получим

$$\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s}\left[\lambda u_1^{ik_s}(0)+(1-\lambda)u_2^{ik_s}(0)\right]+\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_si}\left[\lambda u_1^{k_si}\big(l^{k_si}\big)+(1-\lambda)u_2^{k_si}\big(l^{k_si}\big)\right]$$
$$=\lambda \mathrm{v}_{1j}^i+(1-\lambda)\mathrm{v}_{2j}^i,\quad j=\overline{1,M_i},\ i\in I.$$

Отсюда следует, что пара $\big(u^{ki}(x),\mathrm{v}^i\big)$ удовлетворяет условиям:

$$\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s}u^{ik_s}(0)+\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_si}u^{k_si}\big(l^{k_si}\big)=\mathrm{v}_j^i,\quad j=\overline{1,M_i},\ i\in I.$$

В силу выпуклости функций $f_0^{ki}(u,w,\mathrm{v},x)$ и $\Phi^i(\underline{u}^i,\bar{u}^i,\mathrm{v}^i)$ по аргументам u, w, v^i имеем

$$\begin{aligned}\Im(w,\mathrm{v})&=\Im\big(\lambda w_1+(1-\lambda)w_2,\lambda \mathrm{v}_1+(1-\lambda)\mathrm{v}_2\big)\\&=\sum_{i\in I}\Bigg(\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}\big(\lambda u+(1-\lambda)u,\lambda w+(1-\lambda)w,\lambda \mathrm{v}+(1-\lambda)\mathrm{v},x\big)\,dx+\\&\qquad\Phi^i\big(\lambda\underline{u}^i+(1-\lambda)\underline{u}^i,\lambda\bar{u}^i+(1-\lambda)\bar{u}^i,\lambda \mathrm{v}^i+(1-\lambda)\mathrm{v}^i\big)\Bigg)\\&\le\sum_{i\in I}\Bigg(\sum_{k\in I_i^+}\bigg(\lambda\int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u,w,\mathrm{v},x)dx+(1-\lambda)\int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u,w,\mathrm{v},x)\,dx\bigg)+\\&\qquad\lambda\Phi^i(\underline{u}^i,\bar{u}^i,\mathrm{v}^i)+(1-\lambda)\Phi^i(\underline{u}^i,\bar{u}^i,\mathrm{v}^i)\Bigg)\le\lambda\Im(w,\mathrm{v})+(1-\lambda)\Im(w,\mathrm{v}).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Отсюда следует выпуклость функционала $\Im(w,\mathrm{v})$. Ясно, что в случае, если одна из функций $f_0^{ki}(u,w,\mathrm{v},x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i,\bar{u}^i,\mathrm{v}^i)$ будет строго выпуклой, то знак неравенства в (2.5) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (1.1)–(1.4) будет строго выпуклым. □

Далее исследуем дифференцируемость функционала (1.3) и получим формулы для компонентов его градиента по оптимизируемой паре $\upsilon=(w,\mathrm{v})$. Для этого используем метод приращения оптимизируемого вектора и определим линейные части приращения функционала [30, 31].

Пусть $\hat{\upsilon}=(\hat{w},\hat{\mathrm{v}})$ и $\upsilon=(w,\mathrm{v})$ — две допустимые пары параметров, функции $\hat{u}=u(x;\hat{\upsilon})=\big(u^{ki}(x;\hat{\upsilon}):k\in I_i^+,i\in I\big)$ и $u=u(x;\upsilon)=\big(u^{ki}(x;\upsilon):k\in I_i^+,i\in I\big)$ — соответствующие этим парам решения краевой задачи (1.1), (1.2). Обозначим

$$\Delta u^{ki}(x;\upsilon)=\Delta u^{ki}(x)=u^{ki}(x;\hat{\upsilon})-u^{ki}(x;\upsilon),\quad k\in I_i^+,\ i\in I,$$
$$\Delta\upsilon=(\Delta w,\Delta \mathrm{v}),\qquad \Delta w=\hat{w}-w,\qquad \Delta \mathrm{v}=\hat{\mathrm{v}}-\mathrm{v}.$$

Ясно, что из (1.1), (1.2) следует, что функция $\Delta u^{ki}(x)$ является решением следующей краевой задачи с нелокальными краевыми условиями:

$$\Delta\dot{u}^{ki}(x)=A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x)+B^{ki}(x)\Delta w^{ki}(x),\quad x\in\big[0,l^{ki}\big],\tag{2.6}$$

$$\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s}\Delta u^{ik_s}(0)+\sum_{s=1,\,k_s\in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_si}\Delta u^{k_si}\big(l^{k_si}\big)=\Delta \mathrm{v}_j^i,\quad j=\overline{1,M_i},\ i\in I.\tag{2.7}$$

Тогда приращение функционала (1.3), соответствующее приращению $\Delta\upsilon$, несложно привести к виду

$$\Delta\Im(w,\mathrm{v}) = \Im(\hat{w},\hat{\mathrm{v}}) - \Im(w,\mathrm{v})$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}}\left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}}\Delta u^{ki}(x) + \left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial w^{ki}}\right)^\top \Delta w^{ki}(x) + \left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial \mathrm{v}^i}\right)^\top \Delta \mathrm{v}^i\right)dx +$$
$$\sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \underline{u}^i}\Delta\underline{u}^i + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \bar{u}^i}\Delta\bar{u}^i + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \mathrm{v}^i}\Delta\mathrm{v}^i\right) + \eta,$$
$$\eta = o\left(\|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0,l]}, \|\Delta w(x)\|_{L_2^M[0,l]}, \|\Delta \mathrm{v}\|_{R^M}\right). \tag{2.8}$$

Здесь $f_0^{ki} = f_0^{ki}(u,w,\mathrm{v},x)$, $\Phi^i = \Phi^i(\underline{u}^i,\bar{u}^i,\mathrm{v}^i)$, η — остаточный член в соответствующих пространствах функций и конечномерных векторов.

Как известно из теории дифференциальных уравнений [32, 33], при сделанных предположениях на данные, участвующие в задаче, имеет место оценка

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0,l]} \le O\left(\|\Delta w(x)\|_{L_2^M[0,l]}, \|\Delta \mathrm{v}\|_{R^M}\right).$$

Перенесем правые части уравнений (2.6) влево и умножим равенства на пока произвольные непрерывно дифференцируемые по своим аргументам $\aleph$-мерные вектор-функции $\psi^{ki}(x) \in R^{\aleph}$, $x \in (0, l^{ki})$, $k \in I_i^+$, $i \in I$. Просуммируем полученные выражения, равные нулю, и проинтегрируем эту сумму по частям:

$$0 = \sum_{i\in I}\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}}\left[\left(\psi^{ki}(x)\right)^\top \Delta\dot{u}^{ki}(x) - A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x) - B^{ki}(x)\Delta w^{ki}(x)\right]dx$$
$$= \sum_{i\in I}\left\{\left[\sum_{k\in I_i^+}\left(\psi^{ki}(l^{ki})\right)^\top \Delta u^{ki}(l^{ki}) - \sum_{k\in I_i^-}\left(\psi^{ik}(0)\right)^\top \Delta u^{ik}(0)\right] - \right.$$
$$\left.\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}}\left[\left((\dot{\psi}^{ki}(x))^\top + \left(\psi^{ki}(x)\right)^\top A^{ki}(x)\right)\Delta u^{ki}(x) - \left(\psi^{ki}(x)\right)^\top B^{ki}(x)\Delta w^{ki}(x)\right]dx\right\}. \tag{2.9}$$

Прибавив правую часть (2.9) к (2.8) и группируя, получим

$$\Delta\Im(w,\mathrm{v}) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}}\left[\left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - (\dot{\psi}^{ki}(x))^\top - \left(\psi^{ki}(x)\right)^\top A^{ki}(x)\right)\Delta u^{ki}(x) - \right.$$
$$\left.\left(\left(\psi^{ki}(x)\right)^\top B^{ki}(x) - \left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial w^{ki}}\right)^\top\right)\Delta w^{ki}(x)\right]dx +$$
$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in I_i^+}\int_0^{l^{ki}}\left[\left(\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial \mathrm{v}^i}\right)^\top dx + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \mathrm{v}^i}\right]\Delta\mathrm{v}^i +$$
$$\sum_{i\in I}\left(\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \underline{u}^i} - (\underline{\psi}^i)^\top\right)\Delta\underline{u}^i + \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \bar{u}^i} + (\bar{\psi}^i)^\top\right)\Delta\bar{u}^i\right) + \eta, \tag{2.10}$$

где $\underline{\psi}^i = \left(\psi^{ik_1}(0), \ldots, \psi^{ik_{\underline{n}_i}}(0)\right)^\top$, $\bar{\psi}^i = \left(\psi^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \ldots, \psi^{k_{\bar{n}_i} i}(l^{k_{\bar{n}_i} i})\right)^\top$. Пользуясь произвольностью вектор-функций $\psi^{ki}(x) \in R^{\aleph}$, $k \in I_i^k$, $i \in I$, потребуем от них равенства нулю выражений в квадратных скобках (множителей Δu^{ki}). Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}^{ki}(x)=\left(\frac{\partial f_0^{ki}(u^{ki}(x),w^{ki}(x),\mathrm{v}^i)}{\partial u^{ki}}\right)^\top-\big(A^{ki}(x)\big)^\top\psi^{ki}(x),\quad x\in\big[0,l^{ki}\big],\ k\in I_i^+,\ i\in I,\quad(2.11)$$

которую назовем сопряженной к (1.1).

Линейная часть приращения функционала, соответствующая приращению оптимизируемой вектор-функции $w(x)$, является выражением градиента функционала:

$$\mathrm{grad}_{w^{ki}}\Im(w,\mathrm{v})=-\big(B^{ki}(x)\big)^\top\psi^{ki}(x)+\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial w^{ki}}.\qquad(2.12)$$

Для получения краевых условий для сопряженной системы (2.11) и градиента функционала по v займемся последними тремя слагаемыми (2.10).

Для простоты изложения приводимых далее выкладок вместо матричных и векторных операций будем использовать покомпонентную их запись. Условия (2.7) запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} g_{11}^{ik_1} & \cdots & g_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{1\underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} & \cdots & g_{1\underline{n}_i\cdot\aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ g_{M_i,1}^{ik_1} & \cdots & g_{M_i,\aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{M_i,\underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} & \cdots & g_{M_i,\underline{n}_i\cdot\aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\underline{u}_1^i\\ \cdots \\ \Delta\underline{u}_{\underline{n}_i\cdot\aleph}^i\end{pmatrix}+$$
$$\begin{pmatrix} q_{11}^{ik_1} & \cdots & q_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{1\bar{n}_i}^{ik_{\bar{n}_i}} & \cdots & q_{1\bar{n}_i\cdot\aleph}^{ik_{\bar{n}_i}} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ q_{M_i,1}^{ik_1} & \cdots & q_{M_i,\aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{M_i,\bar{n}_i}^{ik_{\bar{n}_i}} & \cdots & q_{M_i,\bar{n}_i\cdot\aleph}^{ik_{\bar{n}_i}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\bar{u}_1^i\\ \cdots \\ \Delta\bar{u}_{\bar{n}_i\cdot\aleph}^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{v}_1^i\\ \cdots \\ \Delta\mathrm{v}_{M_i}^i\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\underline{c}_j^i=\Big(g_j^{ik_1},\dots,g_j^{ik_{\underline{n}_i}}\Big)$, $\bar{c}_j^i=\Big(q_j^{k_1 i},\dots,q_j^{k_{\bar{n}_i}i}\Big)$ строчные векторы размерности $\underline{n}_i\cdot\aleph$ и $\bar{n}_i\cdot\aleph$ соответственно, через $\Delta u^i=\Big(\big(\Delta\underline{u}^i\big)^\top,\big(\Delta\bar{u}^i\big)^\top\Big)^\top$ — расширенный вектор размерности $n_i\cdot\aleph$. Введем расширенную матрицу $C_i=\big(c_{js}^i\big)_{j=1,\,s=1}^{M_i,\,n_i\cdot\aleph}$, $i\in I$, каждая строка которой является расширенным строчным вектором $c_j^i=\big(\underline{c}_j^i,\bar{c}_j^i\big)$ размерности $n_i\cdot\aleph$. Тогда соотношения (2.7) примут вид

$$\begin{pmatrix} c_{1,1}^i & \cdots & c_{1,(n_i\cdot\aleph)}^i\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{M_i,1}^i & \cdots & c_{M_i,(n_i\cdot\aleph)}^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u_1^i\\ \cdots\\ \Delta u_{n_i\cdot\aleph}^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{v}_1^i\\ \cdots\\ \Delta\mathrm{v}_{M_i}^i\end{pmatrix},\quad i\in I,\qquad(2.13)$$

или в матричной форме:

$$C_i\Delta u^i=\Delta\mathrm{v}^i,\quad i\in I.$$

Согласно предположения о линейной независимости условий (1.2), имеет место

$$\mathrm{rang}\, C_i=M_i.\qquad(2.14)$$

Так как матрица C_i имеет размерность $M_i\times(n_i\cdot\aleph)$, $M_i\le n_i\cdot\aleph$, $i\in I$, то из матрицы C_i можно извлечь обратимую подматрицу (минор) $\overset{\frown}{C}_i$ с рангом, равным M_i. Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через $C_i=[\overset{\frown}{C}_i,\overset{\smile}{C}_i]$. Здесь $\overset{\smile}{C}_i$ — матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы C_i, не включенных в матрицу $\overset{\frown}{C}_i$. Аналогично этому вектор Δu^i разбивается на M_i-мерный вектор $\Delta\overset{\frown}{u}{}^i=\big(\Delta\overset{\frown}{u}{}_1^i,\dots,\Delta\overset{\frown}{u}{}_{M_i}^i\big)^\top$, соответствующий матрице $\overset{\frown}{C}_i$, и $(n_i\cdot\aleph-M_i)$-мерный вектор $\Delta\overset{\smile}{u}{}^i=\big(\Delta\overset{\smile}{u}{}_1^i,\dots,\Delta\overset{\smile}{u}{}_{(n_i\cdot\aleph)-M_i}^i\big)^\top$. Тогда (2.13) можно записать так

$$\begin{pmatrix} \overset{\frown}{c}{}^{i}_{1,1} & \cdots & \overset{\frown}{c}{}^{i}_{1,M_i} \\ & \cdots & \\ \overset{\frown}{c}{}^{i}_{M_i,1} & \cdots & \overset{\frown}{c}{}^{i}_{M_i,M_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \overset{\frown}{u}{}^{i}_{1} \\ \cdots \\ \Delta \overset{\frown}{u}{}^{i}_{M_i} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\smile}{c}{}^{i}_{1,1} & \cdots & \overset{\smile}{c}{}^{i}_{1,(n_i\cdot\aleph-M_i)} \\ & \cdots & \\ \overset{\smile}{c}{}^{i}_{M_i,1} & \cdots & \overset{\smile}{c}{}^{i}_{M_i,(n_i\cdot\aleph-M_i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \overset{\smile}{u}{}^{i}_{1} \\ \cdots \\ \Delta \overset{\smile}{u}{}^{i}_{(n_i\cdot\aleph)-M_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{v}^i_1 \\ \cdots \\ \Delta \mathrm{v}^i_{M_i} \end{pmatrix}$$

или в виде

$$\overset{\frown}{C}_i \, \Delta \overset{\frown}{u}{}^{i} + \overset{\smile}{C}_i \, \Delta \overset{\smile}{u}{}^{i} = \Delta \mathrm{v}^i, \quad i \in I. \tag{2.15}$$

Учитывая (2.14), $\overset{\frown}{C}_i$ имеет обратную матрицу. Умножая обе части (2.15) слева на $\left(\overset{\frown}{C}_i\right)^{-1}$, получим

$$\Delta \overset{\frown}{u}{}^{i} = -\left(\overset{\frown}{C}_i\right)^{-1} \overset{\smile}{C}_i \, \Delta \overset{\smile}{u}{}^{i} + \left(\overset{\frown}{C}_i\right)^{-1} \Delta \mathrm{v}^i, \quad i \in I. \tag{2.16}$$

Аналогично из расширенных векторов $\dfrac{\partial \Phi^i}{\partial u^i} = \left[\dfrac{\partial \Phi^i}{\partial \underline{u}^i}, \dfrac{\partial \Phi^i}{\partial \bar{u}^i}\right]$, $\psi^i = \left(\left(-\underline{\psi}^i\right)^\top, \left(\bar{\psi}^i\right)^\top\right)^\top$ размерности $n_i \cdot \aleph$ выделяем векторы $\dfrac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} = \left(\dfrac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i_1}, \ldots, \dfrac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i_{M_i}}\right)$, $\overset{\frown}{\psi}{}^{i} = \left(\overset{\frown}{\psi}{}^{i}_1, \ldots, \overset{\frown}{\psi}{}^{i}_{M_i}\right)^\top$.

Из (2.16) следует, что приращения $\Delta \overset{\smile}{u}{}^{i} \in R^{(n_i\cdot\aleph)-M_i}$ являются независимыми и произвольными, а следовательно, можно их принять равными нулю. Тогда для последних двух слагаемых из (2.10) можно получить

$$\sum_{i\in I}\left(\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \underline{u}^i} - (\underline{\psi}^i)^\top\right)\Delta \underline{u}^i + \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \bar{u}^i} + (\bar{\psi}^i)^\top\right)\Delta \bar{u}^i\right) = \sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^i} + (\psi^i)^\top\right)\Delta u^i$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} + (\overset{\frown}{\psi}{}^{i})^\top\right)\Delta \overset{\frown}{u}{}^{i} + \sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \overset{\smile}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} + (\overset{\smile}{\psi}{}^{i})^\top\right)\Delta \overset{\smile}{u}{}^{i}$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \overset{\smile}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} + (\overset{\smile}{\psi}{}^{i})^\top\right)\Delta \overset{\smile}{u}{}^{i} - \sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} + (\overset{\frown}{\psi}{}^{i})^\top\right)\left(\overset{\frown}{C}_i\right)^{-1} \overset{\smile}{C}_i \, \Delta \overset{\smile}{u}{}^{i} +$$

$$\sum_{i\in I}\left(\frac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i} + (\overset{\frown}{\psi}{}^{i})^\top\right)\left(\overset{\frown}{C}_i\right)^{-1} \Delta \mathrm{v}^i.$$

Учитывая это в (2.10) и приравнивая к нулю коэффициенты при $\Delta \overset{\smile}{u}{}^{i}$, получим для каждого i-го узла следующие M_i краевых условий:

$$\left(\overset{\smile}{C}_i\right)^\top \left(\overset{\frown}{C}{}_i^{-1}\right)^\top \left(\left(\frac{\partial \overset{\frown}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i}\right)^\top + \overset{\frown}{\psi}{}^{i}\right) - \left(\frac{\partial \overset{\smile}{\Phi}{}^{i}}{\partial u^i}\right)^\top - \overset{\smile}{\psi}{}^{i} = 0, \quad i \in I, \tag{2.17}$$

которым должны удовлетворять значения сопряженных функций $\psi^{ki}(0)$ и $\psi^{ki}(l^{ki})$, $k \in I_i^+$, $i \in I$. Тогда компоненты градиента функционала (1.3) по v^i определяются следующей формулой:

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{v}^i} \Im(w, \mathrm{v}) = \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial \mathrm{v}^i} + \left(\widehat{C}_i^{-1}\right)^{\top} \left(\left(\frac{\partial \,\widehat{\Phi}^i}{\partial u^i} \right)^{\top} + \widehat{\psi}^i \right) + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \mathrm{v}^i}. \tag{2.18}$$

Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче* (1.1)–(1.4). *Тогда функционал* (1.3) *дифференцируем и компоненты градиента функционала* (1.3) *по управляющим функциям и параметрам для всех* $k \in I_i^+$, $i \in I$, *определяются формулами* (2.12), (2.18), *а непрерывно-дифференцируемая вектор-функция* $\psi^{ki}(x) \in R^{\aleph}$, $x \in [0, l^{ki}]$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, *является решением сопряженной системы* (2.11) *с неразделенными краевыми условиями* (2.17).

Интересно отметить следующее. Во-первых, сопряженная задача (2.11), (2.17) имеет ту же специфику, что и прямая задача. А именно, система (2.11) имеет блочную структуру, а краевые условия (2.17) по всех узлах являются неразделенными. Во-вторых, в выражениях компонент градиента функционала по управляющим воздействиям на (k, i)-е звено, как видно из (2.12), участвует сопряженная функция только этого звена. А в формулах для компонент градиента функционала по источникам, воздействующих на i-ю вершину, как видно из (2.18), участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных именно только в этой вершине.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме (см. [30]) для задачи (1.1)–(1.3) в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче* (1.1)–(1.4). *Для оптимальности управления* $\hat{w}^{ki}(x) \in W^{ki}$ *и параметров* $\hat{\mathrm{v}}^i \in V^i$ *необходимо и достаточно, чтобы неравенства*

$$\Big(\operatorname{grad}_{w^{ki}} \Im(\hat{w}, \hat{\mathrm{v}}), w^{ki}(x) - \hat{w}^{ki}(x)\Big) \geq 0 \tag{2.19}$$

и

$$\big(\operatorname{grad}_{\mathrm{v}^i} \Im(\hat{w}, \hat{\mathrm{v}}), \mathrm{v}^i - \hat{\mathrm{v}}^i\big) \geq 0 \tag{2.20}$$

выполнялись для всех допустимых управлений $w^{ki}(x) \in W^{ki}$ *и значений параметров* $\mathrm{v}^i \in V^i$, $k \in I_i^+$, $i \in I$.

Отметим следующее. Рассматриваемые в статье многосвязные объекты произвольной структуры можно за счет изменения направления ребер, а в случае необходимости введением дополнительных узлов, привести к виду, когда все узлы из I разбиваются на два непересекающихся подмножества: узлы, у которых все ребра являются входящими (I^{in}), и узлы, у которых все ребра — исходящие (I^{out}), т. е. $I = I^{\mathrm{in}} \bigcup I^{\mathrm{out}}$. Например, на рис. 2 а ребро (5, 6) введением нового узла (8) разбито на два ребра (8, 5) и (8, 6) (рис. 2 б), и тогда $I^{\mathrm{in}} = \{1, 3, 5, 6\}$, $I^{\mathrm{out}} = \{2, 4, 7\}$. В этом случае условия (1.2) разбиваются на две группы условий:

$$\begin{aligned} &\underline{C}_i\, \underline{u}^i = \underline{\mathrm{v}}^i, \quad i \in I^{\mathrm{in}}, \ \ \underline{u}^i = \{u^{ki} :\ k \in I_i^+,\ i \in I^{\mathrm{in}}\}, \\ &\bar{C}_i \bar{u}^i = \bar{\mathrm{v}}^i, \quad i \in I^{\mathrm{out}}, \ \ \bar{u}^i = \{u^{ki} :\ k \in I_i^-,\ i \in I^{\mathrm{out}}\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Однако замена условий (1.2) условиями (2.21) в исследовании задачи (1.1)–(1.4) никаких преимуществ с теоретической точки зрения не дает.

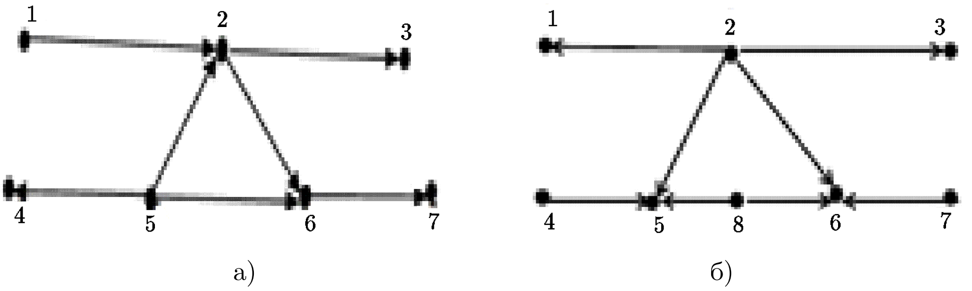


Рис. 2. а) исходный граф, б) преобразованный граф

Во многих практических приложениях управляющие воздействия и внешние источники участвуют не на всех участках и в вершинах объекта или же их значения могут быть заданы и не оптимизироваться. В этих случаях соответствующие компоненты градиентов функционала $\mathrm{grad}_w \Im(w, \mathrm{v})$ и $\mathrm{grad}_{\mathrm{v}} \Im(w, \mathrm{v})$ не вычисляются и принимаются равными нулю.

3. Схема численного решения задачи

В этом пункте предлагается численная схема решения задачи (1.1)–(1.4). Отметим, что решение задачи (1.1)–(1.4) требует рассмотрения задач двух уровней: задачи оптимизации и оптимального управления (верхний уровень) [26–28, 30, 31] и краевой задачи (прямой и сопряженной) относительно систем ОДУ блочной структуры с неразделенными краевыми условиями (нижний уровень).

Верхний уровень. Для определения оптимальных значений $\upsilon = (w, \mathrm{v})$, применяя формулы (2.12)–(2.18) для вычисления компонентов градиента функционала задачи (1.1)–(1.4), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например, метод проекции градиента [30]:

$$\begin{pmatrix} w^{ki} \\ \mathrm{v}^i \end{pmatrix}^{t+1} = P_{W^{ki}\times V^i}\left[\begin{pmatrix} w^{ki} \\ \mathrm{v}^i \end{pmatrix}^{t} - \alpha_t \begin{pmatrix} \mathrm{grad}_{w^{ki}} \Im(w^t, \mathrm{v}^t) \\ \mathrm{grad}_{\mathrm{v}^i} \Im(w^t, \mathrm{v}^t) \end{pmatrix}\right], \ k \in I_i^+, \ i \in I, \ t = 1, 2, \ldots. \quad (3.1)$$

Здесь $P_{W^{ki}\times V^i}[\bullet]$ — оператор проектирования точки на допустимые множества $W^{ki} \times V^i$, имеющие простую структуру, например являющиеся параллелепипедами, шарами и т. п., $\alpha_t \geq 0$ — шаг одномерной минимизации.

На каждой итерации процедуры (3.1) требуется вычисление компонент градиента функционала $\Im(w, \mathrm{v})$ при текущих значениях управления $w(x)$ и параметра v. Для этого сначала решается прямая краевая задача (1.1), (1.2), далее — сопряженная краевая задача (2.11), (2.17). Результаты решения подставляются в формулы (2.12), (2.18) для вычисления компонентов градиента функционала.

Нижний уровень. Прямая (1.1), (1.2) и сопряженная (2.11), (2.17) краевые задачи являются двухточечными задачами специфической (блочной) структуры большой размерности. Для их решения ниже предлагается подход, основанный на использовании предложенной в [17, 19] операции переноса неразделенных краевых условий, учитывающий специфику (большую размерность и блочную структуру) прямой и сопряженной начально-краевых задач. Приведем соответствующие формулы и схемы, не требующие одновременного решения всех подсистем систем (1.1) или (2.11). Подход позволяет проводить прогонку каждого условия отдельно и поблочно. В конце требуется решение алгебраической системы уравнений со слабо и произвольно заполненной матрицей, а далее — решение задач Коши в отдельности для каждой подсистемы.

Сначала рассмотрим прямую задачу. Предлагаемый подход, как и все подобные методы переноса условий, заключается в замене условий (1.2) относительно вершины $i \in I$, содержащих значение $u^{ik}(0)$, на эквивалентные условия со значением $u^{ki}(l^{ki})$ при переносе вправо, при переносе влево — в замене условий, содержащих $u^{ki}(l^{ki})$, на условия со значением $u^{ik}(0)$. В результате вместо условий вида (1.2) будут получены M условий вида

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{n_i} \tilde{q}_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I, \tag{3.2}$$

при переносе условий (1.2) вправо или вида

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^-}^{n_i} \tilde{g}_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I, \tag{3.3}$$

при переносе условий (1.2) влево. Получение условий вида (3.2) или (3.3) будем осуществлять поэтапно. Чтобы не иметь дело с матричными операциями, каждое условие из (1.2) будем переносить отдельно.

Условия (3.2) и (3.3) представляют собой систему M алгебраических уравнений с M неизвестными относительно $u(l) \in R^M$ и $u(0) \in R^M$ соответственно. После решения одной из этих систем относительно подсистем системы дифференциальных уравнений (1.1) получаем m задач Коши, которые решаются независимо друг от друга.

Замечание. Во многих конкретных практических задачах бо́льшая часть условий из (1.2) вместо общего вида (1.2), как указывалось, в целом, может быть задана в виде (2.21) или, более того, может совпасть с условиями Коши на левом или правом концах. Поэтому выбор направления переноса условий влево или вправо следует осуществлять исходя из того, в каком из концов локальных условий больше — в тот конец и переносить оставшиеся условия.

Итак, рассмотрим из (1.2) какое-либо j-е условие, заданное в i-й вершине, $j = 1, \ldots, M_i$, $i \in I$. Результатом переноса этого условия в правый конец является эквивалентное ему условие в виде

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} \alpha_j^{ik_s}(l^{ik_s}) u^{ik_s}(l^{ik_s}) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \gamma_j^i(l^{ki}), \tag{3.4}$$

где $\alpha_j^{ik_s}(x)$ и $\gamma_j^i(x)$ — некоторые, пока неизвестные, строчная $\aleph$-мерная вектор-функция и скалярная функция соответственно; $\aleph$-мерный вектор $u^{ki}(l^{ki})$ — значение неизвестного решения (k, i)-ой подсистемы системы (1.1) в правом конце. Группируя слагаемые (3.4) и переобозначая коэффициенты, получим j-е условие вида (3.2). Аналогично, перенося j-е условие влево, будет получено условие вида (3.3).

Получение условия вида (3.4) будем осуществлять поэтапно для каждого граничного значения функции $u^{ik}(x)$, $k \in I_i^-$, в j-м условии для i-го узла из (1.2).

Изложим процесс переноса условий вправо более подробно. Пусть среди компонент вектора $g_j^{ik_s} = \left(g_{j,1}^{ik_s}, \ldots, g_{j,\aleph}^{ik_s}\right)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, имеются ненулевые. В противном случае j-е условие прогонять вправо не надо, т. к. в этом условии участвуют только значения $u^{ki}(l^{ki})$. Пусть отличный от нуля коэффициент есть $g_j^{id} \neq 0_\aleph$, $d \in I_i^-$ ($0_\aleph$ — $\aleph$-мерный вектор, все компоненты которого равны 0).

Отметим, что порядок выбора отличных от нуля коэффициентов непринципиален. Перенос значений решений подсистем из левого конца в правый можно осуществлять в произвольной последовательности выбора как подсистем, так и самих ограничений.

Определение. Будем говорить, что $\aleph$-мерная строчная вектор-функция $\alpha_j^{id}(x) = \left(\alpha_{j,1}^{id}(x), \ldots, \alpha_{j,\aleph}^{id}(x)\right)$ и скалярная функция $\gamma_j^i(x)$ такие, что

$$\alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}(0), \qquad \gamma_j^i(0) = \mathrm{v}_j^i, \quad d \in I_i^-,\ i \in I, \tag{3.5}$$

осуществляют перенос слева направо граничного значения решения (i,d)-й подсистемы (1.1) в j-м условии для i-го узла из (1.2) вправо, если для произвольного решения $u^{id}(x)$ этой подсистемы выполняется равенство

$$\alpha_j^{id}(x)u^{id}(x) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \gamma_j^i(x), \quad x \in \left[0, l^{id}\right]. \tag{3.6}$$

Ясно, что условие (3.6), учитывая (3.4), при $x = 0$ совпадает с j-м условием для i-го узла из (1.2). Функции $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ будем называть прогоночными. Подставляя значения функций $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ при $x = l^{id}$ в (3.4), получим равенство, эквивалентное j-му условию для i-го узла из (1.2):

$$\sum_{s=1,\, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1,\, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) + \alpha_j^{id}(l^{id})u^{id}(l^{id}) = \gamma_j^i(l^{id}). \tag{3.7}$$

Прогоночные функции $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$, используемые для переноса с одного конца в другой граничных значений решений подсистем, участвующих в краевых условиях (1.2), неединственны. В частности, конструктивное их построение предложено в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $g_j^{id} \neq 0_\aleph$ для $d \in I_i^-$ и $\aleph$-мерная вектор-функция $\alpha_j^{id}(x)$ и скалярная функция $\gamma_j^i(x)$ при $x \in [0, l^{id}]$ являются решением следующих задач Коши:*

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}_j^{id}(x) = -\alpha_j^{id}(x)A^{id}(x), \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}, \\ &\dot{\gamma}_j^{id}(x) = \alpha_j^{id}(x)\left(B^{id}(x)w^{id}(x) + f^{id}(x)\right), \quad \gamma_j^i(0) = \mathrm{v}_j^i, \end{aligned} \tag{3.8}$$

тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для переноса слева направо граничного значения решения (i,d)-й подсистемы (1.1) *в j-м условии для i-го узла.*

Доказательство. Пусть $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ — пока произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие (3.5) и условию (3.6). Продифференцируем условие (3.6), учитывая (i,d)-ю подсистему уравнений из (1.1). После группировки соответствующих слагаемых при $d \in I_i^-$ получим

$$\left[\dot\alpha_j^{id}(x) + \alpha_j^{id}(x)A^{id}(x)\right] u^{id}(x) + \left[-\dot\gamma_j^{id}(x) + \alpha_j^{id}(x)\left(B^{id}(x)w^{id}(x) + f^{id}(x)\right)\right] = 0. \quad (3.9)$$

Учитывая произвольность функций $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ и необходимость выполнения равенства для всех решений $u^{id}(x)$ (i,d)-й подсистемы уравнений (1.1), потребуем выполнения равенства нулю выражений в квадратных скобках. Отсюда следует, что $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ являются решением задач Коши (3.5), (3.6).

Указанная выше процедура переноса повторяется для следующего значения $u^{ik_s}(x)$, $k_s \in I_i^-\backslash\{d\}$, у которого в новом полученном условии вида (3.7) коэффициент $g_j^{id} \neq 0_\aleph$. Это повторяется пока в j-м условии для i-го узла не перестанет участвовать какая-либо компонента вектора $u^{ik_s}(0)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, с ненулевым коэффициентом. После этого необходимо перейти к $(j+1)$-му условию для i-го узла из (1.2). Эта процедура повторяется до тех пор, пока все условия (1.2) не будут приведены к виду (3.2).

Далее, решая систему алгебраических уравнений (3.2) (или (3.3)) M-го порядка, определяются векторы $u^{k_s i}(l^{k_s i})$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$ (или $u^{ik_s}(0)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$).

Для определения искомых вектор-функций $u^{ik}(x)$, $x \in [0, l^{ki}]$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, компоненты $u^{ki}(l^{ki})$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, найденного вектора используются в качестве начальных значений для соответствующих задач Коши относительно каждой отдельной подсистемы системы (1.1), решаемых в обратном порядке от $x = l^{ki}$ до $x = 0$, $k \in I_i^+$, $i \in I$.

Перенос условий может осуществляться также справа налево. Получение вспомогательных задач Коши относительно прогоночных коэффициентов в этом случае проводится аналогично.

Численное решение сопряженной начально-краевой задачи (2.11), (2.17) большой размерности и блочной структуры проводится вполне аналогично изложенному выше решению прямой задачи (1.1), (1.2). □

4. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов, полученных при решении задачи оптимального управления объектом (рис. 3), в котором

$$N = 4, \quad m = 3, \quad \aleph = 2, \quad \mu_{1,2} = 1, \quad \mu_{3,2} = 1, \quad M = 6, \quad J = \{(1,2), (3,2), (2,4)\},$$
$$I = \{1,2,3,4\}, \quad I_1^+ = \emptyset, \quad I_2^+ = \{1,3\}, \quad I_3^+ = \emptyset, \quad I_4^+ = \{2\}, \quad I_1^- = \{2\},$$
$$I_2^- = \{4\}, \quad I_3^- = \{2\}, \quad I_4^- = \emptyset, \quad l^{ki} = 1, \quad k \in I_i^+, \quad i \in I.$$

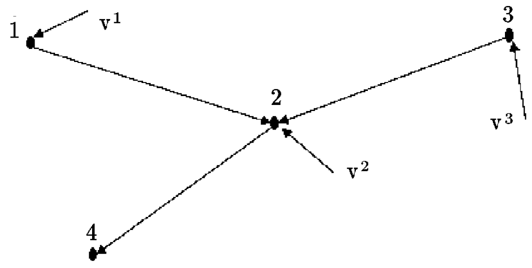


Рис. 3. Граф рассматриваемого объекта

Состояние каждого из трех блоков описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} \dot u_1^{1,2} = u_2^{1,2} - 2x - 2, & \dot u_2^{1,2} = xu_1^{1,2} - 2u_2^{1,2} + x^2 + w^{1,2}(x), \\ \dot u_1^{3,2} = u_2^{3,2} + 2 - 3x, & \dot u_2^{3,2} = u_1^{3,2} - xu_2^{3,2} + 3x^2 + w^{3,2}(x), \\ \dot u_1^{2,4} = u_2^{2,4} - x - 2, & \dot u_2^{2,4} = u_1^{2,4} - u_2^{2,4} + 5, \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

или

$$\begin{array}{lll} A^{1,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & -2 \end{pmatrix}, & A^{3,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}, & A^{2,4}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ f^{1,2}(x) = \begin{pmatrix} -2x-2 \\ x^2 \end{pmatrix}, & f^{3,2}(x) = \begin{pmatrix} 2-3x \\ 3x^2 \end{pmatrix}, & f^{2,4}(x) = \begin{pmatrix} -x-2 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ B^{1,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B^{3,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B^{2,4}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ребра (блоки) (1, 2), (3, 2), (2, 4) на рис. 3 связаны между собой начальными и/или конечными (краевыми) значениями состояний в виде (1.2). В вершинах 1, 3, 4 задано по одному условию, а в вершине 2 заданы условия: $M_1 = M_3 = M_4 = 1$, $M_2 = 3$. В целом заданы 6 условий, из них 3 являются неразделенными:

$$\begin{array}{ll} u_1^{1,2}(0) = \mathrm{v}^1, & u_2^{3,2}(1) - u_2^{2,4}(0) = \mathrm{v}_1^2, \\ u_2^{1,2}(1) - u_2^{3,2}(1) = \mathrm{v}_2^2, & u_1^{1,2}(1) + u_1^{3,2}(1) + u_1^{2,4}(0) = \mathrm{v}_3^2, \\ u_1^{2,3}(0) = \mathrm{v}^3, & u_2^{4,2}(1) = 0. \end{array} \tag{4.2}$$

Как видно, имеются по одному управляющему воздействию на звенья (1, 2), (3, 2) и внешние источники $\mathrm{v}^1 \in R^1$, $\mathrm{v}^2 \in R^3$, $\mathrm{v}^3 \in R^1$ в вершинах 1, 2, 3 соответственно.

Таким образом, матрицы C_i, $i = 1, 3, 4$, имеют размерность $M_1 \times \aleph = 1 \times 2$, а размерность C_2 равна $M_2 \times n_2 \cdot \aleph = 3 \times 6$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{1,2} & g_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,3} & g_{1,2}^{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} q_{1,1}^{4,2} & q_{1,2}^{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$\Im(w, \mathrm{v}) = \int_0^1 \left[\left(u_2^{1,2}(x) - 2x - 1 \right)^2 + \left(u_2^{3,2}(x) - 3x \right)^2 \left(u_2^{2,4}(x) - x - 3 \right)^2 \right] dx. \tag{4.4}$$

Точным решением задач (4.1)–(4.4) являются

$$\begin{array}{lll} w^{1,2^*}(x) = 3x + 4, & w^{3,2^*}(x) = 5 - 2x, & \\ \mathrm{v}^{1^*} = (1), & \mathrm{v}^{2*} = (0,\, 0,\, -1), & \mathrm{v}^{3*} = (-2), \\ u_1^{1,2^*}(x) = -x + 1, & u_2^{1,2^*}(x) = 2x + 1, & u_1^{3,2^*}(x) = 2x - 2, \\ u_2^{3,2^*}(x) = 3x, & u_1^{4,2^*}(x) = x - 1, & u_2^{4,2^*}(x) = x + 3, \\ \Im(v^*) = 0. & & \end{array}$$

В рассматриваемой задаче ограничений на управления и параметры источников нет. Поэтому на верхнем уровне для решения задачи оптимизации можно использовать методы безусловной оптимизации, в частности метод сопряженных градиентов [30].

Согласно формулам (2.11), сопряженная краевая задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\psi_1^{1,2} = -x\psi_2^{1,2}, & \dot\psi_2^{1,2} = 2[u_2^{1,2}(x) - 2x - 1] - \psi_1^{1,2} + 2\psi_2^{1,2}, \\ \dot\psi_1^{3,2} = -\psi_2^{3,2}, & \dot\psi_2^{3,2} = 2[u_2^{3,2}(x) - 3x] - \psi_1^{3,2} + x\psi_2^{3,2}, \\ \dot\psi_1^{2,4} = -\psi_2^{2,4}, & \dot\psi_2^{2,4} = 2[u_2^{2,4}(x) - x - 3] - \psi_1^{2,4} + \psi_2^{2,4}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Учитывая (4.3), подматрицы матрицы C_i, $i = 1, 3, 4$, состоят из одного элемента. Тогда, согласно (2.15), обратные к одноэлементным матрицам $\overset{\frown}{C}_1 = (1)$, $\overset{\frown}{C}_3 = (1)$, $\overset{\frown}{C}_4 = (1)$ совпадают с самими матрицами $\overset{\frown}{C}_i$, $i = 1, 3, 4$, и $\overset{\smile}{C}_1 = (0)$, $\overset{\smile}{C}_3 = (0)$, $\overset{\smile}{C}_4 = (0)$.

Из матрицы C_2 можно выделить подматрицы ранга M_2:

$$\overset{\frown}{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{\smile}{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} \\ g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} \\ g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда компонентами векторов u^i, $i = 1, 3, 4$, соответствующие столбцам подматриц $\overset{\frown}{C}_i$, $i = 1, 3, 4$, являются $\overset{\frown}{u}^1 = \left(u_1^{1,2}(0)\right)$, $\overset{\frown}{u}^3 = \left(u_1^{2,3}(0)\right)$, $\overset{\frown}{u}^4 = \left(u_1^{4,2}(1)\right)$, а векторы, соответствующие столбцам подматриц $\overset{\smile}{C}_i$, $i = 1, 3, 4$, являются векторы $\overset{\smile}{u}^1 = \left(u_2^{1,2}(0)\right)$, $\overset{\smile}{u}^3 = \left(u_2^{2,3}(0)\right)$, $\overset{\smile}{u}^4 = \left(u_2^{4,2}(1)\right)$. Столбцам подматриц $\overset{\frown}{C}_2$ соответствует вектор

$$\overset{\frown}{u}^2 = \left(u_1^{2,4}(0), u_2^{1,2}(1), u_2^{3,2}(1)\right)^\top,$$

а вектор, соответствующий столбцам подматрицы $\overset{\smile}{C}_2$:

$$\overset{\smile}{u}^2 = \left(u_2^{2,4}(0), u_1^{1,2}(1), u_1^{3,2}(1)\right)^\top.$$

Тогда краевые условия во всех вершинах можно получить из следующих соотношений:

$$\left(\overset{\smile}{C}_1\right)^\top \left(\overset{\frown}{C}_1^{-1}\right)^\top \psi_1^{1,2}(0) = \psi_2^{1,2}(0), \qquad \left(\overset{\smile}{C}_2\right)^\top \left(\overset{\frown}{C}_2^{-1}\right)^\top \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_2^{2,4}(0) \\ \psi_1^{1,2}(1) \\ \psi_1^{3,2}(1). \end{pmatrix},$$

$$\left(\overset{\smile}{C}_3\right)^\top \left(\overset{\frown}{C}_3^{-1}\right)^\top \psi_1^{2,3}(0) = \psi_2^{2,3}(0), \qquad \left(\overset{\smile}{C}_4\right)^\top \left(\overset{\frown}{C}_4^{-1}\right)^\top \psi_1^{4,2}(1) = \psi_2^{4,2}(1).$$

Следовательно, согласно (2.17), для сопряженной системы (4.5) получим следующие краевые условия:

$$\begin{array}{ccc} \psi_2^{1,2}(0)=0, & \psi_2^{2,3}(0)=0, & \psi_2^{4,2}(1)=0, \\ -\psi_2^{1,2}(1)-\psi_2^{3,2}(1)=-\psi_2^{2,4}(0), & -\psi_1^{2,4}(0)=\psi_1^{1,2}(1), & -\psi_1^{2,4}(0)=\psi_1^{3,2}(1). \end{array} \tag{4.6}$$

Градиент функционала определяется формулами:

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}_{w^{1,2}}\Im(w,\mathrm{v})=-\psi_2^{1,2}(x), \qquad \mathrm{grad}_{w^{3,2}}\Im(w,\mathrm{v})=-\psi_2^{3,2}(x),\\ &\mathrm{grad}_{\mathrm{v}^1}\Im(w,\mathrm{v})=-\psi_1^{1,2}(0),\\ &\mathrm{grad}_{\mathrm{v}^2}\Im(w,\mathrm{v})=\left(\widehat{C}_2^{-1}\right)^{\top}\begin{pmatrix}-\psi_1^{2,4}(0)\\ \psi_2^{1,2}(1)\\ \psi_2^{3,2}(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_2^{1,2}(1)+\psi_2^{3,2}(1)\\ \psi_2^{1,2}(1)\\ -\psi_1^{2,4}(0)\end{pmatrix},\\ &\mathrm{grad}_{\mathrm{v}^3}\Im(w,\mathrm{v})=-\psi_1^{2,3}(0). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для решения прямой и сопряженной задач использовался метод прогонки, основанный на теореме 3.1. Задачи Коши (4.1), (4.2) и (4.5),(4.6) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.0025$. В результате на последней итерации метода сопряженных градиентов при решении прямой краевой задачи при переносе условий вправо была получена следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} u_1^{1,2}(1)+u_1^{3,2}(1)+1.788u_1^{4,2}(1)-2.004u_2^{4,2}(1)&=-8.018,\\ u_2^{3,2}(1)+2.004u_1^{4,2}(1)-3.783u_2^{4,2}(1)&=-12.130,\\ 1.83u_1^{1,2}(1)-3.428u_2^{1,2}(1)&=-10.264,\\ 1.644u_1^{3,2}(1)-1.64u_2^{3,2}(1)&=-4.917,\\ u_1^{4,2}(1)&=0,\\ u_2^{1,2}(1)-u_2^{3,2}(1)&=0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Решив систему (4.8) методом Гаусса и добавив к полученному решению последнее из условий (4.2), будем иметь

$$u(1)=(-0.001;\ 2.993;\ -0.004;\ 2.993;\ 0;\ 3.997)^*. \tag{4.9}$$

Компоненты полученного вектора $u(1)$ в (4.9) имеют максимальное отклонение от известных точных значений меньше, чем 10^{-3}. Далее, для получения вектор-функции $u(x)$ были решены задачи Коши с начальными условиями (4.9) на правом конце отдельно для каждой из подсистем системы (4.1).

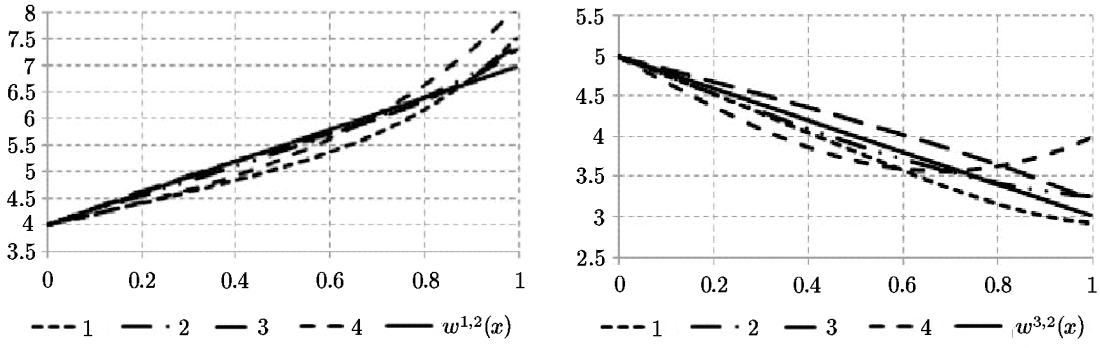
В таблице и на рис. 4 приведены соответственно значения и графики для оптимальных точных $\left(w^{1,2}(x),w^{3,2}(x)\right)^*$, $\left(\mathrm{v}^1,\mathrm{v}^2,\mathrm{v}^3\right)^*$ и полученных методом сопряженных градиентов для четырех различных начальных значений управлений и параметров $\upsilon_i^0=(w_i^0,\mathrm{v}_i^0)$, $i=1,\ldots,4$:

$$\begin{aligned} &w_1^0=(4+3x;5-x)_1^0, && \mathrm{v}_1^0=(0;0;0;0;0)_1^0,\\ &w_2^0=(4+x;5)_2^0, && \mathrm{v}_2^0=(1;1;1;1;1)_2^0,\\ &w_3^0=(4+2x;5-x)_3^0, && \mathrm{v}_3^0=(2;2;2;2;2)_3^0,\\ &w_4^0=(4;5-2x)_4^0, && \mathrm{v}_4^0=(-2;-2;-2;-2;-2)_4^0 \end{aligned}$$

с применением формул (4.7). При этом значение функционала, например в начальной точке $\upsilon_1^0=(w_1^0,\mathrm{v}_1^0)$, было равно $\Im(\upsilon_1^0)=12.92$, а полученные минимальные значения функционала были меньше, чем 0.003.

Таблица. Полученные и точные значения параметра v

Полученные из начальных точек υ^0				Точное
v_1^*	v_2^*	v_3^*	v_4^*	v^*
(0.986; −0.002; −0.002; −1.001; −2.007)	(0.980; −0.001; −0.004; −1.003; −2.001)	(0.981; −0.001; −0.002; −1.002; −2.006)	(0.980; −0.007; −0.001; −1.002; −2.001)	(1; 0; 0; −1; −2)



а) б)

Рис. 4. Графики оптимальных и полученных управлений: а) $w^{1,2}(x)$, б) $w^{3,2}(x)$ — для четырех начальных υ^0

5. Заключение

В работе получены необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления сложным объектом, описываемого системой дифференциальных уравнений блочной структуры, блоки которой связаны произвольно лишь краевыми значениями. Сами краевые условия, заданные в неразделенном виде, содержат оптимизируемые параметры, определяемые внешними воздействиями. Исследованы выпуклость функционала, условия оптимальности для оптимизируемых функций и параметров, получены формулы градиента функционала по ним, использованные для численного решения рассматриваемой задачи с применением численных методов оптимизации первого порядка.

Предложен подход к численному решению прямой и сопряженной краевых задач большой размерности и блочной структуры с неразделенными краевыми условиями. Подход основан на предложенной схеме метода прогонки, позволяющей проводить прогонку отдельно поблочно с приведением решения задачи к алгебраической системе уравнений со слабо и произвольно заполненной матрицей, а далее к решению задач Коши отдельно для каждой подсистемы. Подход позволяет строить эффективные алгоритмы решения задач оптимального управления, основанные на естественном распараллеливании процессов решения прямой и сопряженных краевых задач по блокам (подсистемам), а далее по каждому краевому условию каждого блока.

Литература

1. **Ащепков Л.Т.** Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, вып. 2. — С. 215–222.

2. **Vasilieva O.O., Mizukami K.** Optimality criterion for singular controllers: linear boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. — 1997. — Vol. 213, № 2. — P. 620–641.

3. **Васильева О.О., Мизуками К.** Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 1. — С. 95–100.

4. **Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.** О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 12. — С. 2163–2177.

5. **Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.** Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 5. — С. 739–751. Перевод: Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Approach to the numerical solution of optimal control problems for loaded differential equations with nonlocal conditions // Comput. Math. and Math. Phys. — 2019. — Vol. 59. — P. 696–707. — https://doi.org/10.1134/S0965542519050026

6. **Sharifov Y.A., Mammadova N.B.** Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // Differ. Equations. — 2014. — Vol. 50, № 3. — P. 403–411.

7. **Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.** О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 1–16. Перевод: Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 7, № 1. — P. 1–14.

8. **Айда-заде К.Р.** К численному решению линейных дифференциальных уравнений с нелокальными нелинейными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 5. — С. 828–836. Перевод: Aida-zade K.R. Numerical solution of linear differential equations with nonlocal nonlinear conditions // Comput. Math. and Math. Phys. — 2020. — Vol. 60. — P. 808–816. — https://doi.org/10.1134/S0965542520030033

9. **Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A.** Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2018. — Vol. 9, № 2. — P. 243–246.

10. **Assanova A.T.** Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions // Electronic J. of Differ. Equations. — 2017. — Vol. 2017, № 170. — P. 1–12.

11. **Айда-заде К.Р., Али-заде Р.И., Новрузбеков И.Г., Калаушин М.А.** Декомпозиционный метод анализа и синтеза плоских механизмов // Механика машин. — 1980. Вып. 57. — С. 26–30.

12. **Geiser J.** Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications. — CRC Press, Taylor and Francis Group, 2009.

13. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

14. **Воеводин А.Ф.** Метод прогонки для разностных уравнений, определенных на комплексе // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1973. — Т. 13, № 2. — С. 494–497.

15. **Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. — Новосибирск: Наука, Сибирское изд-во, 1993.

16. **Абрамов А.А.** О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 542–545.

17. **Абрамов А.А., Бураго Н.Г., Дышко А.Л. и др.** Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач // Сообщения по программному обеспечению ЭВМ. — М: ВЦ АН СССР, 1982.
18. **Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р.** Расчет состояния системы дискретных линейных процессов, связанных неразделенными краевыми условиями // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 4. — С. 3–14. Перевод: Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Calculation of the state of a system of discrete linear processes connected by unseparated boundary conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2016. — Vol. 10. — P. 457–467. — https://doi.org/10.1134/S1990478916040013
19. **Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.** Solving systems of differential equations of block structure with nonseparated boundary conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, № 1. — P. 1–10.
20. **Ashrafova Y.R.** On one method of block transfer of conditions for a system of three-step discrete processes connected only by boundary conditions // Informatics and Control Problems. — 2019. — Vol. 39, № 2. — P. 48–56.
21. **Абдуллаев В.М.** Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. индустр. математики. — 2012. — Т. 15, № 3. — С. 3–15.
22. **Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.** Numerical solution to an inverse problem on a determination of places and capacities of sources in the hyperbolic systems // J. of Industrial and Management Optimization. — 2020. — Vol. 16, № 6. — P. 3011–3033.
23. **Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р.** Численное решение задачи определения мест и объемов утечек при неустановившемся движении жидкости в трубопроводной сети сложной структуры // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2017. — Т. 57, № 12. — С. 36–52. Перевод: Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Leak detection in a pipeline network of complex structure with unsteady flow // Comput. Math. and Math. Phys. — 2017. — Vol. 57. — P. 1919–1934. — https://doi.org/10.1134/S0965542517120041
24. **Кабанихин С.И., Шишленин М.А.** Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 1. — С. 55–63. Перевод: Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Recovering a time-dependent diffusion coefficient from non-local data // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 1. — P. 38–44.
25. **Пененко А.В.** Согласованные численные схемы для решения нелинейных обратных задач идентификации источников градиентными алгоритмами и методами Ньютона-Канторовича // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 1. — С. 99–116. Перевод: Penenko A.V. Consistent numerical schemes for solving nonlinear inverse source problems with gradient-type algorithms and Newton–Kantorovich methods // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 1. — P. 73–88.
26. **Карчевский А.Л., Дедок В.А.** Восстановление коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электрического поля // Сиб. журн. индустр. математики. — 2018. — Т. 21, № 3. — С. 50–59. Перевод: Karchevsky A.L., Dedok V.A. Reconstruction of permittivity from the modulus of a scattered electric field // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — Vol. 12. — P. 470–478.
27. **Карчевский А.Л.** Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 2. — С. 39–149. Перевод: Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, № 2. — P. 114–122.
28. **Шишленин М.А.** Матричный метод в задачах определения источников колебаний // Сиб. электрон. матем. известия. — 2014. — Т. 11. — С. 161–171.

29. **Rothe E.** Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben // Math. Annalen — 1930. — Vol. 102, № 1. — P. 650–670.
30. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.
31. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
32. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
33. **Егоров А.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Поступила в редакцию 28 апреля 2020 г.
После исправления 04 июня 2020 г.
Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Aschepkov L.T.** Optimal'noe upravlenie sistemoi s promezhutochnymi usloviyami // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1981. — T. 45, vyp. 2. — S. 215–222.
2. **Vasilieva O.O., Mizukami K.** Optimality criterion for singular controllers: linear boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. — 1997. — Vol. 213, № 2. — P. 620–641.
3. **Vasil'eva O.O., Mizukami K.** Dinamicheskie protsessy, opisyvaemye kraevoi zadachei: neobkhodimye usloviya optimal'nosti i metody resheniya // Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2000. — № 1. — S. 95–100.
4. **Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.** O chislennom reshenii zadach optimal'nogo upravleniya s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integral'nymi usloviyami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 52, № 12. — S. 2163–2177.
5. **Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.** Podkhod k chislennomu resheniyu zadach optimal'nogo upravleniya nagruzhennymi differentsial'nymi uravneniyami s nelokal'nymi usloviyami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2019. — T. 59, № 5. — S. 739–751. Perevod: Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Approach to the numerical solution of optimal control problems for loaded differential equations with nonlocal conditions // Comput. Math. and Math. Phys. — 2019. — Vol. 59. — P. 696–707. — https://doi.org/10.1134/S0965542519050026
6. **Sharifov Y.A., Mammadova N.B.** Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // Differ. Equations. — 2014. — Vol. 50, № 3. — P. 403–411.
7. **Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.** O chislennom reshenii nagruzhennykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integral'nymi usloviyami // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2014. — T. 17, № 1. — S. 1–16. Perevod: Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 7, № 1. — P. 1–14.
8. **Aida-zade K.R.** K chislennomu resheniyu lineinykh differentsial'nykh uravnenii s nelokal'nymi nelineinymi usloviyami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2020. — T. 60, № 5. — S. 828–836. Perevod: Aida-zade K.R. Numerical solution of linear differential equations with nonlocal nonlinear conditions // Comput. Math. and Math. Phys. — 2020. — Vol. 60. — P. 808–816. — https://doi.org/10.1134/S0965542520030033
9. **Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A.** Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2018. — Vol. 9, № 2. — P. 243–246.
10. **Assanova A.T.** Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions // Electronic J. of Differ. Equations. — 2017. — Vol. 2017, № 170. — P. 1–12.

11. **Aida-zade K.R., Ali-zade R.I., Novruzbekov I.G., Kalaushin M.A.** Dekompozitsionnyi metod analiza i sinteza ploskikh mekhanizmov // Mekhanika mashin. — 1980. Vyp. 57. — S. 26–30.
12. **Geiser J.** Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications. — CRC Press, Taylor and Francis Group, 2009.
13. **Samarskii A.A., Nikolaev E.S.** Metody resheniya setochnykh uravnenii. — M.: Nauka, 1978.
14. **Voevodin A.F.** Metod progonki dlya raznostnykh uravnenii, opredelennykh na komplekse // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1973. — T. 13, № 2. — S. 494–497.
15. **Voevodin A.F., Shugrin S.M.** Metody resheniya odnomernykh evolyutsionnykh sistem. — Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe izd-vo, 1993.
16. **Abramov A.A.** O perenose granichnykh uslovii dlya sistem lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii (variant metoda progonki) // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1961. — T. 1, № 3. — S. 542–545.
17. **Abramov A.A., Burago N.G., Dyshko A.L. i dr.** Paket prikladnykh programm dlya resheniya lineinykh dvukhtochechnykh kraevykh zadach // Soobscheniya po programmnomu obespecheniyu EVM. — M: VTS AN SSSR, 1982.
18. **Aida-zade K.R., Ashrafova E.R.** Raschet sostoyaniya sistemy diskretnykh lineinykh protsessov, svyazannykh nerazdelennymi kraevymi usloviyami // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2016. — T. 19, № 4. — S. 3–14. Perevod: Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Calculation of the state of a system of discrete linear processes connected by unseparated boundary conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2016. — Vol. 10. — P. 457–467. — https://doi.org/10.1134/S1990478916040013
19. **Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.** Solving systems of differential equations of block structure with nonseparated boundary conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, № 1. — P. 1–10.
20. **Ashrafova Y.R.** On one method of block transfer of conditions for a system of three-step discrete processes connected only by boundary conditions // Informatics and Control Problems. — 2019. — Vol. 39, № 2. — P. 48–56.
21. **Abdullaev V.M.** Reshenie differentsial'nykh uravnenii s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integral'nymi usloviyami // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2012. — T. 15, № 3. — S. 3–15.
22. **Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.** Numerical solution to an inverse problem on a determination of places and capacities of sources in the hyperbolic systems // J. of Industrial and Management Optimization. — 2020. — Vol. 16, № 6. — P. 3011–3033.
23. **Aida-zade K.R., Ashrafova E.R.** Chislennoe reshenie zadachi opredeleniya mest i ob"emov utechek pri neustanovivshemsya dvizhenii zhidkosti v truboprovodnoi seti slozhnoi struktury // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2017. — T. 57, № 12. — S. 36–52. Perevod: Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Leak detection in a pipeline network of complex structure with unsteady flow// Comput. Math. and Math. Phys. — 2017. — Vol. 57. — P. 1919–1934. — https://doi.org/10.1134/S0965542517120041
24. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.** Vosstanovlenie koeffitsienta diffuzii, zavisyaschego ot vremeni, po nelokal'nym dannym // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — T. 21, № 1. — S. 55–63. Perevod: Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Recovering a time-dependent diffusion coefficient from non-local data // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 1. — P. 38–44.
25. **Penenko A.V.** Soglasovannye chislennye skhemy dlya resheniya nelineinykh obratnykh zadach identifikatsii istochnikov gradientnymi algoritmami i metodami N'yutona-Kantorovicha // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — T. 21, № 1. — S. 99–116. Perevod: Penenko A.V. Consistent numerical schemes for solving nonlinear inverse source problems with gradient-type algorithms and Newton–Kantorovich methods // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 1. — P. 73–88.

26. **Karchevsky A.L., Dedok V.A.** Vosstanovlenie koeffitsienta dielektricheskoi pronitsaemosti po modulyu rasseyannogo elektricheskogo polya // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2018. — T. 21, № 3. — S. 50–59. Perevod: Karchevsky A.L., Dedok V.A. Reconstruction of permittivity from the modulus of a scattered electric field // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — Vol. 12. — P. 470–478.

27. **Karchevsky A.L.** Korrektnaya skhema deistvii pri chislennom reshenii obratnoi zadachi optimizatsionnym metodom // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — T. 11, № 2. — S. 39–149. Perevod: Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, № 2. — P. 114–122.

28. **Shishlenin M.A.** Matrichnyi metod v zadachakh opredeleniya istochnikov kolebanii // Sib. elektron. matem. izvestiya. — 2014. — T. 11. — S. 161–171.

29. **Rothe E.** Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben // Math. Annalen — 1930. — Vol. 102, № 1. — P. 650–670.

30. **Vasil'ev F.P.** Metody optimizatsii. — M.: Faktorial Press, 2002.

31. **Polyak B.T.** Vvedenie v optimizatsiyu. — M.: Nauka, 1983.

32. **Pontryagin L.S.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. — M.: Nauka, 1975.

33. **Egorov A.I.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya s prilozheniyami. 2-e izd., ispr. — M.: FIZMATLIT, 2005.