

УДК 629.7.023:539.3  
DOI: 10.15372/PMTF202215132

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ КРУТЯЩИМ И ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТАМИ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Л. П. Железнов

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,  
Новосибирск, Россия  
E-mail: Zgeleznov@sibnia.ru

Решена задача об устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Геометрически нелинейная задача устойчивости решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Критические нагрузки определяются в процессе решения нелинейной задачи с помощью критерия Сильвестра. Используются разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены жесткие перемещения, что существенно влияет на сходимость решения. Исследована устойчивость круговой цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами и внутренним давлением. Изучено влияние способа укладки монослоев, нелинейности деформирования, внутреннего давления на критические нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости оболочки.

**Ключевые слова:** цилиндрические композитные оболочки, полимерные композиционные материалы, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов, изгибающий и крутящий моменты, внутреннее давление

**Введение.** В конструкциях современных летательных аппаратов широко применяются полимерные композиционные материалы (ПКМ). Использование ПКМ позволяет существенно уменьшить вес конструкции при сохранении ее прочностных и жесткостных характеристик. Основополагающий вклад в разработку методов расчета композитных конструкций внесла школа В. В. Васильева [1, 2]. Исследование прочности и устойчивости авиационных конструкций особенно важно при разработке фюзеляжей самолетов, потеря устойчивости обшивки которых недопустима. В большинстве опубликованных работ задачи об устойчивости оболочек решаются в классической постановке при безмоментном или линейном исходном напряженно-деформированном состоянии [3–6]. Остаются нерешенными вопросы, связанные с прочностью и устойчивостью композитных конструкций при их нелинейном деформировании, в частности влияние способа укладки однонаправленных монослоев на устойчивость оболочек из ПКМ при комбинированном нагружении.

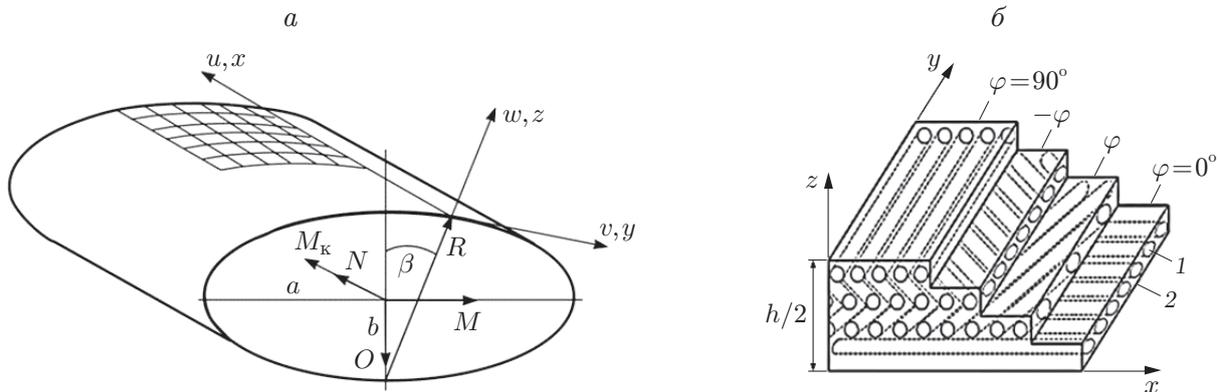


Рис. 1. Схема оболочки (а) и порядок укладки волокон по толщине (б):  
1 — волокно, 2 — матрица

В настоящей работе нелинейная задача о прочности и устойчивости цилиндрических оболочек из ПКМ при произвольном нагружении решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича [7] с использованием метода пошагового нагружения и энергетического критерия устойчивости. Критические нагрузки определялись в процессе решения геометрически нелинейной задачи с помощью критерия Сильвестра. Используются созданные автором данной работы на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены жесткие перемещения. Исследуется влияние порядка укладки монослоев и нелинейности деформирования на устойчивость круговой цилиндрической оболочки из ПКМ при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами и внутренним давлением.

Результаты исследований, представленные в данной работе, получены с использованием разработанного автором программного комплекса [8].

**Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрическую, в общем случае некруговую композитную многослойную оболочку с различными углами укладки волокон, находящуюся под действием неоднородной краевой нагрузки в виде продольной силы  $N$ , изгибающего  $M$ , крутящего  $M_k$  моментов, поперечной силы  $Q$  и внутреннего давления  $q$  (рис. 1).

Приведем основные соотношения для конечного элемента некруговой цилиндрической оболочки, выполненной из композитного материала. Оболочку будем рассматривать как конструктивно-ортотропную. При выводе основных соотношений используем разработанный ранее алгоритм [9, 10].

Разобьем оболочку линиями главных кривизн на  $m$  частей по образующей и на  $n$  частей по направляющей. Таким образом, оболочку представим набором  $m \times n$  криволинейных прямоугольных конечных элементов естественной кривизны.

Для оболочки применяем гипотезу Тимошенко прямых нормалей. Используя [1, 3], для углов поворота сечений оболочки запишем выражения

$$\theta_x = \theta_1 + \psi_x, \quad \theta_y = \theta_2 + \psi_y, \quad \theta_1 = -w_x, \quad \theta_2 = k_2(v - w_\beta), \quad k_2 = 1/R, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус кривизны оболочки; индексы  $x, \beta$  у величины  $w$  означают дифференцирование по  $x, \beta$ .

Из (1) получаем выражения для углов сдвига сечений

$$\psi_x = \theta_x - \theta_1, \quad \psi_y = \theta_y - \theta_2.$$

Используя билинейную аппроксимацию для тангенциальных перемещений  $u, v$  и углов сдвига  $\psi_x, \psi_y$ , бикубическую аппроксимацию для прогиба  $w$  и выражения для перемещений

элемента оболочки как жесткого целого [10], запишем выражения для полных перемещений точек конечного элемента

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\psi_1s + a_{20}\psi_2c, \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\psi_1c + \psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s, \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + \\ &+ a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xs + a_8(\psi_1s - \psi_2c), \\ c &= \cos \beta, \quad s = \sin \beta, \quad \psi_1 = \int Rs d\beta, \quad \psi_2 = - \int Rc d\beta, \\ \psi_x &= a_{25}xy + a_{26}x + a_{27}y + a_{28}, \quad \psi_y = a_{29}xy + a_{30}x + a_{31}y + a_{32}. \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты полиномов  $a_i$  выражаются через узловые неизвестные:  $\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{1i}, \theta_{2i}, w_{xyi}, \psi_{xi}, \psi_{yi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}, w_{xyj}, \psi_{xj}, \psi_{yj}, u_k, \dots, u_n, \dots, w_{xyn}, \psi_{xn}, \psi_{yn}\}^T$ . В каждом узле имеется восемь неизвестных, следовательно, конечный элемент имеет 32 степени свободы.

Нелинейные соотношения Коши для деформаций и изменений кривизн срединной поверхности оболочки имеют вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \psi_x, \psi_y\}^T, \quad \mathbf{e}_n = \{\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}, 0, 0, 0, 0, 0\}^T, \\ \varepsilon_1 &= u_x, \quad \varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w), \quad \varepsilon_3 = (v_x + k_2u_\beta), \\ \chi_1 &= (\theta_x)_x, \quad \chi_2 = k_2(\theta_y)_\beta, \quad \chi_3 = (\theta_y)_x, \\ \varepsilon_{1n} &= (w_x)^2/2, \quad \varepsilon_{2n} = k_2(v - w_\beta)^2/2, \quad \varepsilon_{3n} = -k_2w_x(v - w_\beta), \end{aligned}$$

индексы  $x, \beta$  у величин  $u, v$  означают дифференцирование по  $x, \beta$ .

Согласно [1] соотношения упругости для оболочки записываются в виде

$$\mathbf{T} = D\mathbf{e},$$

где  $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3, Q_1, Q_2\}^T$  — вектор внутренних усилий, моментов и поперечных сил;  $D$  — матрица упругих жесткостей:

$$D = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = C_{22} = (5/6)Gh,$$

$B_{ij}, K_{ij}, D_{ij}$  — приведенные к срединной поверхности оболочки коэффициенты мембранной и изгибной жесткостей композитной оболочки [1];  $G$  — модуль сдвига;  $h$  — приведенная толщина оболочки.

**Метод решения.** Используя решение [10], запишем выражение для потенциальной энергии конечного элемента оболочки

$$\Pi = W - V,$$

где  $W$  — энергия деформации конечного элемента;  $V$  — работа внешних сил.

Согласно [9]

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} \, ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{T}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{e}_n) \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{e}_l^T D \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T D \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T D \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T D \mathbf{e}_n) \, ds, \end{aligned}$$

$$V = \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{u} \, ds + \int_{l_k} \mathbf{R}_k^T \mathbf{u}_k \, dl_k + \mathbf{R}_l^T \bar{\mathbf{u}}_l, \quad \mathbf{u}_k = \{u, v, w, \theta_1, \theta_2, w_{xy}\}^T.$$

Здесь  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$  — вектор внешней поверхностной нагрузки;  $\mathbf{R}_k = \{P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}\}^T$ ,  $\mathbf{R}_l = \{P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, M_{1l}, M_{2l}, M_{3l}\}^T$  — векторы сил и моментов, распределенных по контуру и сосредоточенных в его точках соответственно;  $l_k$  — отрезки контура, на которых приложены распределенные силы.

Запишем вариационное уравнение Лагранжа для конечного элемента оболочки:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta V = 0$$

( $\delta \Pi$ ,  $\delta W$ ,  $\delta V$  — вариации).

Варьируя потенциальную энергию по узловым перемещениям конечного элемента, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений конечного элемента. С учетом условия совместности узловых перемещений элементов и граничных условий получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений всех конечных элементов оболочки

$$K \mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (2)$$

где  $K$  — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [11];  $\mathbf{Q}$  — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы (2) используем метод Ньютона — Канторовича [7]:

$$H(\mathbf{u}'_n) \Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}, \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta$$

( $H$  — гессиан системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки;  $\mathbf{G}$  — градиент потенциальной энергии деформации).

Критическая нагрузка определяется либо как предельная по расходимости итерационного процесса при значительном увеличении перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, либо как бифуркационная при использовании энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если  $\delta^2 \Pi > 0$ . Форма потери устойчивости оболочки определяется из решения системы  $H \delta = 0$ , где  $\delta$  — вектор бифуркационных узловых перемещений.

**Исследование влияния способа укладки монослоев на устойчивость круговой цилиндрической оболочки.** Рассмотрим консольно закрепленную ( $u = v = w = w_x = 0$ ) круговую цилиндрическую оболочку, выполненную из ПКМ и находящуюся под

действием краевой нагрузки в виде крутящего  $M_k$  и изгибающего  $M$  моментов, приложенных к свободному краю оболочки, а также внутреннего давления  $q = 0,15$  МПа. Нагруженный свободный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие изгибающего момента заменим действием неоднородных по направляющей оболочки осевых усилий  $T_1 = Mz_1/J$  ( $z_1$  — расстояние от точек контура оболочки до горизонтальной оси  $AA$  (см. рис. 1);  $J$  — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси  $AA$ ). Действие крутящего момента  $M_k$  заменим действием однородных по окружности оболочки касательных усилий  $T_3 = M_k/(2\omega)$ , где  $\omega$  — площадь поперечного сечения оболочки, определяемая по ее внутреннему радиусу.

Оболочка, имеющая длину  $L = 2000$  мм, толщину  $h = 3,456$  мм и радиус  $R = 2000$  мм, выполнена из 18-слойного ПКМ Тогауса Т700, механические характеристики монослоя которого приведены в работе [12].

Для разбиения оболочки использовалась конечно-элементная сетка  $m \times n = 15 \times 160$  ( $m$  — число конечных элементов по длине оболочки,  $n$  — число конечных элементов по окружности), что обеспечивало сходимость решения по числу конечных элементов с погрешностью, не превышающей 5 %.

Введены следующие обозначения:  $R_m = k_m/k_{m0} = M^*/M_0^*$ ,  $R_p = k_p/k_{p0} = M_k^*/M_{k0}^*$  — отношения критических изгибающего и крутящего моментов при комбинированном нагружении оболочки к соответствующим критическим нагрузкам при раздельном нагружении;  $k_m = M^*/M_0$ ,  $k_p = M_k^*/M_{k0}$ ,  $k_{m0} = M_0^*/M_0$ ,  $k_{p0} = M_{k0}^*/M_{k0}$  ( $M_0^*$ ,  $M_{k0}^*$  — критические значения изгибающего и крутящего моментов;  $M_0 = \pi ERh^2/\sqrt{3(1-\nu^2)}$ ,  $M_{k0} = 2\pi CR^2S_b$  — верхние критические значения изгибающего и крутящего моментов для круговой цилиндрической изотропной оболочки [13];  $C = 0,953$ ;  $S_b = 0,74(Eh/(1-\nu^2)^{5/8})(h/R)^{5/4}(R/L)^{1/2}$ ).

Рассматривается семь вариантов укладки монослоев по толщине оболочки: 1) 0, 0,  $\pm 45$ , 90, 0; 2) 0, 0,  $\pm 45$ , 90, 0,  $\pm 45$ , 90, 90,  $\pm 45$ , 0, 90,  $\pm 45$ , 0, 0; 3)  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ; 4)  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ , 0, 90, 0, 0, 90, 0,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ; 5)  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ , 0, 90, 0, 0, 90, 0,  $-45$ ,  $45$ ,  $-45$ ,  $45$ ,  $-45$ ,  $45$ ; 6) 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90; 7) 0, 0, 0, 90, 0,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ ,  $\pm 45$ , 0, 90, 0, 0, 0. Кроме того, для сравнения рассматривается вариант оболочки из алюминиевого сплава Д16Т (вариант 8).

Все расчеты проводились при условии пропорционального нагружения, т. е. задавались некоторые значения нагрузок  $M$  и  $M_k$ , определяемые долями верхних критических нагрузок  $M_0$  и  $M_{k0}$ , и для них вычислялись значения параметров критических нагрузок  $k_n = M^*/M = M_k^*/M_k$ ,  $k_m$ ,  $k_p$ .

В табл. 1 представлены варианты комбинированного нагружения оболочки нагрузками  $p_m = M/M_0$  и  $p_k = M_k/M_{k0}$ .

Таблица 1

Варианты комбинированного нагружения оболочки изгибающим  $M$  и крутящим  $M_k$  моментами

Вариант укладки	$p_m$ , %	$p_k$ , %
1	0	100
2	26	97
3	50	87
4	71	71
5	87	50
6	97	26
7	100	0

Таблица 2

Зависимость параметра  $\bar{k}_H$  от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев

Вариант укладки	$\bar{k}_H$													
	$p_m = 0$		$p_m = 26 \%$		$p_m = 50 \%$		$p_m = 71 \%$		$p_m = 87 \%$		$p_m = 97 \%$		$p_m = 100 \%$	
	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС
1	7,3	7,5	5,2	5,2	3,9	3,7	3,0	2,5	2,3	1,9	1,7	1,2	1,3	1,3
2	8,3	8,3	5,8	5,8	4,4	4,3	3,4	3,0	2,6	2,3	2,1	1,5	1,6	1,2
3	7,5	7,7	4,7	4,3	2,9	2,5	1,9	2,1	1,3	2,1	1,3	2,1	1,3	2,0
4	6,5	6,7	4,4	4,1	2,8	2,5	1,9	1,8	1,3	1,9	1,2	1,8	1,2	1,7
5	6,3	6,3	4,2	4,1	2,7	2,3	1,7	1,7	1,2	1,8	1,2	2,0	1,2	1,8
6	8,0	8,0	5,8	6,0	4,6	4,9	3,9	4,2	3,5	3,6	3,0	2,9	2,7	2,3
7	8,9	8,9	6,4	6,2	4,7	4,7	3,6	3,4	2,8	2,4	2,2	1,9	1,7	1,4
8 (металл)	4,5	4,6	3,3	3,0	2,4	2,1	1,8	1,3	1,3	1,0	0,9	1,0	0,9	1,1

Примечание. ЛС — линейное состояние, НС — нелинейное состояние.

В табл. 2 приведены результаты исследования влияния внутреннего давления  $\bar{k}_H = (k_H - k_H^0)/k_H^0$  ( $k_H^0$  — значение параметра  $k_H$  при  $q = 0$ ) на критические значения параметра  $k_H$  для случая линейного и нелинейного состояний в зависимости от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев в обшивке оболочки. Из табл. 2 следует, что величина  $\bar{k}_H$  наиболее существенно зависит как от способа укладки монослоев, так и от значения изгибающего момента  $M$  для вариантов укладки 6, 7, а также для случаев нагружения оболочки преимущественно крутящим моментом ( $p_m < 50 \%$ ). С увеличением параметра  $p_m$  влияние внутреннего давления существенно уменьшается в случае как линейного, так и нелинейного состояния. При наличии внутреннего давления значения параметра  $k_H$  увеличиваются более существенно для композитных оболочек и менее существенно для металлических.

На рис. 2 представлена зависимость параметра  $k_m$  от параметра  $p_k$  для различных вариантов укладки монослоев в оболочке. Из рис. 2 следует, что в случае нелинейности напряженно-деформированного состояния критические значения изгибающего момента  $k_m$  уменьшаются во всем диапазоне значений параметра крутящего момента  $M_k$  для всех вариантов укладки монослоев. Различие линейного и нелинейного решений небольшое, порядка 3–15 %, за исключением вариантов укладки 3, 5, 8 и значения параметра  $p_k < 60 \%$ , при которых это различие достигает 35 %.

На рис. 3 представлена зависимость параметра  $k_p$  от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев в оболочке. Из рис. 3 следует, что в случае нелинейности напряженно-деформированного состояния критические значения поперечной силы  $k_p$  уменьшаются во всем диапазоне значений параметра нагрузки  $p_m$  и для всех вариантов укладки монослоев. Различие линейного и нелинейного решений небольшое, порядка 3–5 %.

На рис. 4 представлены зависимости между параметрами  $R_m$  и  $R_p$  для различных вариантов укладки монослоев в оболочке при линейном и нелинейном напряженно-деформированных состояниях. Видно, что кривые в основном являются выпуклыми. В отдельных случаях для нелинейного состояния форма этих кривых является более сложной в зависимости как от соотношения нагрузок, так и от способа укладки монослоев в оболочке. Так, отдельные участки кривых являются вогнутыми (кривые 1, 5).

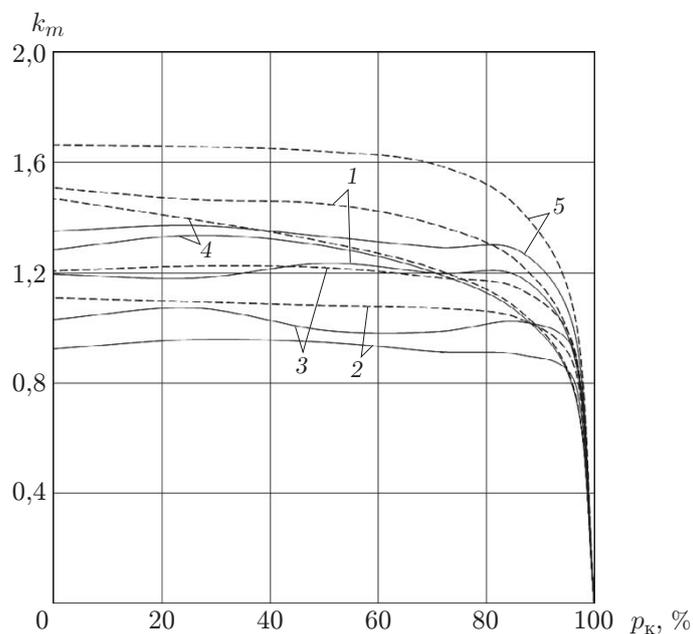


Рис. 2. Зависимость параметра  $k_m$  от параметра  $p_k$  для различных вариантов укладки монослоев:

1 — вариант 1, 2 — вариант 3, 3 — вариант 5, 4 — вариант 6, 5 — вариант 8; сплошные кривые — нелинейное напряженно-деформированное состояние, штриховые — линейное напряженно-деформированное состояние

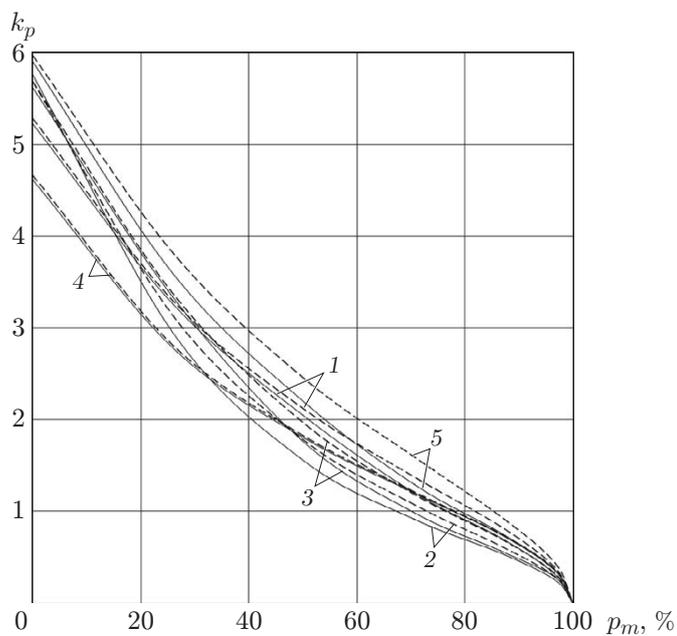


Рис. 3. Зависимость параметра  $k_p$  от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев:

1 — вариант 1, 2 — вариант 3, 3 — вариант 5, 4 — вариант 6, 5 — вариант 8; сплошные кривые — нелинейное напряженно-деформированное состояние, штриховые — линейное напряженно-деформированное состояние

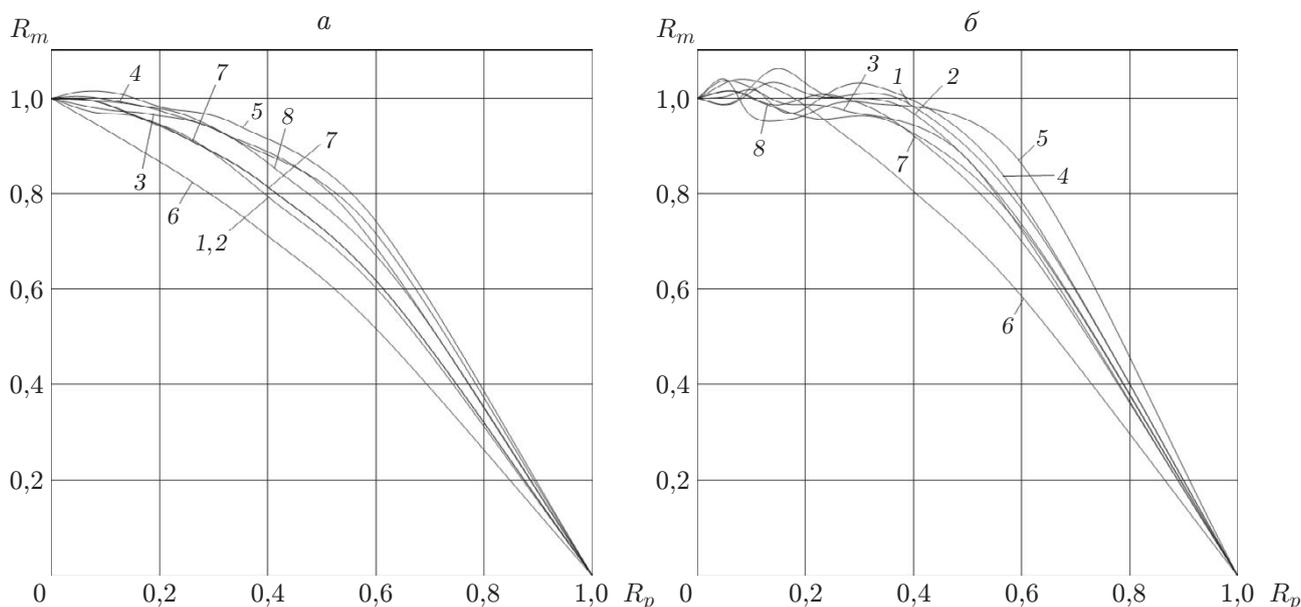


Рис. 4. Зависимость между параметрами  $R_m$  и  $R_p$  для различных вариантов укладки монослоев:

$a$  — линейное состояние,  $b$  — нелинейное состояние; 1–8 — варианты укладки 1–8

Таблица 3

Зависимость параметра  $k_g$  от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев

Вариант укладки	$k_g$													
	$p_m = 0$		$p_m = 26 \%$		$p_m = 50 \%$		$p_m = 71 \%$		$p_m = 87 \%$		$p_m = 97 \%$		$p_m = 100 \%$	
	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС	ЛС	НС
1	1,58	1,58	1,54	1,62	1,54	1,66	1,54	1,66	1,58	1,66	1,58	1,54	1,62	1,59
2	1,58	1,58	1,54	1,62	1,54	1,70	1,58	1,75	1,62	1,79	1,66	1,62	1,66	1,66
3	1,70	1,75	1,47	1,47	1,30	1,27	1,21	1,27	1,18	1,28	1,19	1,25	1,20	1,23
4	1,66	1,70	1,54	1,58	1,40	1,47	1,33	1,37	1,32	1,39	1,32	1,33	1,32	1,35
5	1,70	1,70	1,58	1,66	1,43	1,43	1,33	1,37	1,33	1,33	1,32	1,40	1,30	1,37
6	1,40	1,40	1,32	1,39	1,33	1,47	1,37	1,66	1,43	1,75	1,51	1,75	1,58	1,70
7	1,54	1,54	1,51	1,58	1,51	1,66	1,51	1,79	1,54	1,70	1,58	1,70	1,58	1,70

Примечание. ЛС — линейное состояние, НС — нелинейное состояние.

На рис. 5 представлены зависимости параметров  $k_m$  и  $k_p$  для различных вариантов укладки монослоев в оболочке от величины нагрузки крутящим моментом  $p_k$  (для  $k_m$ ) и изгибающим моментом  $p_m$  (для  $k_p$ ) в случае линейного и нелинейного напряженно-деформированных состояний. Из рис. 5 следует, что наиболее эффективными вариантами укладки монослоев являются варианты 1, 2, наименее эффективными — варианты 3, 5. Кривые, соответствующие линейному и нелинейному состояниям, имеют один и тот же характер.

В табл. 3 показана весовая эффективность композитных оболочек по отношению к металлическим, определяемая по формуле  $k_g = k_{нэ}/[k_{нэ}(g/g_э)]$  ( $g$  — вес рассчитанной оболочки;  $k_{нэ}$ ,  $g_э$  — параметр критической нагрузки и вес эталонной (металлической) оболочки), для линейного и нелинейного состояний в зависимости от параметра  $p_m$  для различных вариантов укладки монослоев в обшивке. Из табл. 3 следует, что весовая эффективность композитных оболочек существенно зависит как от способа укладки монослоев, так и от

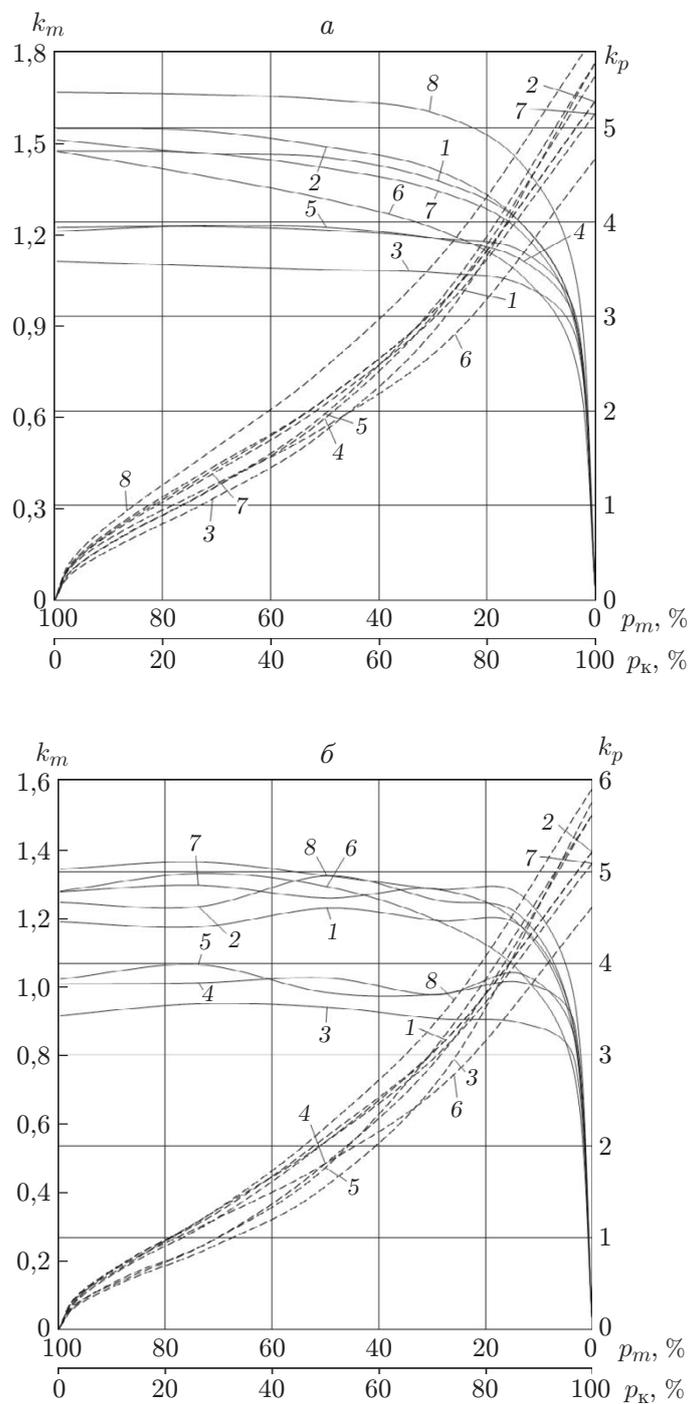


Рис. 5. Зависимости  $k_m(p_k)$  (сплошные линии) и  $k_p(p_m)$  (штриховые линии) для различных вариантов укладки монослоев:  
 а — линейное состояние, б — нелинейное состояние; 1–8 — варианты укладки 1–8

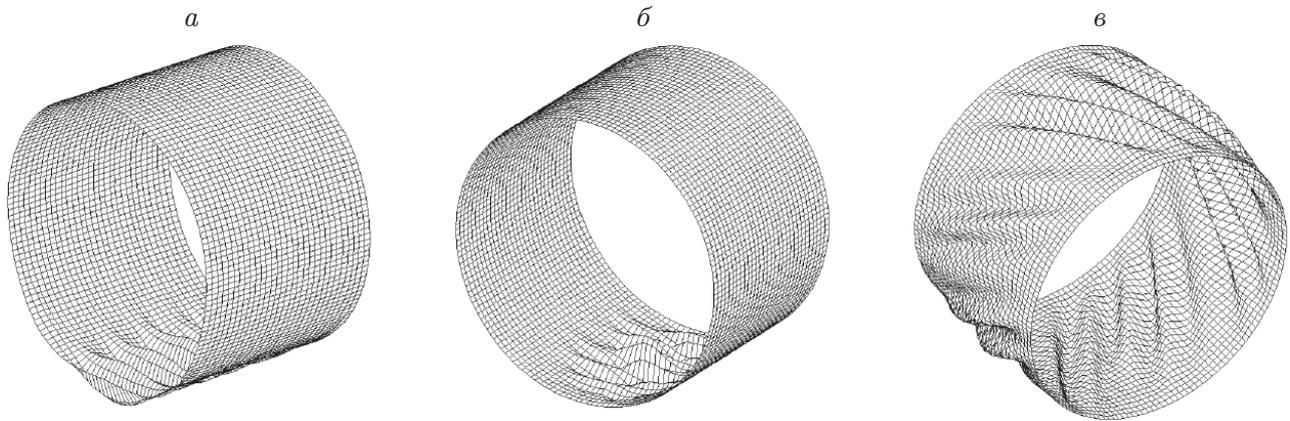


Рис. 6. Формы потери устойчивости при различных соотношениях параметров нагружения:

$a$  —  $M = M_0$ ,  $б$  —  $M = 0,71M_0$ ,  $M_k = 0,71M_{k0}$ ,  $в$  —  $M_k = M_{k0}$

соотношения внешних нагрузок, изгибающего и крутящего моментов. Наиболее эффективными являются варианты 1, 2, 7 укладки монослоев практически при любых значениях изгибающего и крутящего моментов. Весовая эффективность композитной оболочки может на 60 % превышать весовую эффективность металлической оболочки. Нелинейность в основном увеличивает весовую эффективность (для вариантов 6, 7 — на 20 %). В случае действия преимущественно крутящего момента ( $p_m < 25$  %) влияние нелинейности на весовую эффективность оболочек незначительно.

На рис. 6 приведены формы потери устойчивости композитной оболочки для варианта укладки 3 при различных соотношениях параметров нагрузок  $M$  и  $M_k$ . Как правило, оболочки теряют устойчивость либо под действием максимальных сжимающих усилий в случае приложения изгибающего момента (потеря устойчивости в форме локальных вмятин в нижней части оболочки), либо под действием максимальных касательных сил в случае приложения крутящего момента (потеря устойчивости в форме наклонных продольных волн на всей поверхности оболочки). При комбинированном нагружении оболочка в основном теряет устойчивость под действием максимальных сжимающих усилий (потеря устойчивости в форме продольных наклонных складок) (см. рис. 6, б).

**Выводы.** Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Наиболее эффективными вариантами укладки монослоев являются варианты 1, 2, 7, поскольку для этих вариантов слои с направлением укладки  $0^\circ$  расположены на поверхности оболочки, т. е. в областях, где действуют максимальные продольные изгибные напряжения (так называемый краевой эффект). Так, для этих вариантов значение цилиндрической жесткости оболочки находится в диапазоне  $25 \div 30$  кН·мм, в то время как для других вариантов укладки — в диапазоне  $14 \div 15$  кН·мм.

При наличии внутреннего давления критические значения параметра нагрузки существенно (в восемь раз) увеличиваются в случае как линейного, так и нелинейного напряженно-деформированного состояния в зависимости от варианта укладки монослоев и соотношения внешних нагрузок.

Весовая эффективность композитных оболочек зависит как от способа укладки монослоев, так и от соотношения внешних нагрузок, изгибающего и крутящего моментов. Практически при любых соотношениях внешних нагрузок наиболее эффективными являются варианты 1, 2 укладки монослоев.

Весовая эффективность композитных оболочек может на 60 % превышать весовую эффективность металлической оболочки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
2. **Vasiliev V. V.** Advanced mechanics of composite materials and structures / V. V. Vasiliev, E. V. Morozov. Amsterdam: Elsevier, 2018.
3. **Ванин Г. А.** Устойчивость оболочек из армированных материалов / Г. А. Ванин, Н. П. Семенов, Р. Ф. Емельянов. Киев: Наук. думка, 1978.
4. **Алфутов Н. А.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. М.: Машиностроение, 1984.
5. **Бакулин В. Н.** Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов / В. Н. Бакулин, Е. Л. Гусев, В. Г. Марков. М.: Физматлит, 2008.
6. **Кармишин А. В.** Статика и динамика оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975.
7. **Канторович Л. В.** Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Физматгиз, 1959.
8. **Свидетельство** о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2013615613 РФ. Комплекс программ для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек / Л. П. Железнов. Зарегистрировано в реестре Роспатента 17.06.2013.
9. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
10. **Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2014. № 6. С. 23–30.
11. **Постнов В. А.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. Л.: Судостроение, 1974.
12. **Белов В. К., Железнов Л. П., Огнянова Т. С.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитного отсека фюзеляжа перспективного самолета при чистом изгибе // Авиац. техника. 2017. № 4. С. 8–40.
13. **Кабанов В. В.** Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982.

*Поступила в редакцию 27/IV 2022 г.,  
после доработки — 27/VII 2022 г.  
Принята к публикации 29/VIII 2022 г.*