УДК 539.3

СТРУКТУРА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ АРМИРОВАННЫХ ЖЕСТКИМИ ВОЛОКНАМИ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Р. А. Каюмов, И. Г. Терегулов

Казанская государственная архитектурно-строительная академия, 420043 Казань
E-mails: kayumov@rambler.ru, teregulov@ksaba.ru

Рассмотрена задача упрощения соотношений нелинейной теории наследственной упругости для сильно анизотропных материалов типа армированных волокнами композитов. Для этого используется такое их свойство, как большая жесткость материала вдоль армирования и малая — в поперечном направлении. Материал считается трансверсально-изотропным. Упрощение проводится на основе анализа асимптотических представлений соотношений ползучести. Получены соотношения различной степени точности для разных типов композитов и напряженных состояний.

Ключевые слова: наследственная упругость, нелинейность, волокнистый композит, трансверсальная изотропия, асимптотический анализ.

Существует два основных метода установления определяющих соотношений для композиционных материалов (КМ). Согласно первому механические свойства КМ могут быть определены экспериментально на образцах, материал которых считается однородным и анизотропным (феноменологический подход). Но при этом требуется большое количество экспериментов, поскольку свойства материала зависят не только от физико-механических характеристик фаз композита, но также от его структуры и технологии изготовления. В структурном подходе механические характеристики КМ определяют по известным свойствам исходных компонентов. Недостаток этого метода в том, что в композиции материалы часто ведут себя совершенно иначе, чем при независимых испытаниях. Однако при использовании и первого, и второго подхода встает задача выбора такой структуры определяющих соотношений, которая приводила бы к уменьшению необходимого объема экспериментальной информации.

Соотношения нелинейной упругости для КМ исследованы в ряде работ (см., например, [1–9]). В настоящей работе рассматривается проблема упрощения структуры определяющих соотношений нелинейной теории наследственной упругости трансверсально-изотропных материалов типа стекло-, органо- и углепластиков. Развивается методика упрощения, предложенная в [10–13] для случая нелинейной упругости, а в [14] — для тонких оболочек в случае нелинейной вязкоупругости. Однако для КМ в составе оболочек средней толщины и толстых оболочек метод, изложенный в [14], не позволяет получить простые определяющие соотношения. Ниже приводится модификация этого подхода.

1. Армированные волокнами материалы можно считать ортотропными, поэтому систему координат будем связывать с осями ортотропии, располагая ось Ox^1 вдоль основного армирования жесткими волокнами, а оси Ox^2, Ox^3 — поперек этого направления. Для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-0076).

удобства записи и анализа определяющих соотношений далее будем использовать следующие обозначения для компонент тензоров напряжений (σ) и малых деформаций (ε):

$$\begin{aligned} &\tau^1 = \sigma^{11}, \quad \tau^2 = \sigma^{22}, \quad \tau^3 = \sigma^{33}, \quad \tau^4 = \sigma^{23}, \quad \tau^5 = \sigma^{13}, \quad \tau^6 = \sigma^{12}, \\ &e_1 = \varepsilon_{11}, \quad e_2 = \varepsilon_{22}, \quad e_3 = \varepsilon_{33}, \quad e_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad e_5 = 2\varepsilon_{13}, \quad e_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \tag{1.1}$$

(τ^i, e_i — компоненты векторов, составленных из компонент тензоров напряжений и деформаций).

В теории наследственной упругости связь статических и кинематических характеристик можно представить в виде

$$e_i = A_{ij}(S^1, S^2, \dots)\tau^j + \int\limits_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau^i}\, d\theta, \qquad H = H(t-\theta, S^1, \dots). \tag{1.2}$$

Здесь H — потенциал ползучести; S^i — инварианты, полученные сверткой тензора напряжений с тензорами, описывающими механические свойства материала.

Требования простоты и удобства применения определяющих соотношений при отыскании материальных функций и констант по экспериментальным данным, а также при решении задач расчета элементов конструкций делают актуальной проблему анализа соотношений (1.2) с целью уменьшения размерности функций A_{ij} и H. Его можно провести, используя свойство сильной анизотропии армированных волокнами композитов.

Рассмотрим нагружение образца постоянными во времени напряжениями $\tau^i = \tau^i_0 = \mathrm{const}^i$. Сделаем замену переменной $\theta_1 = t - \theta$. После этого продифференцируем соотношения (1.2) по времени t. В результате получим (точкой над переменной обозначаем производную по t, верхним индексом c — деформацию ползучести):

$$\dot e_i = \dot e_i^c = \frac{\partial H(t, S^1, S^2, \dots)}{\partial \tau^i}\Big|_{\tau^i = \tau^i_0}. \tag{1.3}$$

Наряду с напряженным состоянием τ^i_0 рассмотрим состояние $\tau^i_0 + d\tau^i$. Тогда скорости $\dot e_i^c$ изменятся на величину

$$d\dot e_i^c = B_{ik}\, d\tau^k, \qquad B_{ik} = \frac{\partial^2 H}{\partial \tau^i\, \partial \tau^k}. \tag{1.4}$$

Известно, что в одномерном напряженном состоянии увеличение напряжения ведет к росту скорости ползучести. Обобщение этого факта на пространственный случай запишем в виде

$$d\tau^i\, d\dot e_i^c > 0. \tag{1.5}$$

Условие (1.5) можно трактовать как условие устойчивости материала.

Диагональные элементы матрицы $\|B\|$ имеют физический смысл и характеризуют вязкость материала при простых напряженных состояниях: B_{11} — при растяжении или сжатии вдоль волокон, B_{22}, B_{33} — поперек волокон, B_{44} — при сдвиге в плоскости, перпендикулярной направлению армирования, и т. д.

Для анализа структуры потенциала H будем использовать особенность армированного волокнами материала — малую податливость деформациям ползучести в направлении армирования по сравнению с податливостями деформациям поперек волокон и сдвигу. Аналогичное предположение будем делать и относительно приращений $d\dot e_i^c$ и $d\tau^i$. Это означает, что

$$B_{11} \ll B_{22}, B_{33}, B_{44}, B_{55}, B_{66}. \tag{1.6}$$

Однако использование особенности армированного материала только в виде (1.6) не позволяет существенно уменьшить число аргументов функции H. Поэтому сузим класс рассматриваемых КМ и выяснение структуры потенциала H проведем для армированных материалов типа жгута, ленты, которые могут считаться трансверсально-изотропными в сечении, перпендикулярном армированию.

2. Для рассматриваемого материала потенциал H, а значит, и матрица Гессе $\|B\|$ должны зависеть от инвариантов, не зависящих от преобразований вращения около оси Ox^1 и зеркальных отображений в плоскости x^2x^3. В качестве таковых можно выбрать следующие [12, 13, 15, 16]:

$$\begin{gathered} S_1 = \tau^1, \qquad S_2 = \tau^2 + \tau^3, \qquad S_3 = (\tau^5)^2 + (\tau^6)^2, \\ S_4 = (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 + 2(\tau^4)^2, \qquad S_5 = 2\tau^4\tau^5\tau^6 + \tau^2(\tau^6)^2 + \tau^3(\tau^5)^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Таким образом, число аргументов функции H равно шести:

$$H = H(t, S_1, S_2, \ldots, S_5). \tag{2.2}$$

Далее на основе предположений (1.6) введем малые параметры, характеризующие соотношения податливостей деформациям ползучести материала при различных простых нагружениях:

$$\eta^2 \approx \frac{B_{11}}{B_{22}} = \frac{B_{11}}{B_{33}} \ll 1, \qquad \xi^2 \approx \frac{B_{22}}{B_{44}} < 1, \qquad \gamma^2 \approx \frac{B_{44}}{B_{55}} = \frac{B_{44}}{B_{66}} < 1. \tag{2.3}$$

Случай $B_{66} = B_{55} < B_{44}$ принципиально не отличается от рассматриваемого. Выкладки будут аналогичны нижеизложенным, если вместо (1.1) ввести обозначения

$$e_4 = 2e_{13}, \quad e_5 = 2e_{12}, \quad e_6 = 2e_{23}, \quad \tau^4 = \sigma^{13}, \quad \tau^5 = \sigma^{12}, \quad \tau^6 = \sigma^{23}$$

(здесь и далее индекс c опущен для простоты записи).

Наряду с введенными обозначениями для простоты записи будем использовать и матрично-векторную символику, опуская индексы и понимая под τ, e векторы с компонентами (1.1), под B — матрицу $\|B\|$.

Соотношения (1.4) можно записать в виде

$$d\tau = B^{-1}\, d\dot{e} = D\, d\dot{e}. \tag{2.4}$$

Анализ (2.4) при предположении малой податливости деформациям ползучести вдоль армирования позволяет заключить, что диагональные элементы матрицы D также имеют разный порядок, а именно:

$$\frac{D^{22}}{D^{11}} = \frac{D^{33}}{D^{11}} \approx \eta^2 \ll 1, \qquad \frac{D^{44}}{D^{22}} \approx \xi^2 < 1, \qquad \frac{D^{55}}{D^{44}} = \frac{D^{66}}{D^{44}} \approx \gamma^2 < 1. \tag{2.5}$$

Из условий устойчивости материала (1.5) и предположений (2.5) следует, что элементы симметрической матрицы D имеют разный порядок малости относительно D^{11}, и их можно оценить соотношением

$$D \approx D^{11} \begin{vmatrix} 1 & \eta^m & \eta^m & \eta^p\xi^q & \eta^r\xi^s\gamma^b & \eta^z\xi^t\gamma^h \\ \ldots & \eta^2 & \eta^2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \eta^2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \eta^2\xi^2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \eta^2\xi^2\gamma^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \eta^2\xi^2\gamma^2 \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Здесь $m, p, q, r, s, b, z, t, h \geqslant 1$.

Из (2.6) следует, что зависимости (2.4) можно заменить приближенными соотношениями различного порядка точности. Далее рассмотрим три варианта упрощенных соотношений. В первом, отбрасывая величины порядка $O(\eta^m)$ по сравнению с единицей, получим

$$d\tau^1 \approx D^{11}\, d\dot{e}_1, \qquad \text{или} \quad d\dot{e}_1 = (D^{11})^{-1}\, d\tau^1 = C_{11}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5)\, d\tau^1. \tag{2.7}$$

Поскольку $d\dot{e}_1$ есть полный дифференциал, скорость деформации $\dot{e}_1$ должна зависеть только от τ^1. Учитывая выражения для инвариантов (2.1), получим, что $\dot{e}_1$ зависит лишь от двух аргументов:

$$\dot{e}_1 = \varphi_1(t, S_1) = \varphi_1(t, \tau^1). \tag{2.8}$$

Как видно из (2.8), $\varphi_1(t, \tau^1)$ можно легко найти на основе анализа данных экспериментов о простом растяжении КМ при разных уровнях нагрузки, аппроксимируя ее по какой-либо системе функций от времени и напряжения τ^1. При определении коэффициентов аппроксимации необходимо обеспечить выполнение условия устойчивости материала (1.5). Этого можно добиться двумя путями: или специальным подбором базовых функций, или использованием методов математического программирования при минимизации невязки расчетных и экспериментальных значений деформаций при ограничениях (1.5).

Структуру функции $\varphi_1(t, \tau^1)$ можно принять, например, в виде обобщения соотношений известных линейных ядер ползучести. В частности, ползучесть многих материалов, как отмечается в [17], хорошо описывается ядром Абеля. Тогда в линейном случае в одномерных задачах на растяжение-сжатие соотношение (2.8) примет вид

$$\dot{e}_1 = C(t - \theta)^{\beta}, \qquad -1 < \beta < 0, \quad C > 0. \tag{2.9}$$

Для нелинейного случая можно, например, принять, что $\varphi_1(t, \tau^1)$ имеет такую же структуру, но коэффициенты считать зависящими от τ^1, в частности в виде:

$$C = (C_0 + C_1\tau^1 + C_2(\tau^1)^2 + \ldots)^{2n}; \tag{2.10}$$

$$\beta = -1/(1 + (\beta_0 + \beta_1\tau^1 + \beta_2(\tau^1)^2 + \ldots)^{2m})^p. \tag{2.11}$$

Такая форма представления C и β обеспечивает выполнение условий (2.9). Для удовлетворения условий (1.5) приходится записывать их в некотором рабочем диапазоне изменения напряжения τ^1 и использовать в качестве ограничений при подборе искомых коэффициентов методами математического программирования. Этот подход позволил в работе [18] (было принято $n = 1$, $m = 1$, $p = 0{,}5$) достаточно хорошо описать нелинейную ползучесть при многоступенчатом нагружении органопластиковых цилиндрических оболочек, образованных намоткой композитных жгутов. Аналогичным образом можно обобщить и другие соотношения линейной теории наследственности, считая параметры используемых ядер ползучести функциями напряжений.

Для выявления структуры скоростей деформаций $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$ оставим в соотношениях (2.4) для $d\tau^2$, $d\tau^3$ по три первых слагаемых. С учетом (2.6) можно записать

$$\begin{aligned} d\tau^2 &\approx (\tilde{D}^{21}\eta^m\, d\dot{e}_1 + \tilde{D}^{22}\eta^2\, d\dot{e}_2 + \tilde{D}^{23}\eta^2\, d\dot{e}_3)D^{11}, \\ d\tau^3 &\approx (\tilde{D}^{31}\eta^m\, d\dot{e}_1 + \tilde{D}^{32}\eta^2\, d\dot{e}_2 + \tilde{D}^{33}\eta^2\, d\dot{e}_3)D^{11}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь $\tilde{D}^{ij} = D^{ij}/D^{11}$, и можно сделать предположение, что $m > 2$. Действительно, с физической точки зрения изменение скорости ползучести $d\dot{e}_2$ в направлении поперек волокон должно вызывать большее изменение напряжения $d\tau^2$, чем такое же изменение $d\dot{e}_1$ в продольном направлении. Это подтверждается и следующими выкладками.

Разрешим уравнения (2.7), (2.12) относительно $d\dot e_2$, $d\dot e_3$:
$$d\dot e_2 = d\tau^1 B_{21}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5) + d\tau^2 B_{22}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5) + d\tau^3 B_{23}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5),$$
$$d\dot e_3 = d\tau^1 B_{31}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5) + d\tau^2 B_{32}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5) + d\tau^3 B_{33}(t, S_1, S_2, \ldots, S_5). \qquad (2.13)$$
Согласно соотношениям (1.3) должно выполняться условие
$$\frac{\partial \dot e_i}{\partial \tau_k} = \frac{\partial \dot e_k}{\partial \tau_i}. \qquad (2.14)$$
Поскольку $\dot e_1$ не зависит от τ^2, τ^3, из (2.14) следует, что
$$B_{21} = 0, \qquad B_{31} = 0. \qquad (2.15)$$
Разрешая теперь систему (2.13) относительно приращений напряжений, получаем, что они зависят только от de^2, de^3. Следовательно, в выражениях (2.12) первые слагаемые в силу принятых допущений не должны учитываться. Это означает либо малость функций $\tilde D^{21}$, $\tilde D^{31}$, либо малость множителей η^m. Поскольку они входят сомножителями, будем считать, что $\eta^m \ll \eta^2$, т. е. $m > 2$.

Анализ соотношений (2.13) позволяет также видеть, что согласно (2.14) с учетом принятых допущений параметры $\dot e_2$, $\dot e_3$ не должны зависеть от τ^4, τ^5, τ^6. В свою очередь, $\dot e_4, \dot e_5, \dot e_6$ не должны зависеть от τ^1, τ^2, τ^3.

Для дальнейшей конкретизации определяющих соотношений учтем, что $\dot e_i$ выражаются через потенциал H, который является функцией инвариантов (2.1). Тогда выражения для $\dot e_i$ можно записать в следующем виде:
$$\dot e_1 = \frac{\partial H}{\partial \tau^1} = \frac{\partial H}{\partial S_1}; \qquad (2.16)$$
$$\dot e_2 = \frac{\partial H}{\partial \tau^2} = \frac{\partial H}{\partial S_2} + \frac{\partial H}{\partial S_4}\, 2\tau^2 + \frac{\partial H}{\partial S_5}\, (\tau^6)^2; \qquad (2.17)$$
$$\dot e_3 = \frac{\partial H}{\partial \tau^3} = \frac{\partial H}{\partial S_2} + \frac{\partial H}{\partial S_4}\, 2\tau^3 + \frac{\partial H}{\partial S_5}\, (\tau^5)^2; \qquad (2.18)$$
$$\dot e_4 = \frac{\partial H}{\partial S_4}\, 4\tau^4 + \frac{\partial H}{\partial S_5}\, 2\tau^5\tau^6; \qquad (2.19)$$
$$\dot e_5 = \frac{\partial H}{\partial S_3}\, 2\tau^5 + \frac{\partial H}{\partial S_5}\, 2(\tau^3\tau^5 + \tau^4\tau^6); \qquad (2.20)$$
$$\dot e_6 = \frac{\partial H}{\partial S_3}\, 2\tau^6 + \frac{\partial H}{\partial S_5}\, 2(\tau^2\tau^6 + \tau^4\tau^5). \qquad (2.21)$$
Поскольку $\dot e_2$, $\dot e_3$ не зависят от τ^5, τ^6, а $\dot e_5$, $\dot e_6$ — от τ^2, τ^3, из (2.16)–(2.21) следует, что $\partial H/\partial S_5 = 0$.

Далее, вычтем (2.18) из (2.17):
$$\dot e_2 - \dot e_3 = \frac{\partial H}{\partial S_4}\, 2(\tau^2 - \tau^3). \qquad (2.22)$$
Поскольку $\dot e_2$, $\dot e_3$ не зависят от τ^4, а $\dot e_4$ — от τ^2, τ^3, из сравнения (2.22), (2.19) следует, что $\partial H/\partial S_4$ не зависит от τ^i. Обозначим
$$\frac{\partial H}{\partial S_4} = H_{44}(t). \qquad (2.23)$$

Тогда из соотношений (2.14) следует, что $\dot{e}_5$, $\dot{e}_6$ не должны зависеть не только от τ_1, τ_2, τ_3, но и от τ_4. Это значит, что $\partial H/\partial S_3$ не зависит от S_1, S_2, S_4. С учетом изложенного получим, что H можно представить в виде

$$H = H_1(t,\tau^1) + H_2(t,S_2) + H_{44}(t)(\tau^4)^2 + H_3(t,S_3). \tag{2.24}$$

Таким образом, в простейшем случае потенциал H для трансверсально-изотропного материала содержит вместо функции шести аргументов три функции двух аргументов и одну функцию одного аргумента. Функции H_2, H_{44}, H_3 можно определить из простых экспериментов на растяжение-сжатие поперек армирования и сдвиги в плоскостях (x^1,x^2), (x^2,x^3). Если ввиду технических трудностей проведение таких испытаний затруднено, то прибегают к методам определения этих функций на основе решения некоторых обратных задач механики конструкций (так называемым методам идентификации).

Конкретный вид функций H_1, H_2, H_3 можно выбрать аналогично тому, как это было сделано относительно функции φ_1 в формуле (2.8), например обобщая соотношения линейной теории наследственности. В частности, если исходным ядром ползучести служит ядро Абеля, то их можно представить в следующем виде:

$$H_1 = \int (C_{10} + C_{11}\tau^1 + C_{12}(\tau^1)^2 + \dots)^{2n_1} t^{-1/(1+(\beta_{10}+\beta_{11}\tau^1+\dots)^{2m_1})^{p_1}}\, d\tau^1; \tag{2.25}$$

$$H_2 = \int (C_{20} + C_{21}S_2 + C_{22}(S_2)^2 + \dots)^{2n_2} t^{-1/(1+(\beta_{20}+\beta_{21}S_2+\dots)^{2m_2})^{p_2}}\, dS_2; \tag{2.26}$$

$$H_3 = \int (C_{30} + C_{31}S_3 + C_{32}(S_3)^2 + \dots)^{2n_3} t^{-1/(1+(\beta_{30}+\beta_{31}S_3+\dots)^{2m_3})^{p_3}}\, dS_3.$$

Напомним, что при определении C_{ij}, β_{ij} необходимо обеспечить выполнение условий (1.5) в рабочем диапазоне изменения напряжений.

Далее рассмотрим второй вариант соотношений нелинейной наследственности, которые можно назвать уточненными. Если в соотношениях (2.4) для $d\tau^1$, $d\tau^2$, $d\tau^3$ сохранить по три первых слагаемых и провести анализ, аналогичный изложенному выше, то уточненный вид потенциала H можно представить так:

$$H = H_1(t,\tau^1,S_2) + H_{44}(t)(\tau^4)^2 + H_3(t,S_3). \tag{2.27}$$

В этом случае для определения H_1 необходимо провести эксперимент на двухосное напряженное состояние при различных уровнях нагрузки.

Уменьшив точность представления приращений линейных скоростей деформаций $d\dot{e}_i$ в (2.4), можно представить H_1 в виде суммы функций не трех, а двух аргументов, получив нечто среднее между простейшим представлением H в виде (2.24) и уточненным — в виде (2.27). Для этого будем считать, что в соотношениях (2.4) функции D^{12}, D^{13} равны своим некоторым осредненным значениям, т. е., как и в линейной теории наследственности, они не зависят от S_1, S_2. Основанием для такого упрощения может служить то, что D_{12}, D_{13}, D_{23} малы по сравнению с D_{11}. Тогда с учетом свойств трансверсальной изотропии получим, что

$$H_1 = H_{11}(t,\tau^1) + H_{12}(t)\tau^1 S_2 + H_{22}(t,S_2). \tag{2.28}$$

Конкретный вид функций H_{11}, H_{22} для идентификации их из эксперимента можно принять, например, в виде (2.25), (2.26) соответственно.

У полученных соотношений (2.24), (2.27) имеется один недостаток: из анализа определяющих соотношений следует, что с некоторой степенью точности в плоскости изотропии скорость деформации сдвига линейно зависит от касательных напряжений. Однако если волокна тонкие и жесткие, а их объемная доля не очень велика, то деформация композита будет определяться в основном свойствами матрицы. Поскольку в большинстве случаев матрицу можно считать изотропной, при растяжении-сжатии и сдвиге в плоскости изотропии, как и в случае нелинейной упругости, уровень нелинейности, скорее всего, будет одинаковым. Поэтому получим учитывающие этот факт определяющие соотношения, которые назовем третьим вариантом упрощенных соотношений ползучести. Для этого в выражениях (2.4) оставим для $d\tau^1$ только первое слагаемое, а для $d\tau^2$, $d\tau^3$ будем сохранять не по три, а по четыре слагаемых. Тогда, подобно тому как это было сделано выше, придем к следующему выражению:

$$H = H_1(t, \tau^1) + H_{24}(t, S_2, S_4) + H_3(t, S_3). \qquad (2.29)$$

Определение функции $H_{24}(t, S_2, S_4)$ из эксперимента представляет собой непростую задачу. Успешность ее решения, с одной стороны, зависит от удачного выбора формы H_{24}. С другой стороны, сложность задачи заключается и в том, что должно быть обеспечено выполнение условий (1.5) в рабочем диапазоне изменения параметров S_2, S_3, S_4. Поскольку теперь необходимо записать эти условия при разных комбинациях трех переменных, число ограничений в задаче математического программирования значительно возрастает. Чтобы облегчить решение этой задачи, можно, как это было сделано в работе [19], при определении структуры жесткостных характеристик нелинейно-упругого трансверсально-изотропного материала в плоскости изотропии использовать определяющие соотношения для изотропного материала с учетом малости продольных (вдоль армирования) деформаций. Здесь предположим, что при отсутствии напряжений τ^1 соотношения наследственной теории в плоскости изотропии должны быть аналогичны соотношениям для изотропного материала. Тогда соотношения (2.29) можно представить в следующем упрощенном виде:

$$H = H_1(t, \tau^1) + H_0(t, \sigma_i),$$

где σ_i — интенсивность напряжений при $\tau^1 = 0$. Для нашего случая она имеет вид

$$\sigma_i^2 = (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 - (\tau^2\tau^3) + 3(\tau^4)^2 + 3(\tau^5)^2 + 3(\tau^6)^2 = 0{,}5(3S_4 - S_2^2 + 6S_3).$$

Теперь функцию $H_0(t, \sigma_i)$ можно принять, например, в виде, аналогичном (2.25), т. е. вместо аргумента τ^1 поставить σ_i. Выполнение условия (1.5) также сильно упрощается, так как оно сводится к условию $\partial^2 H_0/\partial\sigma_i\,\partial\sigma_i > 0$.

Аналогично предыдущему случаю соотношения (2.29) можно уточнить, добавив в них еще одну функцию одной переменной, соответствующую линейной наследственности и позволяющую учесть влияние τ^2, τ^3 на $\dot{e}_1$. В этом случае H принимает вид

$$H = H_1(t, \tau^1) + H_{12}(t)\tau^1 S_2 + H_{24}(t, S_2, S_4) + H_3(t, S_3). \qquad (2.30)$$

Как видно из (2.29), (2.30), в этом случае учитывается влияние касательных напряжений на скорости линейных деформаций в плоскости изотропии.

Полученные соотношения можно использовать при анализе оболочек и средней толщины, принимая гипотезу $\sigma^{33} = \tau^3 = 0$. В этом случае $\dot{e}_3 \neq 0$, однако вклад в энергию этой скорости деформации будет равен нулю, и знать зависимость ее от напряжений нет необходимости.

Таким образом, учет особенности поведения волокнистых композитов позволяет упростить и получить непротиворечивые формы нелинейных соотношений теории наследственной упругости для армированных волокнами материалов. Погрешности предложенных упрощенных определяющих соотношений, например предположений о независимости скоростей линейных деформаций от касательных напряжений в виде (2.8), (2.24), безусловно, могут быть оценены для конкретных материалов только на основе экспериментальных исследований композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.** Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 19. С. 78–147.
2. **Механика** композитных материалов и элементов конструкций / Под ред. Л. П. Хорошуна. Киев: Наук. думка, 1982. Т. 1. Механика материалов.
3. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
4. **Тетерс Г. А., Крегерс А. Ф.** Проблемы нелинейной механики композитов // Механика композит. материалов. 1993. Т. 29, № 1. С. 50–60.
5. **Бахвалов Н. С.** Определение эффективных характеристик нелинейной упругой периодической среды в случае малых деформаций // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы 7-й Всесоюз. конф., Миасс, 1–3 июля 1981 г. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1982. С. 3–7.
6. **Резцов М. В.** Осредненный оператор для нелинейно упругой каркасной конструкции // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1983. № 2. С. 74–77.
7. **Хорошун Л. П., Георгиевский В. П., Шикула Е. Н.** Прогнозирование нелинейных деформативных свойств волокнистых металлокомпозитов // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 9. С. 45–51.
8. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Эффективные характеристики упругих физически нелинейных композитов // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 1. С. 12–16.
9. **Образцов И. Ф., Васильев В. В.** Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов // Механика композит. материалов. 1982. № 3. С. 390–393.
10. **Терегулов И. Г.** Определяющие соотношения для анизотропных и волокнисто композитных оболочек при конечных деформациях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 3. С. 167–173.
11. **Терегулов И. Г.** Асимптотический анализ и классификация определяющих соотношений для волокнисто композитных и анизотропных оболочек при конечных и неупругих деформациях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 6. С. 1333–1336.
12. **Терегулов И. Г.** Определяющие соотношения и математические модели среды для нетонких анизотропных и волокнисто композитных оболочек при конечных деформациях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 6. С. 163–168.
13. **Каюмов Р. А.** Структура нелинейно-упругих соотношений для сильно анизотропного слоя нетонкой оболочки // Механика композит. материалов. 1999. Т. 35, № 5. С. 615–628.
14. **Терегулов И. Г., Каюмов Р. А., Сафиуллин Д. Х.** Моделирование работы оболочек из нелинейно вязкоупругого композитного материала // Тр. Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 1994. Т. 3. С. 227–235.
15. **Спенсер Э.** Теория инвариантов. М.: Мир, 1974.
16. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
17. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
18. **Алексеев К. П., Каюмов Р. А., Мухамедова И. З., Терегулов И. Г.** Экспериментальное исследование ползучести композиционных материалов на трубчатых образцах из органопластика // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т. 10, № 2. С. 199–210.
19. **Каюмов Р. А., Гусев С. В., Нежданов Р. О.** Прямые и обратные задачи расчета слоистых оболочечных конструкций. Казань: Изд-во Казан. гос. энерг. ун-та, 2004.

Поступила в редакцию 26/XI 2003 г.,
в окончательном варианте — 1/IX 2004 г.