УДК 519.245

Выбор аппроксимационных базисов, используемых в компьютерных функциональных алгоритмах приближения вероятностных плотностей по заданной выборке*

А.В. Войтишек[1], Н.Х. Шлымбетов[2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: vav@osmf.sscc.ru (Войтишек А.В.), n.shlymbetov@g.nsu.ru (Шлымбетов Н.Х.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

Войтишек А.В., Шлымбетов Н.Х. Выбор аппроксимационных базисов, используемых в компьютерных функциональных алгоритмах приближения вероятностных плотностей по заданной выборке // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2024.— Т. 27, № 2.— С. 147–164.

В данной работе сформулированы требования по выбору аппроксимационного базиса при построении экономичных оптимизированных вычислительных (компьютерных) функциональных алгоритмов приближения вероятностной плотности по заданной выборке, при этом особое внимание уделено свойствам устойчивости и аппроксимации используемых базисов. Показано, что с точки зрения выполнения сформулированных требований и возможности построения конструктивных подходов к условной оптимизации используемых численных схем наилучшими качествами обладают мультилинейная аппроксимация и соответствующий ей специальный частный случай для одновременно ядерных и проекционных вычислительных алгоритмов непараметрической оценки плотности — многомерный аналог полигона частот.

DOI: 10.15372/SJNM20240202
EDN: UPAPTG

Ключевые слова: *компьютерное непараметрическое оценивание вероятностной плотности по заданной выборке, вычислительный функциональный ядерный алгоритм, вычислительный функциональный проекционный алгоритм, многомерный аналог полигона частот, аппроксимация Стренга–Фикса, мультилинейная аппроксимация, условная оптимизация вычислительных функциональных алгоритмов.*

Voytishek A.V., Shlimbetov N.K. Choice of approximation bases used in computational functional algorithms for approximating probability densities for a given sample // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2024.— Vol. 27, № 2.— P. 147–164.

In this paper we formulate the requirements for choosing approximation bases in constructing cost-effective optimized computational (numerical) functional algorithms for approximating probability densities for a given sample, with special attention to stability and approximation of the bases. It is shown that to meet the requirements and construct efficient approaches to conditional optimization of the numerical schemes, the best choice is a multi-linear approximation and a corresponding special case for both kernel and projection

*Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251-2021-0002).

computational algorithms for nonparametric density estimation, which is a multidimensional analogue of the frequency polygon.

Keywords: *computational nonparametric estimation of probability density for a given sample, computational functional kernel algorithm, computational functional projection algorithm, multi-dimensional analogue of frequency polygon, Strang–Fix approximation, multi-linear approximation, conditional optimization of computational functional algorithms.*

1. Вычислительные функциональные алгоритмы приближения вероятностных плотностей

Данная работа развивает и уточняет подходы из [1–7] решения следующей задачи.

Задача 1. *По заданной выборке*

$$\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n\} \tag{1.1}$$

построить численное приближение неизвестной плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^d$, *случайной величины (вектора)* $\boldsymbol{\xi} \in X \subset \mathbb{R}^d$ *с заданным уровнем погрешности* $L > 0$ *и с наименьшими вычислительными затратами* S.

Такая задача является актуальной при обработке больших данных, например при применении технологий машинного обучения. В работах [1–7] для решения задачи 1 предлагается использовать следующие вычислительные и оптимизационные конструкции и методы из теории функциональных алгоритмов метода Монте-Карло (см., например, [8, 9]).

В первую очередь используются классические конструкции теории численного (компьютерного) приближения функций (см., например, [10, гл. 2 и 4]) вида

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \approx L^{(M)} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w^{(i)} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1), \dots, f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M) \right] \chi^{(i)}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где

$$\boldsymbol{\chi}^{(M)} = \left\{ \chi^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \chi^{(M)}(\mathbf{x}) \right\} \tag{1.3}$$

есть заданный набор функций (аппроксимационный базис), определенным образом связанный с введенной в области X сеткой

$$\mathbf{Y}^{(M)} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\} \tag{1.4}$$

(чаще всего равномерной), а

$$\mathbf{W}^{(M)} = \left\{ w^{(i)} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1), \dots, f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M) \right];\ \ i = 1, \dots, M \right\} \tag{1.5}$$

есть набор аппроксимационных коэффициентов, являющихся, как правило, линейными комбинациями значений приближаемой функции $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ в узлах сетки (1.4) вида

$$w^{(i)} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1), \dots, f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M) \right] = a_1^{(i)} f_{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbf{y}_{j_1}\right) + \dots + a_{s(i)}^{(i)} f_{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbf{y}_{j_{s(i)}}\right), \tag{1.6}$$

здесь, как правило, среди номеров $j_1, \dots, j_{s(i)}$ присутствует номер i, а также выполнено соотношение $a_1^{(i)} + \dots + a_{s(i)}^{(i)} = 1$.

При решении задачи 1 принципиальным является то, что, в отличие от постановок теории численного приближения функций (см., например, [10, гл. 2 и 4]), значения $\{f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1),\ldots,f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M)\}$ не заданы, их требуется приближать по заданной выборке (1.1). В качестве основных мы рассмотрим следующие два способа непараметрического оценивания значения плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ в заданной точке $\mathbf{x}=\hat{\mathbf{y}}$ по заданной выборке (1.1).

Первый способ — использование ядерной (точечной) статистической оценки плотности

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\hat{\mathbf{y}},\mathrm{ker})}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right) \tag{1.7}$$

(см., например, [11]), здесь $\kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\mathbf{z})$ — специально выбираемая ядерная функция, такая что

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \int_X f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \mathbf{E}\kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\boldsymbol{\xi}). \tag{1.8}$$

Второй способ приближения значения $f_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\mathbf{y}})$ — использование проекционной (точечной) статистической оценки плотности

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\hat{\mathbf{y}},\mathrm{pr})}(n,K) = \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^{(k)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right)\right]\psi^{(k)}(\hat{\mathbf{y}}) \tag{1.9}$$

(см., например, [12]), здесь

$$\boldsymbol{\Psi}^{(K)} = \left\{\psi^{(1)}(\mathbf{y}),\ldots,\psi^{(K)}(\mathbf{y})\right\} \tag{1.10}$$

есть подмножество бесконечной ортонормированной системы функций

$$\boldsymbol{\Psi}^{(\infty)} = \left\{\psi^{(1)}(\mathbf{y}),\psi^{(2)}(\mathbf{y}),\ldots\right\}, \tag{1.11}$$

такой что $\int_X \psi^{(i)}(\mathbf{y})\psi^{(j)}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=1$ при $i=j$, $\int_X \psi^{(i)}(\mathbf{y})\psi^{(j)}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=0$ при $i\neq j$ и

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty}c^{(k)}\psi^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_X f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\psi^{(k)}(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\right]\psi^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\psi^{(k)}(\boldsymbol{\xi})\psi^{(k)}(\mathbf{x}). \tag{1.12}$$

Приближения (1.8), (1.10) дают следующие два вычислительных (компьютерных) алгоритма приближения вероятностной плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ по заданной выборке (1.1).

Алгоритм 1. Вычислительный функциональный ядерный алгоритм приближения вероятностной плотности. Приближаем значения (1.6) по формуле (1.8):

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_i,\mathrm{ker})}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\kappa^{(\mathbf{y}_i)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right); \quad i=1,\ldots,M,$$

здесь $\{\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n\}$ — заданная выборка (1.1), и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{ker})}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M}w^{(i)}\left[\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_1,\mathrm{ker})}(n),\ldots,\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_M,\mathrm{ker})}(n)\right]\chi^{(i)}(\mathbf{x}). \tag{1.13}$$

Алгоритм 2. Вычислительный функциональный проекционный алгоритм приближения вероятностной плотности. Приближаем значения (1.6) по формуле (1.10):

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_i,\mathrm{pr})}(n,K) = \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^{(k)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right)\right]\psi^{(k)}(\mathbf{y}_i); \quad i=1,\ldots,M,$$

и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n,K)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{pr})}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w^{(i)} \left[\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_1,\mathrm{pr})}(n,K), \ldots, \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_M,\mathrm{pr})}(n,K)\right] \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \qquad (1.14)$$

2. Важный частный случай — многомерный аналог полигона частот

В работах [1–7] особо выделен и подробно изучен важный частный случай (одновременно для алгоритмов 1 и 2), когда функция $\kappa^{(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z})$ из соотношений (1.7), (1.8) выбирается в виде

$$\kappa^{(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{I}^{\left(\Delta^{(\mathbf{x})}\right)}(\mathbf{z})}{h^d}; \quad \mathbf{I}^{(A)}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mathbf{z} \in A, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$\Delta^{(\mathbf{x})} = \left\{\mathbf{z} = \left(z^{(1)}, \ldots, z^{(d)}\right) \colon x^{(s)} - \frac{h}{2} \le z^{(s)} < x^{(s)} + \frac{h}{2},\ s = 1, \ldots, d,\ \mathbf{x} = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}\right)\right\},$$

здесь $\mathbf{I}^{(A)}(\mathbf{z})$ — индикатор множества A, и одновременно функции $\boldsymbol{\Psi}^{(\infty)}$ из (1.11) имеют вид

$$\psi^{(i)}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{I}^{\left(\Delta^{(\mathbf{y}_i)}\right)}(\mathbf{z})}{h^d} \qquad (2.2)$$

для всевозможных точек $\{\mathbf{y}_i\}$ равномерной сетки с шагом h вида

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{\mathbf{i}} = \left(j_i^{(1)} h, \ldots, j_i^{(d)} h\right); \quad \mathbf{i} = \left(j_i^{(1)}, \ldots, j_i^{(d)}\right) \text{ — целые числа}, \qquad (2.3)$$

в прямоугольной ограниченной области $X \subset \mathbb{R}^d$. Кроме того, в [1–7] выбирались базисные функции и коэффициенты так называемого “мультилинейного восполнения” вида

$$\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = \hat{\chi}^{(i,1)}(\mathbf{x}) = B^{(1)}\left[\frac{x^{(1)}}{h} - j_i^{(1)}\right] \times \cdots \times B^{(1)}\left[\frac{x^{(d)}}{h} - j_i^{(d)}\right]; \qquad (2.4)$$

$$B^{(1)}(u) = \begin{cases} u+1 & \text{при} \quad -1 \le u \le 0, \\ -u+1 & \text{при} \quad 0 \le u \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad |u| > 1, \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}\right);$$

$$w^{(i)}\left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1), \ldots, f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M)\right] = f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i); \quad i = 1, \ldots, M, \qquad (2.5)$$

т. е. в выражении (1.6) имеем $j_1 = i$, $a_1^{(i)} = 1$, $a_2^{(i)} = 0$, …, $a_{s(i)}^{(i)} = 0$.

При всех этих условиях алгоритмы 1 и 2 совпадают и дают следующую известную вычислительную схему.

Алгоритм 3 [1–7]. **Многомерный аналог полигона частот.** Приближаем значения (1.6) по формулам

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_i,\mathrm{pol})}(n) = \frac{1}{nh^d} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}^{\left(\Delta^{(\mathbf{y}_i)}\right)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right); \quad i = 1, \ldots, M,$$

здесь $\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$ — заданная выборка (1.1), и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \approx L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{pol})}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{y}_i,\mathrm{pol})}(n) \hat{\chi}^{(i,1)}(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Приведенные в данной работе результаты исследований по выбору аппроксимационного базиса (1.3) для сформулированных в пункте 1 вычислительных функциональных ядерных и проекционных алгоритмов приближения вероятностной плотности по заданной выборке (алгоритмы 1 и 2), согласованному — с позиций так называемой "теории условной оптимизации" (см. [8, 9] и п. 3 данной работы) — с выбором остальных параметров и функций из этих алгоритмов, в определенной степени обосновывают целесообразность широкого использования многомерного аналога полигона частот (алгоритм 3) для практических вычислений.

3. Об условной оптимизации вычислительных функциональных алгоритмов приближения вероятностной плотности

По аналогии с работами [1–6], где для многомерного аналога полигона частот (алгоритм 3) удалось получить выражения для условно-оптимальных параметров, применим следующую общую схему теории условной оптимизации вычислительных функциональных алгоритмов [7, 8] для рассматриваемых в данной работе компьютерных схем.

Ставится задача согласованного выбора параметров M (число узлов сетки (1.4)) и n (число используемых выборочных значений (1.1)) функционального алгоритма, обеспечивающего заданный уровень $L > 0$ погрешности $\delta^{(\mathbb{B})}(M,n)$ (для подходящего нормированного функционального пространства $\mathbb{B}(X)$) приближения

$$L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{ker})}(\mathbf{x}) \ \vee \ L^{(M,n,K)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{pr})}(\mathbf{x}) \ \vee \ L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathrm{pol})}(\mathbf{x})$$

при минимальных вычислительных затратах $S(M,n)$.

Метод 1 (см., например, [5, 6]). Строится верхняя граница $UP^{(\mathbb{B})}(M,n)$ погрешности алгоритма $\delta^{(\mathbb{B})}(M,n)$ для используемого нормированного функционального пространства $\mathbb{B}(X)$, зависящая от параметров M и n:

$$\delta^{(\mathbb{B})}(M,n) = \left\| f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{B}(X)} \leq UP^{(\mathbb{B})}(M,n). \quad (3.1)$$

Эта функция двух переменных приравнивается к величине L. Из уравнения вида

$$UP^{(\mathbb{B})}(M,n) = L \quad (3.2)$$

один из параметров (например n) выражается через другой: $n = Y^{(L)}(M)$. Это соотношение подставляется в выражение для затрат $S(M,n)$, которое тоже зависит от параметров M и n. В результате получается функция $\tilde{S}^{(\mathbb{B},L)}(M)$ одного переменного M, которая исследуется на минимум с помощью известных приемов математического или численного анализа. Найденные значения $M_{\min}^{(\mathbb{B})}(L) = M_{\mathrm{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$, $n_{\mathrm{opt}}^{(\mathbb{B})}(L) = Y^{(L)} \left[M_{\mathrm{opt}}^{(\mathbb{B})}(L) \right]$ объявляются "условно-оптимальными параметрами" соответствующего функционального алгоритма.

При оптимизации алгоритмов 1 и 2, кроме выбора параметров M и n, важным является оптимальный, согласованный с параметрами $M_{\mathrm{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$ и $n_{\mathrm{opt}}^{(\mathbb{B})}(L)$, выбор как аппроксимационного базиса (1.3) и соответствующих коэффициентов (1.5) и (1.7), так и вспомогательных функций $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{\Psi}^{(K)} = \left\{\psi^{(1)}(\mathbf{y}), \ldots, \psi^{(K)}(\mathbf{y})\right\}$ соответственно. Это приводит к рассмотрению дополнительных параметров (например параметра K) и к определенной смене методики оптимизации (см. далее метод 2 в п. 5).

При изучении погрешности $\delta^{(\mathbb{B})}(M,n)$ необходимо выбрать как соответствующее нормированное функциональное пространство $\mathbb{B}(X)$, так и вероятностный смысл выполнения неравенства вида (3.1), ведь $\delta^{(\mathbb{B})}(M,n)$ является случайной величиной. Следуя канонам классического численного анализа (см., например, [10]), в данной статье мы ограничимся рассмотрением случая $\mathbb{B}(X) = \mathbb{C}(X)$ в рамках так называемого “$\mathbb{C}$-подхода” (см., например, [7, 8]), в котором величина

$$\delta^{(\mathbb{C})}(M,n) = \left\| f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)} = \sup_{\mathbf{x}\in X} \left| f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \right|$$

ограничивается сверху по вероятности

$$\mathbf{P}\left[\delta^{(\mathbb{C})}(M,n) \le UP^{(\mathbb{C})}(M,n)\right] > 1-\varepsilon \tag{3.3}$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Особо отметим, что большая часть рассуждений данной работы относительно несложно, с учетом простого неравенства $\|g\|_{\mathbb{L}_2(X)} \le \|g\|_{\mathbb{C}(X)} \times \sqrt{\mathrm{mes} X}$, переносится на случай более практичного (в смысле применения для вычислений) и хорошо разработанного $\mathbb{L}_2$-подхода (см., например, [7, 8]), в котором исследуется сходимость в среднем погрешности

$$\delta^{(\mathbb{L}_2)}(M,n) = \left\| f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{L}_2(X)} = \left(\int_X \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \right]^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

к нулю при M, $n \to \infty$, и строятся оценки сверху $UP^{(\mathbb{L}_2)}(M,n)$, такие что

$$\left[\mathbf{E}\delta^{(\mathbb{L}_2)}(M,n)\right]^2 \le UP^{(\mathbb{L}_2)}(M,n).$$

Для $\mathbb{C}$-подхода (3.3) верхнюю границу погрешности $\delta^{(\mathbb{C})}(M,n)$ записывают в виде суммы трех компонент: компоненты аппроксимации $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M)$, компоненты смещения $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M)$ и стохастической компоненты $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{stoch}}(M,n)$ [7, 8]:

$$\delta^{(\mathbb{C})}(M,n) = \sup_{\mathbf{x}\in X} \left| f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \right| \le \delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M) + \delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M) + \delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{stoch}}(M,n), \tag{3.4}$$

где

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M) = \left\| f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M)} f_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)},$$

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M) = \left\| L^{(M)} f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M)} \bar{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)},$$

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{stoch}}(M,n) = \left\| L^{(M)} \bar{f}_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M,n)} \tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)}.$$

Здесь

$$L^{(M)}\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = L^{(M)}\bar{f}^{(\mathrm{ker})}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w^{(i)}\left[\mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{y}_1)}(\boldsymbol{\xi}), \ldots, \mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{y}_M)}(\boldsymbol{\xi})\right]\chi^{(i)}(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

для алгоритма 1,

$$L^{(M)}\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = L^{(M,K)}\bar{f}^{(\mathrm{pr})}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w^{(i)}\left[\sum_{k=1}^{K}\mathbf{E}\psi^{(k)}(\boldsymbol{\xi})\psi^{(k)}(\mathbf{y}_1),\ldots,\sum_{k=1}^{K}\mathbf{E}\psi^{(k)}(\boldsymbol{\xi})\psi^{(k)}(\mathbf{y}_M)\right]\chi^{(i)}(\mathbf{x}) \qquad (3.6)$$

для алгоритма 2 и

$$L^{(M)}\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = L^{(M)}\bar{f}^{(\mathrm{pol})}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^d}\sum_{i=1}^{M}\mathbf{EI}^{(\Delta^{(\mathbf{y}_i)})}(\boldsymbol{\xi})\chi^{(i)}(\mathbf{x}) \qquad (3.7)$$

для алгоритма 3.

Уместно сделать следующее методическое замечание. В классической теории условной оптимизации из [7, 8], где функциональные алгоритмы строились для приближения решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода и включали в основном несмещенные оценки приближаемой функции в узлах сетки (при этом компонента смещения, как правило, отсутствовала), величина $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M)$ называлась "детерминированной" компонентой погрешности. В свою очередь, в теории точечных непараметрических статистических оценок вероятностной плотности "детерминированной" называют компоненту $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M)$. Для рассматриваемых здесь алгоритмов "детерминированный" (не зависящий от выборочных значений) вклад в погрешность образует сумма погрешностей аппроксимации $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M)$ и смещения $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M)$.

Теперь изучим вопрос о том, как выбор аппроксимационного базиса (1.3) и соответствующих коэффициентов (1.5) помогает (или наоборот, затрудняет) получение согласованных верхних границ для компонент погрешности алгоритмов 1–3:

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M) = \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{ker})}_{\mathrm{appr}}(M)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pr})}_{\mathrm{appr}}(M)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{appr}}(M),$$

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{bias}}(M) = \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{ker})}_{\mathrm{bias}}(M)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pr})}_{\mathrm{bias}}(M,K)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{bias}}(M),$$

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{stoch}}(M,n) = \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{ker})}_{\mathrm{stoch}}(M,n)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pr})}_{\mathrm{stoch}}(M,n,K)\ \vee\ \delta^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{stoch}}(M,n).$$

4. Основные принципы построения аппроксимационных базисов

4.1. Мультипликативные конструкции многомерных аппроксимационных базисов

Для получения достаточно универсальных (в том числе многомерных) вычислительных схем алгоритмов 1 и 2 и методов их изучения в рамках теории условной оптимизации целесообразным видится использование мультипликативных конструкций, описанных в [13, гл. 2], вида

$$\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = \chi\left[t_1^{(\mathbf{y}_i)}(x^{(1)})\right]\times\cdots\times\chi\left[t_d^{(\mathbf{y}_i)}(x^{(d)})\right];\quad \mathbf{x} = \left(x^{(1)},\ldots,x^{(d)}\right), \qquad (4.1)$$

где $\chi(w)$ — одинаковая для всех компонент так называемая "образующая базис" функция одного переменного, а $t_j^{(\mathbf{y}_i)}(w)$; $j = 1,\ldots,d$, — единообразные (как правило, линейные) функции, связанные с соответствующими компонентами узла $\mathbf{y}_i$.

Конструкции вида (4.1) позволяют перенести свойства одномерного базиса, определяемого той или иной образующей функцией $\chi(w)$, на многомерный случай, реализуя соответствующую индукцию по размерности d.

Пример. Рассмотрим базисные функции так называемой “аппроксимации Стренга–Фикса” (см. [13, гл. 2])

$$\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = \hat{\chi}^{(i,r)}(\mathbf{x}) = B^{(r)}\left[\frac{x^{(1)}}{h} - j_i^{(1)}\right] \times \cdots \times B^{(r)}\left[\frac{x^{(d)}}{h} - j_i^{(d)}\right] \tag{4.2}$$

для сетки (2.3); здесь функция $B^{(r)}(w)$ обозначает B-сплайн r-го порядка, который определяется рекуррентным соотношением

$$B^{(r)}(w) = B^{(r-1)} * B^{(0)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} B^{(r-1)}(w-v)B^{(0)}(v)\,dv; \quad r = 1, 2, \ldots,$$

где

$$B^{(0)}(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 \le w \le 1/2, \\ 0 & \text{при } |w| > 1/2. \end{cases}$$

Особо отметим, что рассмотренный выше базис (2.4) мультилинейного восполнения является частным случаем базиса аппроксимации Стренга–Фикса (4.2) для $r = 1$. Заметим также, что на практике в выражениях вида (4.2) используются B-сплайны нечетных порядков $r = 1, 3, 5, \ldots$, так как для четных $r = 0, 2, 4, \ldots$ возникает необходимость увеличивать более чем вдвое число контролируемых точек (по сравнению с сеткой (2.3)), потому что добавляются центры отрезков по каждой компоненте, а также центры многомерных кубов разбиения компактной области X.

Рассмотрим обоснования двух свойств базиса (4.2), крайне важных для рассуждений теории условной оптимизации, описанных в п. 3.

Утверждение 1. Базис (4.2) является разложением единицы, т. е. $\sum_i \chi^{(i,r)}(\mathbf{x}) \equiv 1$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Используем метод математической индукции по размерности d пространства $\mathbb{R}^d$.

Для $d = 1$ утверждение доказываем индукцией по порядку r сплайна $B^{(r)}$. Пусть $r = 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Найдется единственное целое число $\hat{\imath}$ такое, что $\hat{\imath}h - h/2 \le x < \hat{\imath}h + h/2$. Тогда $\sum_i B^{(0)}(x/h - i) \equiv 1$, так как в этой сумме все слагаемые равны нулю, кроме $\hat{\imath}$-го, которое равно единице.

Пусть теперь

$$\sum_i B^{(r-1)}\left[\frac{x}{h} - i\right] \equiv 1 \tag{4.3}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно определению B-сплайна, имеем

$$\begin{aligned}\sum_i B^{(r)}\left[\frac{x}{h} - i\right] &= \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} B^{(0)}(y)\, B^{(r-1)}\left[\frac{x - ih}{h} - y\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} B^{(0)}(y) \sum_i B^{(r-1)}\left[\frac{x - ih}{h} - y\right] dy \\ &= \int_{-1/2}^{+1/2} \sum_i B^{(r-1)}\left[\frac{(x - hy) - ih}{h}\right] dy.\end{aligned}$$

Используя соотношение (4.3) для $(x - hy)$ вместо x, получаем $\sum_i B^{(r)}[x/h - i] \equiv 1$, т. е. утверждение 1 верно для $d = 1$.

Наконец, индуктивный переход по d следует из соотношения

$$\sum_i \chi^{(i,r)}(\mathbf{x}) = \sum_{j_{(i)}^{(1)},\ldots,j_{(i)}^{(d)}} \chi_{\left(j_{(i)}^{(1)},\ldots,j_{(i)}^{(l)}\right)}\left(x^{(1)},\ldots,x^{(d)}\right)$$

$$= \sum_{j_{(i)}^{(1)},\ldots,j_{(i)}^{(d-1)}} \chi_{\left(j_{(i)}^{(1)},\ldots,j_{(i)}^{(d-1)}\right)}\left(x^{(1)},\ldots,x^{(d-1)}\right) \times \sum_{j_{(i)}^{(d)}} B^{(r)}\left[\frac{x^{(d)}}{h} - j_{(i)}^{(d)}\right].$$

Утверждение 1 доказано. □

Утверждение 2. Если функция $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $\mathbb{C}^{r+1}(X)$ и в приближении (1.2) используются базисные функции $\boldsymbol{\chi}^{(M)}$ вида (4.2), то найдутся такие коэффициенты $\mathbf{W}^{(M)}$ из соотношений (1.5), (1.6), что справедливо неравенство

$$\|f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M)}f_{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{C}(X)} \leq H_r h^{r+1}\|f_{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{C}^{r+1}(X)}, \tag{4.4}$$

причем константа H_r не зависит от функции $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ и шага сетки h.

Доказательство утверждения 2 не столь просто (по сравнению с доказательством утверждения 1), так как здесь мы имеем дело по сути с “теоремой существования”: для каждого частного случая соотношения (4.4) необходимо получать явный вид как коэффициентов $\mathbf{W}^{(M)}$, так и константы H_r.

Относительно простое рассуждение получается для $r = 1$ (т. е. для базиса (2.4)). Оптимальное соотношение для погрешности (4.4) дают коэффициенты (2.5) (или (1.6) при $j_1 = i$, $a_1^{(i)} = 1$, $a_2^{(i)} = 0, \ldots, a_{s(i)}^{(i)} = 0$). Для одномерного случая $d = 1$ и $X = [a, b]$ приближение (1.2) превращается в кусочно-линейное приближение плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = f_\xi(x)$ на интервале $[a, b]$, при этом

$$\left\|f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M;r=1)}f_{\boldsymbol{\xi}}\right\|_{\mathbb{C}(X)} = \max_{x\in[a,b]}\left|f_\xi(x) - L^{(M;r=1)}f_\xi(x)\right|$$

$$= \max_{x\in[y_i,z_i];\ i=1,..,M}\left|f_\xi(x) - f_\xi(y_i) - (x-y_i)\frac{f_\xi(z_i) - f_\xi(y_i)}{h}\right|,$$

здесь $y_i = a + (i-1)h$, $z_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{M}$; $i = 1, \ldots, M$. По аналогии с рассуждениями из [10, гл. 2, § 3] заметим, что

$$f_\xi(x) - f_\xi(y_i) - (x-y_i)\frac{f_\xi(z_i) - f_\xi(y_i)}{h} = \frac{f_\xi''(x_0)}{2}(x-y_i)(x-z_i), \tag{4.5}$$

где x_0 — некоторая внутренняя точка полуинтервала $[y_i, z_i)$ (здесь мы учли то, что, согласно условиям утверждения 2, функция $f_\xi(x)$ принадлежит пространству $\mathbb{C}^2[a,b]$). Действительно, если рассмотреть функцию $Y(x) = f_\xi(x) - f_\xi(y_i) - (x-y_i)\frac{f_\xi(z_i) - f_\xi(y_i)}{h} - A(x-y_i)(x-z_i)$ с константой A такой, что $Y(x) = 0$, то у этой функции имеются как минимум три нуля в точках y_i, x, z_i. Тогда по теореме Ролля (см., например, [14, гл. 6, § 1]) у функции $Y'(x)$ имеется не менее двух нулей на полуинтервале $[y_i, z_i)$. В этом случае, согласно той же теореме Ролля, у функции $Y''(x)$ имеется как минимум один нуль $x_0 \in [y_i, z_i)$. Имеем $0 = Y''(x_0) = f_\xi''(x_0) - 2A$ и $A = \frac{f_\xi''(x_0)}{2}$. С учетом соотношения

$Y(x) = 0$ получаем соотношение (4.5). Максимум модуля квадратного трехчлена $|(x - y_i)(x - z_i)|$ достигается в точке $x = \dfrac{y_i + z_i}{2}$ и равен $\dfrac{z_i - y_i}{4}$. Поэтому $\max_{x\in[a,b]} \big|f_\xi(x) - L^{(M)} f_\xi(x)\big| \le \tilde{H}_1 h^2$; $\tilde{H}_1 = \dfrac{\max_{x\in[a,b]} \big|f''_\xi(x)\big|}{8}$.

Относительно несложные индуктивные переходы, позволяющие получить для $r = 1$ оценку вида (4.4)

$$\delta_{\mathrm{appr}}^{(\mathbb{C};r=1)}(M) = \|f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M;\,r=1)} f_{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{C}(X)} \le \frac{\big[H^{(h\to M)}\big]^2}{8} \sum_{s=1}^{d} \max_{\mathbf{x}\in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial \left(x^{(s)}\right)^2} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \right| M^{-2/d} \quad (4.6)$$

для $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^2(X)$ и для коэффициентов (2.5), показаны в [13, гл. 2] (для $d = 2$) и в [15] (для произвольного d), здесь константа $H^{(h\to M)}$, такова что

$$h = H^{(h\to M)} M^{-1/d}. \quad (4.7)$$

В более сложном, но достаточно хорошо изученном случае $r = 3$ в одномерном случае (т. е. для $d = 1$), оценка вида $\max_{x\in[a,b]} |f_\xi(x) - L^{(M;\,r=3)} f_\xi(x)| \le \tilde{H}_3 h^4$; $\tilde{H}_3 = 0.030382 \times \max_{x\in[a,b]} \left|\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} f_\xi(x)\right|$ для $f_\xi(x) \in \mathbb{C}^4[a,b]$ получена в [16, гл. 9] для коэффициентов $w^{(i)}\left[f_\xi(y_1), \ldots, f_\xi(y_M)\right] = -\dfrac{1}{6} f_\xi(y_i - h) + \dfrac{4}{3} f_\xi(y_i) - \dfrac{1}{6} f_\xi(y_i + h)$; $i = 2, \ldots, M$ (это комбинация значений функции $f_\xi(x)$ в трех узлах сетки, включая узел $y_i = a + (i-1)h$, т. е. в формуле (1.6) имеем $s^{(i)} = 3$). Этот результат обобщен в [15] на случай произвольного d, где получена оценка

$$\delta_{\mathrm{appr}}^{(\mathbb{C};\,r=3)}(M) = \|f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M;\,r=3)} f_{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{C}(X)}$$
$$\le 0.030382 \left[H^{(h\to M)}\right]^4 \sum_{s=1}^{d} \max_{\mathbf{x}\in X} \left| \frac{\partial^4}{\partial \left(x^{(s)}\right)^4} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \right| M^{-4/d} \quad (4.8)$$

для $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^4(X)$ и для коэффициентов вида

$$w^{(i)} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_1), \ldots, f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_M)\right] = w^{(\mathbf{i};\,r=3)}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right)^d \sum_{\mathbf{k}\{-1,0,1\}^d} \frac{f(\mathbf{y}_{\mathbf{i}+\mathbf{k}})}{(-8)^{\left|k^{(1)}\right| + \cdots + \left|k^{(d)}\right|}}; \quad \mathbf{k} = \left(k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}\right), \quad (4.9)$$

здесь задействованы уже $s^{(i)} = 3^d$ значений функции $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$.

4.2. Использование константы устойчивости аппроксимационного базиса

Для построения оценок сверху для компоненты смещения $\delta_{\mathrm{bias}}^{(\mathbb{C})}(M)$ и стохастической компоненты $\delta_{\mathrm{stoch}}^{(\mathbb{C})}(M, n)$ важно уметь оценивать так называемую “константу устойчивости” $K^{(\mathrm{stab})}$, для которой

$$\delta_{\mathrm{bias}}^{(\mathbb{C})}(M) = \left\| L^{(M)} f_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M)} \bar{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)} \le K^{(\mathrm{stab})} \max_{i=1,\ldots,M} \left| f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) - \bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) \right|, \quad (4.10)$$

$$\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{stoch}}(M,n) = \left\| L^{(M)}\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}} - L^{(M,n)}\tilde{f}_{\boldsymbol{\xi}} \right\|_{\mathbb{C}(X)} \le K^{(\mathrm{stab})} \max_{i=1,\dots,M} \left| \bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) - \tilde{f}^{(\mathbf{y}_i)}_{\boldsymbol{\xi}}(n) \right|, \qquad (4.11)$$

здесь для алгоритма 1 $\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) = \mathbf{E}\kappa^{(\mathbf{y}_i)}(\boldsymbol{\xi})$ и $\tilde{f}^{(\mathbf{y}_i)}_{\boldsymbol{\xi}}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \kappa^{(\mathbf{y}_i)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right)$, для алгоритма 2 $\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{E}\psi^{(k)}(\boldsymbol{\xi})\psi^{(k)}(\mathbf{y}_i)$ и $\tilde{f}^{(\mathbf{y}_i)}_{\boldsymbol{\xi}}(n) = \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^{(k)}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right)\right]\psi^{(k)}(\mathbf{y}_i)$, а для алгоритма 3 $\bar{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) = \frac{\mathbf{E}\mathbf{I}^{(\Delta^{(\mathbf{y}_i)})}(\boldsymbol{\xi})}{h^d}$ и $\tilde{f}^{(\mathbf{y}_i)}_{\boldsymbol{\xi}}(n) = \frac{1}{nh^d}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{I}^{(\Delta^{(\mathbf{y}_i)})}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right)$.

Из соотношений (1.2), (3.5)–(3.7), (4.10) и (4.11) следует, что

$$K^{(\mathrm{stab})} \le K^{\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(M)}\right)} \times K^{\left(\mathbf{W}^{(M)}\right)},$$

где $K^{\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(M)}\right)} = \sup_{\mathbf{x}\in X}\sum_{i=1}^{M}\left|\chi^{(i)}(\mathbf{x})\right|$ — так называемая “константа Лебега” (см., например, [17, раздел 3.1]), а $K^{\left(\mathbf{W}^{(M)}\right)} = \max_{i=1,\dots,M}\left(\left|a_1^{(i)}\right| + \dots + \left|a_{s(i)}^{(i)}\right|\right)$ (см. формулу (1.6)) — так называемая “константа компактности коэффициентов”.

Заметим, что для коэффициентов вида (2.5), обеспечивающих порядок $M^{-2/d}$ по M погрешности аппроксимации для базиса (2.4) (см. соотношение (4.6)), имеем $K^{\left(\mathbf{W}^{(M)};\, r=1\right)} = 1$. В свою очередь, для коэффициентов вида (4.9), обеспечивающих повышенный порядок $M^{-4/d}$ по M погрешности аппроксимации для базиса (4.2) при $r = 3$ (см. соотношение (4.8)), константа компактности $K^{\left(\mathbf{W}^{(M)};\, r=3\right)}$ превосходит единицу и заметно (степенным образом) растет с увеличением размерности d. Справедливости ради отметим, что в работе [15] с помощью достаточно тонких рассуждений для базиса (4.2) при $r = 3$ с коэффициентами (4.9) удалось получить неравенство (4.10) с константой $K^{(\mathrm{stab};\, r=3)} = \left(\frac{11}{9}\right)^d$, которая растет с ростом d гораздо медленней, чем константа компактности коэффициентов $K^{\left(\mathbf{W}^{(M)};\, r=3\right)}$. Тем не менее, в вычислительных конструкциях типа алгоритмов 1–3 мы настоятельно рекомендуем использовать базисы (1.3), дающие приемлемые оценки погрешности аппроксимации $\delta^{(\mathbb{C})}_{\mathrm{appr}}(M)$ для коэффициентов вида (2.5), у которых $K^{\left(\mathbf{W}^{(M)}\right)} = 1$.

Из утверждения 1 следует, что для базиса аппроксимации Стренга–Фикса (4.2) (в частности, для мультилинейного базиса (2.4)) константа Лебега равна единице: $K^{\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(M)};\, r\right)} = 1$. Здесь весьма важную роль играет неотрицательность функций (4.2). Этим свойством, к сожалению, не обладают функции одномерного базиса Лагранжа $\chi^{(i)}(x) = \prod_{j=1, j\ne i}^{M+1}(x-y_j)/(y_i-y_j)$; $x\in[a,b]$ (см., например, [10, гл. 2]), которые для коэффициентов вида (2.5) обладают рекордной сходимостью (порядка $1/M!$) погрешности аппроксимации $\delta^{(\mathbb{C};\,\mathrm{Lag})}_{\mathrm{appr}}(M)$ к нулю. Однако в [17, гл. 3] показано, что константа Лебега для равномерной сетки $y_i = a + (i-1)h$; $h = (b-a)/M$, ограничена снизу величиной $K^{\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(M)};\,\mathrm{Lag}\right)} \ge \frac{2^{M-3}}{M^{3/2}}$, и такая неустойчивость не подходит для алгоритмов 1–3. Аналогичные выводы можно сделать и для тригонометрических базисов.

В работах [18, 19] отмечено, что относительно неплохими свойствами устойчивости обладают базисные функции одномерного приближения Бернштейна

$$\chi^{(i)}(x) = C_M^{i-1}x^{i-1}(1-x)^{M-i+1}; \quad 0\le x\le 1, \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \qquad (4.12)$$

с коэффициентами (2.5) (здесь $X = [a,b] = [0,1]$ и $y_i = (i-1)h$), для которых $K^{(\mathrm{stab};\,\mathrm{Ber})} = K^{\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(M)};\,\mathrm{Ber}\right)} = K^{\left(\mathbf{W}^{(M)};\,\mathrm{Ber}\right)} = 1$. Однако приближение Бернштейна обладает весьма посредственными аппроксимационными свойствами (что делает нецелесообразным его использование в алгоритмах 1–3), а конкретнее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3 [18, 19]. Если функция $f_\xi(x)$ принадлежит пространству $\mathbb{C}[0,1]$ и удовлетворяет условию Липшица с константой L, а в одномерном приближении (1.2) используются базисные функции вида (4.12) и коэффициенты (2.5), то справедливо неравенство

$$\delta_{\text{appr}}^{(\mathbb{C};\,\text{Ber})}(M) = \|f_\xi - L^{(M)} f_\xi\|_{\mathbb{C}[0,1]} \le L/(2\sqrt{M}).$$

Рассуждения этого пункта, таким образом, достаточно детально обосновывают рекомендации работ [1–7] по выбору в качестве базиса $\boldsymbol{\chi}^{(M)}$ из (1.3) и коэффициентов $\mathbf{W}^{(M)}$ из (1.5), (1.6) мультилинейных функций (2.4) с коэффициентами (2.5), для них

$$K^{(\text{stab}\,;r=1)} = K^{\left(\boldsymbol{\chi}^{(M)};\,r=1\right)} = K^{\left(\mathbf{W}^{(M)};\,r=1\right)} = 1. \tag{4.13}$$

5. Некоторые замечания по конструированию и оптимизации ядерного алгоритма 1 и проекционного алгоритма 2

Усиливая вывод предыдущего пункта, можно предположить, что не только базисные функции и коэффициенты (2.5), но и в целом алгоритм 3 является наиболее предпочтительным с точки зрения возможности оптимизации и целесообразности практического применения.

Так, для приближения из алгоритма 3 справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Для алгоритма 3 при $f_{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{C}^2(X)$ справедливо неравенство

$$\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C},\text{pol})}(M) \le \frac{\left[H^{(h\to M)}\right]^2}{24} \sum_{s=1}^{d} \max_{\mathbf{y}\in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial \left(y^{(s)}\right)^2} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}) \right| M^{-2/d}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Из соотношений (4.10), (4.13) имеем

$$\delta_{\text{bias}}^{(\mathbb{C},\text{pol})}(M) \le \max_{i=1,\dots,M} \left| f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}_i) - \frac{\mathbf{EI}^{\left(\Delta(\mathbf{y}_i)\right)}(\boldsymbol{\xi})}{h^d} \right| \le \sup_{\mathbf{y}\in X} \left| \frac{1}{h^d} \int_{\Delta(\mathbf{y})} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}) - f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) \right] \, d\mathbf{z} \right|. \tag{5.2}$$

По аналогии с рассуждениями из п. 4.1 рассмотрим сначала одномерный случай ($d = 1$):

$$\frac{1}{h^d} \left| \int_{\Delta(\mathbf{y})} \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}) - f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) \right] d\mathbf{z} \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{y-h/2}^{y+h/2} \left[f_\xi(y) - f_\xi(z) \right] dz \right|. \tag{5.3}$$

Рассмотрим разложение Тейлора функции $f_\xi(z)$ в точке y с учетом условия $f_{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{C}^2(X)$:

$$f_\xi(z) = f_\xi(y) + f'_\xi(y)(z-y) + D_1; \quad z \in [y - h/2, y + h/2],$$

$$|D_1| \le \frac{(z-y)^2}{2} \max_{z\in[y-h/2,y+h/2]} \left| f''_\xi(z) \right|.$$

С учетом того, что $\int_{y-h/2}^{y+h/2} f'_\xi(y)(z-y)\,dz = 0$, из соотношений (5.2), (5.3) для случая $d = 1$ получаем

$$\delta_{\rm bias}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(M) \le \frac{1}{2h} \max_{z\in[a,b]} \left| f''_\xi(z) \right| \int_{y-h/2}^{y+h/2} (z-y)^2\, dz = \frac{h^2}{24} \max_{z\in[a,b]} \left| f''_\xi(z) \right|.$$

Простой индуктивный переход по размерности d и соотношение (4.7) дают неравенство (5.1). Утверждение доказано. □

Сравнивая соотношения (4.6) и (5.1), отметим, что верхние границы погрешностей $\delta_{\rm appr}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(M)$ и $\delta_{\rm bias}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(M)$ имеют одинаковый порядок по параметру M, что оказывается весьма важным при применении оптимизационного метода 1 для алгоритма 3 (см. далее формулу (5.8)).

Для алгоритмов 1 и 2 из соотношений (4.10), (4.13) мы можем только получить соотношения

$$\delta_{\rm bias}^{(\mathbb{C},{\rm ker})}(M) \le \sup_{\mathbf{y}\in X} \left| \frac{1}{{\rm mes}\, X} \int_X \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) \kappa^{(\mathbf{y})}(\mathbf{z})\, {\rm mes}\, X - f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y}) \right] d\mathbf{z} \right|, \qquad (5.4)$$

$$\delta_{\rm bias}^{(\mathbb{C},{\rm pr})}(M,K) \le \sup_{\mathbf{y}\in X} \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \left[\int_X f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) \psi^{(k)}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \right] \psi^{(k)}(\mathbf{y}) \right|. \qquad (5.5)$$

Оценка правых частей полученных неравенств (5.4), (5.5) требует отдельного исследования для каждого конкретного выбора функций $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{z})$ и $\boldsymbol{\Psi}^{(K)} = \left\{ \psi^{(1)}(\mathbf{y}), \ldots, \psi^{(K)}(\mathbf{y}) \right\}$ соответственно. Важно также отметить, что правые части соотношений (5.4) и (5.5) явно не зависят от параметра M.

Используя соотношения (4.11), (4.13) и ряд утверждений из теории порядковых статистик [20], удается получить следующий результат.

Утверждение 5 [5,6]. Для многомерного аналога полигона частот (алгоритм 3) в предположении непрерывности приближаемой плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ на компакте X справедливо утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные действительные константы $H_{\rm stoch,1}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(\varepsilon), H_{\rm stoch,2}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(\varepsilon)$ и натуральное число $\hat{M}$ такие, что для любого $M > \hat{M}$ существует натуральное число $\hat{N}(\varepsilon, M)$ такое, что для всех $n > \hat{N}(\varepsilon, M)$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{ \delta_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(M,n) \le \frac{H_{\rm stoch,1}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(\varepsilon)\sqrt{M}}{\sqrt{n}} \left[\sqrt{2\ln M} + \frac{H_{\rm stoch,2}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(\varepsilon) - \frac{\ln\ln M}{2}}{\sqrt{2\ln M}} \right] \right\} > 1 - \varepsilon. \qquad (5.6)$$

Для алгоритма 3 удается получить выражения для условно-оптимальных параметров по методу 1, что является весомым аргументом в пользу практического применения этой численной схемы. Приведем соответствующие рассуждения (см. также [5, 6]).

Отметим прежде всего важную отличительную (и весьма позитивную) особенность алгоритма 3, состоящую в том, что затраты $S^{(\rm pol)}$ этого алгоритма пропорциональны величине $n \times t$, где t — время определения того, в какой из кубов $\Delta^{(\mathbf{y}_i)}$ попадает очередное выборочное значение $\boldsymbol{\xi}_j$ случайной величины (вектора) $\boldsymbol{\xi}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Несложно добиться того, чтобы время t не зависело от числа M кубов $\Delta^{(\mathbf{y}_i)}$. Таким образом, затраты оптимизированных версий алгоритма 3 явно не зависят от M. В оптимизационных процедурах метода 1 зависимость затрат $S^{(\rm pol)}$ от параметра M возникает из-за наличия уравнений вида (3.2), определяющих зависимость параметра n (а значит, и затрат $S^{(\rm pol)}$) от M.

Рассмотрим такую процедуру для $\mathbb{C}$-подхода. Здесь требуется решать следующую оптимизационную задачу: найти значения $M_{\rm opt}^{(\mathbb{C}),{\rm pol}}(L)$ и $n_{\rm opt}^{(\mathbb{C},{\rm pol})}(L)$, для которых достигается минимум

$$\min_{M,n} S^{(\mathrm{pol})}(M,n) = \min_{M,n} \left[t \times n(M,L) + S_0\right], \tag{5.7}$$

здесь S_0 — время вычисления 2^d ненулевых слагаемых $\tilde{f}^{(\mathbf{y}_i)}_{\boldsymbol{\xi}}(n)\hat{\chi}^{(i,1)}(\mathbf{x})$ в сумме (2.6) для заданной точки $\mathbf{x} \in X$, при условии

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \times \sqrt{M}}{\sqrt{n}} \left[\sqrt{2\ln M} + \frac{A_3^{(\mathbb{C})} - \frac{\ln\ln M}{2}}{\sqrt{2\ln M}}\right] = L, \tag{5.8}$$

где $A_1^{(\mathbb{C})} = \frac{\left[H^{(h\to M)}\right]^2}{6} \sum_{s=1}^d \max_{\mathbf{x}\in X} \left|\frac{\partial^2}{\partial\left(x^{(s)}\right)^2} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\right|$, $A_2^{(\mathbb{C})} = H^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{stoch},1}(\varepsilon)$, $A_3^{(\mathbb{C})} = H^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{stoch},2}(\varepsilon)$ (см. соотношения (3.4), (4.6), (5.1), (5.6)).

Выражение в левой части уравнения (5.8) является относительно сложным и мы применим следующий прием из [21], позволяющий заменить это выражение на более простое. Используя промежуточный результат из доказательства теоремы 1.5.3 из [20], вместо (5.8) можно рассмотреть соотношение

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \times \sqrt{M}}{\sqrt{n}} \sqrt{2\ln M - \ln\ln M + 2A_3^{(\mathbb{C})}} = L. \tag{5.9}$$

Несложно показать, что для любых фиксированных $\bar{M} \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ найдется $b > 0$ такое, что при $M > \bar{M}$ выполнено

$$\sqrt{2\ln M - \ln\ln M + 2A_3^{(\mathbb{C})}} \le b\, M^a. \tag{5.10}$$

С учетом соотношений (5.9), (5.10) заменим соотношение (5.8) на следующее:

$$\frac{A_1^{(\mathbb{C})}}{M^{2/d}} + \frac{A_2^{(\mathbb{C})} \times \sqrt{M}}{\sqrt{n}}\, b\, M^a = L. \tag{5.11}$$

Из формул (5.7), (5.11) имеем

$$n = \frac{\left[A_2^{(\mathbb{C})}\right]^2 b^2\, M^{2a+1}}{\left[L - A_1^{(\mathbb{C})}/M^{2/d}\right]^2}, \qquad \tilde{S}^{(\mathbb{C},L)}(M) = \frac{t\left[A_2^{(\mathbb{C})}\right]^2 b^2\, M^{2a+1}}{\left[L - A_1^{(\mathbb{C})}/M^{2/d}\right]^2} + S_0. \tag{5.12}$$

Дифференцируем $\tilde{S}^{(\mathbb{C},L)}(M)$ по M

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(\mathbb{C},L)}(M)}{\partial M} = \frac{t\left[A_2^{(\mathbb{C})}\right]^2 b^2 (2a+1)\, M^{2a+1}}{\left[L - A_1^{(\mathbb{C})}/M^{2/d}\right]^3} \left(L - \frac{A_1^{(\mathbb{C})} \times \left[(2a+1)d + 4\right]}{M^{2/d} \times (2a+1) \times d}\right)$$

и найдем точку минимума, она же — условно-оптимальное значение параметра M многомерного аналога полигона частот (алгоритм 3) для $\mathbb{C}$-подхода:

$$M^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{opt}}(L) = \left(\frac{A_1^{(\mathbb{C})}\left[(2a+1)\,d + 4\right]}{(2a+1)\,d}\right)^{d/2} L^{-d/2}. \tag{5.13}$$

Несколько слов о том, как выбирать параметр b. С одной стороны, его следует брать по возможности малым, так как множитель b^2 входит в выражение для трудоемкости (5.12). С другой стороны, для значения $M^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{opt}}(L)$ должно выполняться неравенство (5.10). Поэтому выберем b из условия равенства в соотношении (5.10) при $M = M^{(\mathbb{C},\mathrm{pol})}_{\mathrm{opt}}(L)$:

$$b^2 = \frac{2\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) - \ln\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) + 2A_3^{(\mathbb{C})}}{\left[M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L)\right]^{2a}}. \tag{5.14}$$

Из соотношений (5.12)–(5.14) получаем условно-оптимальное значение параметра n многомерного аналога полигона частот (алгоритм 3) для $\mathbb{C}$-подхода:

$$n_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) = \frac{\left[A_1^{(\mathbb{C})}\right]^{d/2}\left[A_2^{(\mathbb{C})}\right]^2 [(2a+1)d+4]^{2+d/2}}{16\,[(2a+1)\times d]^{d/2}} \times$$
$$\left[2\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) - \ln\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) + 2A_3^{(\mathbb{C})}\right] L^{-2-d/2}.$$

Наконец, для важного предельного случая $a = 0$ имеем

$$M_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) = \left[\frac{A_1^{(\mathbb{C})}\times(d+4)}{d}\right]^{d/2} L^{-d/2},$$

$$n_{\rm opt}^{(\mathbb{C},\rm pol)}(L) = \frac{\left[A_1^{(\mathbb{C})}\right]^{d/2}\left[A_2^{(\mathbb{C})}\right]^2 (d+4)^{2+d/2}}{16\,d^{d/2}}\left[2\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C})}(L) - \ln\ln M_{\rm opt}^{(\mathbb{C})}(L) + 2A_3^{(\mathbb{C})}\right] L^{-2-d/2}.$$

Что касается алгоритмов 1 и 2, то для них в общем случае получить аналоги приведенных в данном пункте рассуждений для алгоритма 3 не удается. Здесь видится целесообразным применение следующей известной технологии (см., например, [6]) выбора параметров алгоритмов: n — число используемых выборочных значений (1.1), M — число узлов сетки (1.4) и функций $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{\Psi}^{(K)} = \left\{\psi^{(1)}(\mathbf{y}),\dots,\psi^{(K)}(\mathbf{y})\right\}$.

Метод 2. Для выбора параметров n, M и функций $\kappa^{(\mathbf{x})}(\mathbf{z})$, $\mathbf{\Psi}^{(K)} = \left\{\psi^{(1)}(\mathbf{y}),\dots,\psi^{(K)}(\mathbf{y})\right\}$ полагаем:

– для алгоритма 1

$$UP_{\rm appr}^{(\mathbb{C})}(M) = UP_{\rm appr}^{(\mathbb{C},\rm ker)}(M) = UP_{\rm appr}^{(\mathbb{C},pr)}(M) = H_{\rm appr}^{(\mathbb{C})} M^{-\frac{2}{d}} = \frac{L}{3}, \tag{5.15}$$

где $H_{\rm appr}^{(\mathbb{C})} = \frac{\left[H^{(h\to M)}\right]^2}{8}\sum_{s=1}^d \max_{\mathbf{x}\in X}\left|\frac{\partial^2}{\partial\left(x^{(s)}\right)^2} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\right|$, $UP_{\rm bias}^{(\mathbb{C},\rm ker)}(M) = \sup_{\mathbf{y}\in X}\left|\frac{1}{\operatorname{mes} X}\times \int_X \left[f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\kappa^{(\mathbf{y})}(\mathbf{z})\operatorname{mes} X - f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{y})\right]\,d\mathbf{z}\right| = \frac{L}{3}$, $UP_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm ker)}(M,n) = \frac{L}{3}$;

– для алгоритма 2 выполнение соотношений (5.15) и

$$UP_{\rm bias}^{(\mathbb{C},\rm pr)}(K) = \sup_{\mathbf{y}\in X}\left|\sum_{k=K+1}^{\infty}\left[\int_X f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\psi^{(k)}(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\right]\psi^{(k)}(\mathbf{y})\right| = \frac{L}{3},$$

$$UP_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm pr)}(M,n,K) = \frac{L}{3}.$$

Получение выражений для верхних границ $UP_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm ker)}(M,n)$ и $UP_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm pr)}(M,n,K)$ стохастических компонент погрешностей $\delta_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm ker)}(M,n)$ и $\delta_{\rm stoch}^{(\mathbb{C},\rm pr)}(M,n,K)$ требует отдельных специальных исследований.

Отметим, что метод 2 гарантирует заданный уровень погрешности $L > 0$, но не обеспечивает, вообще говоря, минимальность затрат $S(M,n)$ соответствующего алгоритма.

6. Заключение

В данной работе сформулирована задача построения экономичного компьютерного алгоритма приближения (с фиксированной точностью) неизвестной вероятностной плотности по заданной выборке. В связи с решением этой задачи проведен анализ многомерных аппроксимационных базисов (1.3) с точки зрения возможности их применения в ядерных и проекционных функциональных компьютерных алгоритмах 1 и 2. Отмечена целесообразность применения мультипликативных конструкций (4.1) и, в частности, устойчивых базисов аппроксимации Стренга–Фикса (4.2) (в первую очередь, мультилинейного базиса (2.4) совместно с простейшими коэффициентами (2.5)). Особо выделен общий частный случай алгоритмов 1 и 2 для кусочно-постоянных ядерных функций (2.1) и ортонормированных функций (2.2) соответственно — многомерный аналог полигона частот (алгоритм 3). Приведенные в работе соображения теории условной оптимизации функциональных алгоритмов обосновывают целесообразность широкого практического применения алгоритма 3 при решении задачи экономичной компьютерной непараметрической оценки плотности с фиксированной точностью по заданной выборке.

Литература

1. **Булгакова Т.Е., Войтишек А.В.** Сравнительный анализ функционального “ядерного” алгоритма и метода полигона частот // Тр. Междунар. конф. “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики”, Новосибирск, 1–5 июля 2019 г. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. — С. 65–71.

2. **Булгакова Т.Е., Войтишек А.В.** Критерии оптимизации “ядерного” алгоритма приближения вероятностной плотности // Тр. XV Междунар. Азиатской школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”, Новосибирск, 26–30 августа 2019 г. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. — С. 15–23.

3. **Voytishek A.V., Bulgakova T.E.** On conditional optimization of “kernel” estimators of densities // Proc. Fifth Inter. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation”, Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019. — Novosibirsk: NSTU publisher, 2019. — P. 152–159.

4. **Voytishek A.V., Bulgakova T.E.** Optimization of kernel estimators of probability densities // Communications in Computer and Information Science. — Springer, 2020. — Vol. 1145: Proc. Intern. Conf. on Optimization and Applications “OPTIMA 2019” / M. Jacimovic, M. Khachay, V. Malkova, M. Posypkin. — P. 254–266.

5. **Булгакова Т.Е., Войтишек А.В.** Условная оптимизация функционального вычислительного ядерного алгоритма приближения вероятностной плотности по заданной выборке // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 9. — С. 29–44. Перевод: Bulgakova T.E., Voytishek A.V. Conditional optimization of the computational kernel algorithm for approximating the probability density on the basis of a given sample // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 61, № 9. — P. 1401–1415. — DOI: 10.1134/S0965542521090062.

6. **Булгакова Т.Е.** Оптимизация функциональных вычислительных статистических оценок и алгоритмов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2020.

7. **Войтишек А.В., Шлымбетов Н.Х.** Экономичные алгоритмы приближения вероятностной плотности по заданной выборке // Информационные технологии и математической моделирование “ИТММ–2022”. — Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 2023. — С. 319–324. — (Материалы XXI Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова, 25–29 октября 2022 г.).

8. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Изд. центр “Академия”, 2006.
9. **Войтишек А.В.** Функциональные оценки метода Монте-Карло. — Новосибирск: НГУ, 2007.
10. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. — М.: Наука, 1975.
11. **Епанечников В.А.** Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. — 1969. — Т. 14, вып. 1. — С. 156–161.
12. **Ченцов Н.Н.** Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М.: Наука, 1972.
13. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
14. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1962.
15. **Милосердов В.В.** Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006.
16. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
17. **Бахвалов Н.С., Корнеев А.А., Чижонков Е.В.** Численные методы. Решение задач и упражнения. — М.: Лаборатория знаний, 2016.
18. **Voytishek A.V., Kablukova E.G.** Using the approximation functional bases in Monte Carlo methods // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2003. — Vol. 18, № 6. — P. 521–542.
19. **Войтишек А.В.** Дополнительные сведения о моделировании случайных элементов. — Новосибирск: НГУ, 2007.
20. **Литбеттер М., Ротсен Х., Лингрен Г.** Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989.
21. **Шкарупа Е.В.** Оценка погрешности и оптимизация метода полигона частот для глобального решения интегрального уравнения второго рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 4. — С. 612–627. Перевод: Shkarupa E.V. Error estimation and optimization for the frequency polygon method in the C-metric // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 38. — P. 590–603.

Поступила в редакцию 2 января 2024 г.
После исправления 10 января 2024 г.
Принята к печати 4 марта 2024 г.

Литература в транслитерации

1. **Bulgakova T.E., Voitishek A.V.** Sravnitel’nyi analiz funkcional’nogo “yadernogo” algoritma i metoda poligona chastot // Tr. Mezhdunar. konf. “Aktual’nye problemy vychislitel’noi i prikladnoi matematiki”, Novosibirsk, 1–5 iyulya 2019 g. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2019. — S. 65–71.
2. **Bulgakova T.E., Voitishek A.V.** Kriterii optimizacii “yadernogo” algoritma priblizheniya veroyatnostnoi plotnosti // Tr. XV Mezhdunar. Aziatskoi shkoly-seminara “Problemy optimizacii slozhnykh sistem”, Novosibirsk, 26–30 avgusta 2019 g. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2019. — S. 15–23.
3. **Voytishek A.V., Bulgakova T.E.** On conditional optimization of “kernel” estimators of densities // Proc. Fifth Inter. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation”, Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019. — Novosibirsk: NSTU publisher, 2019. — P. 152–159.

4. **Voytishek A.V., Bulgakova T.E.** Optimization of kernel estimators of probability densities // Communications in Computer and Information Science. — Springer, 2020. — Vol. 1145: Proc. Intern. Conf. on Optimization and Applications "OPTIMA 2019" / M. Jacimovic, M. Khachay, V. Malkova, M. Posypkin. — P. 254–266.
5. **Bulgakova T.E., Voitishek A.V.** Uslovnaya optimizaciya funkcional'nogo vychislitel'nogo yadernogo algoritma priblizheniya veroyatnostnoi plotnosti po zadannoi vyborke // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — T. 61, № 9. — S. 29–44. Perevod: Bulgakova T.E., Voytishek A.V. Conditional optimization of the computational kernel algorithm for approximating the probability density on the basis of a given sample // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 61, № 9. — P. 1401–1415. — DOI: 10.1134/S0965542521090062.
6. **Bulgakova T.E.** Optimizaciya funkcional'nykh vychislitel'nykh statisticheskikh ocenok i algoritmov: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.07. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2020.
7. **Voitishek A.V., Shlymbetov N.Kh.** Ekonomichnye algoritmy priblizheniya veroyatnostnoi plotnosti po zadannoi vyborke // Informacionnye tekhnologii i matematicheskoi modelirovanie "ITMM–2022". — Tomsk: Izd-vo Tomskogo gos. un-ta, 2023. — S. 319–324. — (Materialy XXI Mezhdunar. konf. im. A.F. Terpugova, 25–29 oktyabrya 2022 g.).
8. **Mikhailov G.A., Voitishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — M.: Izd. centr "Akademiya", 2006.
9. **Voitishek A.V.** Funkcional'nye ocenki metoda Monte-Karlo. — Novosibirsk: NGU, 2007.
10. **Bakhvalov N.S.** Chislennye metody. — M.: Nauka, 1975.
11. **Epanechnikov V.A.** Neparametricheskaya ocenka mnogomernoi plotnosti veroyatnosti // Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya. — 1969. — T. 14, vyp. 1. — S. 156–161.
12. **Chencov N.N.** Statisticheskie reshayushchie pravila i optimal'nye vyvody. — M.: Nauka, 1972.
13. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I.** Vvedenie v proekcionno-setochnye metody. — M.: Nauka, 1981.
14. **Fikhtengol'c G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 1. — M.: Nauka, 1962.
15. **Miloserdov V.V.** Diskretno-stokhasticheskie chislennye algoritmy so splain-vospolneniyami: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.07. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2006.
16. **Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** Metody splain-funkcii. — M.: Nauka, 1980.
17. **Bakhvalov N.S., Korneev A.A., Chizhonkov E.V.** CHislennye metody. Reshenie zadach i uprazhneniya. — M.: Laboratoriya znanii, 2016.
18. **Voytishek A.V., Kablukova E.G.** Using the approximation functional bases in Monte Carlo methods // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2003. — Vol. 18, № 6. — P. 521–542.
19. **Voitishek A.V.** Dopolnitel'nye svedeniya o modelirovanii sluchainykh elementov. — Novosibirsk: NGU, 2007.
20. **Litbetter M., Rotsen Kh., Lingren G.** Ekstremumy sluchainykh posledovatel'nostei i processov. — M.: Mir, 1989.
21. **Shkarupa E.V.** Ocenka pogreshnosti i optimizaciya metoda poligona chastot dlya global'nogo resheniya integral'nogo uravneniya vtorogo roda // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 4. — S. 612–627. Perevod: Shkarupa E.V. Error estimation and optimization for the frequency polygon method in the C-metric // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 38. — P. 590–603.