

УДК 535.8:621.37

Некоторые вопросы оптимальной фокусировки при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 2. Результаты численных расчетов

В.О. Троицкий*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 17.07.2015 г.

Теоретически рассмотрена задача о генерации второй гармоники (ГВГ) монохроматического пространственно когерентного параксиального излучения в однородных одноосных квадратично нелинейных кристаллах при фокусировке пучка в кристалл двумя скрещенными цилиндрическими линзами с разными фокусными расстояниями. Определена зависимость параметров оптимальной фокусировки от мощности основного излучения. В данной части статьи приведены основные результаты численных расчетов. Показано, что по мере увеличения мощности основного излучения параметры оптимальной фокусировки сначала изменяются незначительно. Затем, начиная с некоторой определенной мощности, зависящей от исходных условий задачи, максимум эффективности ГВГ начинает достигаться при все более слабой фокусировке. Само максимальное значение КПД при этом монотонно возрастает, стремясь, вероятно, к значению, близкому к 100% при бесконечном увеличении мощности.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, одноосный нелинейный кристалл, скрещенные цилиндрические линзы, оптимальная фокусировка; second harmonics generation, uniaxial nonlinear crystal, crossed cylindrical lenses, optimal focusing.

Введение

В предлагаемой статье теоретически рассмотрена задача о генерации второй гармоники (ГВГ) лазерного излучения в квадратично нелинейных одноосных кристаллах. Основная цель исследований состояла в том, чтобы на базе достаточно строгих расчетов попытаться установить, как от мощности лазерного излучения зависят величины оптимальных параметров фокусировки пучка в кристалл. Под термином «оптимальный» в данном случае понимается такой способ фокусировки, который при заданной мощности основного излучения обеспечивает максимальную эффективность (КПД) процесса ГВГ.

Работа состоит из двух частей. В первой [1] приводится математический аппарат, необходимый для проведения запланированных исследований. В качестве финального результата продемонстрирован подход, позволяющий получить аналитическое асимптотически точное решение системы нелинейных волновых уравнений, определяющих рассматриваемый нелинейный процесс. Во второй части аналитические решения, полученные в [1], используются для проведения численных расчетов применительно к конкретной ситуации (кристалл KDP, лазер генерирует на длине волны 578,2 нм), достаточно часто встречающейся на практике.

Результаты выполненных численных экспериментов, представленные здесь в виде семейства зависимостей КПД от величин параметров фокусировки, позволяют несколько продвинуться в понимании вопросов оптимизации процесса ГВГ и сделать некоторые полезные для практики выводы. Однако говорить о полной реализации обозначенной выше цели будет, безусловно, преждевременно. Задача оказалась несколько сложнее, чем предполагалось, и для ее удовлетворительного решения требуются дополнительные исследования, приблизительный перечень которых приводится в заключении.

По ходу дальнейшего изложения будет возникать необходимость сослаться на те или иные соотношения, полученные в [1], повторять которые здесь представляется нецелесообразным. Аналогичная ситуация и для ссылок на литературные источники, приведенные в [1]. В этой связи ниже при возникновении таких ситуаций будем использовать букву «А». Например, записи (А.14) и [А.5] будут означать, что речь идет о формуле (14) и ссылке под номером [5] в работе [1].

1. Исходные условия задачи

Все расчеты проводились в декартовой системе координат для полей, распространяющихся в положительном направлении оси Z . Под термином «кристалл» везде понимался слой одноосной квадратично

* Владимир Олегович Троицкий (qel@asd.iao.ru).

нелинейной среды, заключенный между плоскостями $z = 0$ и $z = L$, где L — длина кристалла. Оптическая ось среды считалась расположенной в плоскости XZ . За исключением тех случаев, когда речь идет о вычислении волновой расстройки Δ_k (А.3), для показателей преломления «о»- и «е»-волн с достаточной точностью предполагалось выполненным условие

$$n_o(\omega) \approx n^e(2\omega, \theta) \equiv n. \quad (1)$$

Пространство вокруг кристалла объявлялось вакуумом. Волны, отраженные от передней и задней граней кристалла, не учитывались, в то время как коэффициенты Френеля для преломления на этих границах раздела считались отличными от единицы.

Конкретизировать исходные условия будем, ориентируясь на ГВГ излучения желтой линии лазера на парах меди ($\lambda = 578,2$ нм) в кристалле KDP длиной $L = 3$ см. Лазерное излучение считаем импульсно-периодическим с частотой следования импульсов $F = 10$ кГц. Форму импульсов, для упрощения расчетов, полагаем прямоугольной с длительностью $\tau = 40$ нс. Используя дисперсионные уравнения, приведенные в [2], для кристалла KDP при указанной длине волны находим: угол синхронизма $\theta_c = 64,02^\circ$, угол двулучепреломления $\rho = -2,42 \cdot 10^{-2}$, коэффициент нелинейной связи $\sigma = 4,0 \cdot 10^{-4}$ с/(см · г)^{1/2}, для (1) выполняется $n \approx 1,51$. Если по условиям задачи $\theta \neq \theta_c$ ($\Delta_k \neq 0$), то принято говорить о ГВГ при наличии волновой расстройки, которую обычно характеризуют коэффициентом $\Delta_0 = \Delta_k L/2$.

Поле второй гармоники (ВГ) на входе в кристалл считаем отсутствующим, а граничное условие для основного излучения, исключительно для упрощения расчетов, — соответствующим гауссову пучку. Используя это условие и (А.12), находим, что на плоскости $L_0 = L + z_0$, удаленной на произвольное расстояние z_0 от выходной грани кристалла, решение линейной задачи распространения также будет гауссовым пучком, которое в общем случае — фокусировка двумя скрещенными цилиндрическими линзами, может быть представлено в виде (фазу на оси пучка не учитываем)

$$U_{1\Gamma}(x, y, L_0) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2}\right) \times \exp\left[ik\left(\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y}\right)\right], \quad (2)$$

где $A_0 = \sqrt{(16P_n/ca_x a_y)}$, $P_n = P_{cp}/\tau F$ — импульсная мощность излучения, P_{cp} — средняя мощность основного излучения после кристалла, c — скорость света; A_0 , a_x , a_y , R_x , R_y — функции, зависящие от дистанции L_0 .

Следуя [А.3], «жесткость» фокусировки будем характеризовать так называемыми параметрами фокусировки

$$\xi_x = L/(kn\rho_x^2), \quad \xi_y = L/(kn\rho_y^2), \quad (3)$$

где ρ_x , ρ_y — радиусы перетяжек основного излучения в плоскостях XZ и YZ .

Везде ниже, используя (2), будем считать, что обе перетяжки располагаются в одной плоскости $z = L/2$ (фокусировка в центр кристалла). Именно такое расположение перетяжки обеспечивает максимальный КПД [А.5].

Поскольку в перетяжке радиусы волнового фронта равны бесконечности по определению, постановку задания параметров фокусировки (т.е. радиусов перетяжки) позволяет с точностью до несущественного фазового множителя определить распределение поля в плоскости перетяжки, а значит, и в плоскости $z = L_0$. Таким образом, если известны параметры (3), то граничное условие (2) следует считать заданным. Сказанное справедливо для любого поперечного профиля распределения амплитуды, но для гауссова пучка величины a_x , a_y , R_x , R_y , входящие в (2), определяются точно [А.3]. Вопросы, связанные с заданием граничного условия при использовании фокусировки двумя скрещенными цилиндрическими линзами, более подробно рассмотрены в [А.5, А.9].

В дальнейшем большая часть расчетов будет проводиться для частного случая — ГВГ в Y -пучках [1]. Под этим термином понимается такая ситуация, когда учет дифракции взаимодействующих волн в плоскости XZ на дистанции $z = 0$ до $z = L_0$ не считается обязательным. Это, в частности, означает, что на указанной дистанции радиусы a_x и R_x из (2) остаются постоянными. Для упрощения вычислений полагается, что $R_x = \infty$. На практике модель Y -пучка можно использовать в том случае, когда излучение с $a_x \gg \lambda$ и $R_x = \infty$ фокусируется в плоскости YZ цилиндрической линзой. Указанный частный случай, по крайней мере для ГВГ излучения лазеров на парах меди, имеет большое практическое значение, поскольку именно в такой геометрии экспериментально реализованы самые высокие на сегодняшний день КПД нелинейного преобразования [3]. В пользу выбора этой модели свидетельствует и то обстоятельство, что в этом случае решение системы уравнений (А.27), (А.28) не требует чрезвычайно большого времени счета даже при использовании простых алгоритмов, рассмотренных в [1].

Для перехода к только что определенному частному случаю необходимо положить, что в плоскости XZ радиус пучка в пределах кристалла остается неизменным и, согласно (3), равным $a_x = \sqrt{L/(kn\xi_x)}$, а $R_x = \infty$. В силу сказанного вместо (2) для линейного поля на основной частоте получаем

$$U_{1\Gamma}(x, y, L_0) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2}\right) \exp\left[ik\frac{y^2}{2R_y}\right]. \quad (4)$$

Здесь необходимо отметить, что сам факт представления линейного поля в виде (4) никаких приближений в себе не содержит. Именно такой вид будет иметь строгое решение линейного волнового уравнения при условии, что положение перетяжки в плоскости XZ совпадает с плоскостью наблюдения L_0 . В силу этого, используя разные уравнения, задачу о ГВГ с граничным условием (4) можно решить и точно, и приближенно.

2. ГВГ в приближении заданного поля

Прежде всего, определяемся с параметрами оптимальной фокусировки при невысоких уровнях мощности основного излучения, т.е. в условиях применимости приближения заданного поля (ПЗП).

В общем случае [граничные условия заданы в виде (2)] задача сводится к оптимизации по трем параметрам — ξ_x , ξ_y и Δ_0 . Алгоритм расчетов выглядит следующим образом. Прежде всего, произвольно задаем величины параметров ξ_x , ξ_y , что позволяет конкретизировать граничное условие (2). Затем (2) подставляем в (А.22), задаем произвольно величину Δ_0 , вычисляем в (А.22) интегралы (численно и аналитически), находим амплитуду U_2 поля ВГ и определяем эффективность (или кпд) ГВГ по следующей формуле:

$$\eta = 100\% \frac{P_2}{P_1}, \quad (5)$$

где P_2 — средняя мощность ВГ (на выходе из кристалла); $P_1 = P_{cp}/(T_1 T_2)^2$ — средняя мощность лазерного излучения, измеренная до кристалла.

После этого варьируем в необходимых пределах величины параметров ξ_x , ξ_y , Δ_0 и находим такую их комбинацию, при которой эффективность (5) оказывается максимальной.

Результаты расчетов, проведенных по представленной схеме, для случая, когда $P_1 = 1,5$ Вт, приведены ниже:

$$\begin{aligned} (\xi_x)_{opt} = 0,34, \quad (\xi_y)_{opt} = 3,34, \quad (\Delta_0)_{opt} = -1,03, \\ \eta_m = 4,94\%. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что параметры (6) хорошо согласуются с результатами [А.5].

Второе, что необходимо сделать, оставаясь в рамках ПЗП, это определить границы применимости уравнений (А.27)–(А.30). Для этого в качестве $U_{1л}$ используем выражение (4) и подставляем его сначала в (А.22) — точное (в рамках ПЗП, разумеется) решение, а затем — в (А.30) и находим приближенное решение, в котором не будет учитываться дифракция в плоскости XZ и которое необходимо сравнить с точным решением.

Результат такого сравнения представлен на рис. 1 в виде зависимостей $(\xi_y)_{opt}$, $(\Delta_0)_{opt}$ и η_m от величины ξ_x , меняющейся в диапазоне от ~ 0 до 0,5. Понятно, что для каждого значения ξ_x кпд будет максимальным при своих значениях $(\xi_y)_{opt}$ и $(\Delta_0)_{opt}$.

Из рис. 1 (кривые 3) следует, что если бы задача состояла только в определении кпд и только в ПЗП, то использование (А.27)–(А.30) было бы оправдано для всех $\xi_x \leq 0,1$. Однако, как показывают расчеты, ошибка в определении фазы поля ВГ становится несущественной только при меньших значениях ξ_x . Здесь эти результаты не приводятся, но в дальнейшем, принимая их во внимание, будем полагать, что пренебрегать дифракцией в плоскости XZ допустимо

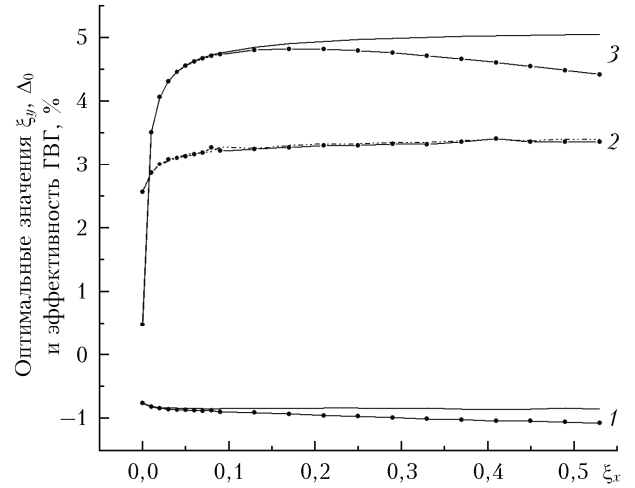


Рис. 1. Для точного (кривые с символами) и приближенного (без символов) решений зависимости $(\Delta_0)_{opt}$ (кривые 1), $(\xi_y)_{opt}$ (2) и кпд (3) от параметра ξ_x

только в том случае, когда $\xi_x \leq 0,02$. Сравнение кривых 2 показывает, что оптимальная фокусировка в плоскости YZ очень слабо зависит от того, учитывается или не учитывается дифракция в плоскости XZ . В то же время последняя заметно влияет на величину оптимальной волновой расстройки (кривые 1). Так и должно быть, поскольку учет дифракции в плоскости XZ увеличивает дифракционный сдвиг фазы и для его оптимальной компенсации волновая расстройка должна быть больше. Если бы дифракция не учитывалась вообще, то значение $(\Delta_0)_{opt}$ оказалось бы равным нулю.

Из проведенных расчетов следует, что при использовании (4) максимальная эффективность ГВГ реализуется при

$$\begin{aligned} (\xi_x)_{opt} = 0,18, \quad (\xi_y)_{opt} = 3,3, \quad (\Delta_0)_{opt} = -0,93, \\ \eta_m = 4,82\%. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), замечаем, что, как и полагалось, при фокусировке на заднюю грань в плоскости XZ (7) максимальный кпд оказывается несколько ниже, чем при фокусировке в центр кристалла (6).

Теперь в качестве граничного условия выберем (4) и предположим, что $\xi_x = 0,02$ — максимальное значение ξ_x , при котором, как было установлено выше, еще можно пренебречь дифракцией в плоскости XZ . Используем (4) и (А.30), проводим оптимизацию по двум параметрам ξ_y и Δ_0 — и находим, что максимальная эффективность ГВГ будет наблюдаться при

$$\begin{aligned} \xi_x = 0,02 \equiv \xi_{xp}, \quad (\xi_y)_{opt} = 3,0 \equiv \xi_{yp}, \\ (\Delta_0)_{opt} = -0,84 \equiv \Delta_{0p}, \quad \eta_m = 4,06\%. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая ситуации (6) и (8), приходим к следующему выводу. Максимальная эффективность ГВГ в Y -пучке (параметр ξ_x не может быть больше 0,02) оказывается несколько ниже (приблизительно на 20%), чем в ситуации (6). Однако не составляет труда

показать, что максимальная импульсная плотность мощности лазерного излучения в случае (6) равна ~ 130 МВт/см², а в случае (8) только ~ 30 МВт/см². При ГВГ мощного лазерного излучения возможность в разы уменьшить лучевую нагрузку на кристалл при сравнительно небольшом снижении эффективности является весьма важным позитивным обстоятельством, подчеркивающим практическую важность приближения (А.27)–(А.30).

3. ГВГ в существенно нелинейном режиме

Ограничиваемся частным случаем – ГВГ в Y -лучке. Тогда сформулированная задача сводится к приближенному решению (точное решение, по-видимому, не представляется возможным) системы уравнений (А.27), (А.28), которое будем искать в виде

$$U_{1,2}(x, y, z; L_0) = A_{1,2}(x, y, z; L_0) \exp\left(ik_{1,2} \frac{y^2}{2R_y}\right), \quad (9)$$

где $k_1 = k = \omega/c$, $k_2 = 2k$, радиус R_y определен в (2).

Задача должна решаться с «граничными» условиями

$$U_1(x, y, z = 0; L_0) = U_{1\Gamma}(x, y, L_0), \quad (10)$$

$$U_2(x, y, z = 0; L_0) = 0 \quad (11)$$

[в качестве (10) предполагается использовать (4)].

В [1] было показано, что искомое решение может быть представлено в виде рекуррентных формул [см. (А.50), (А.51)], позволяющих при заданных (10) и (11) определить вид комплексных амплитуд $A_{1,2}(x, y, z; L_0)$ из (9) для любого, но конечного, числа значений

$$z = z_m = (m - 1)\Delta, \quad m = 1, 2, \dots, N, N + 1, \quad \Delta = \frac{L}{N}. \quad (12)$$

Однако применимость, вообще говоря, приближенного решения (А.50), (А.51) должна, разумеется, подтверждаться какими-то проверками. Идеальный (прямой) вариант – показать, что при $N \rightarrow \infty$ функции (А.50), (А.51) будут асимптотически стремиться к точному решению. Но поскольку последнее, к сожалению, неизвестно, то необходимо использовать косвенные условия. В качестве таковых предлагаются следующие. Во-первых, полученное приближенное решение должно точно удовлетворять граничным условиям (10), (11). Во-вторых, это решение должно с заданной, вообще говоря, сколько угодно малой ошибкой удовлетворять исходной системе уравнений (А.27), (А.28). В-третьих, также со сколько угодно малой ошибкой, проверяемое решение должно удовлетворять закону сохранения энергии. Первое условие выполняется по определению, а для проведения проверки двух оставшихся необходимо сделать несколько уточнений.

В результате использования (А.50), (А.51) находим два набора функций – $A_{1,2}(x, y, z; L_0)$, с помощью которых легко определить (например, на вы-

ходе из кристалла) среднюю мощность основного излучения P_{A1} и ВГ P_{A2} , а также эффективность ГВГ (η_A):

$$(P_A)_{1,2} = \frac{c\tau F}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int A_{1,2}(x, y, z_{N+1} = L; L_0) \times \\ \times A_{1,2}^*(x, y, z_{N+1} = L; L_0) dx dy, \quad (13)$$

$$\eta_A = 100\% \frac{P_{A2}}{P_1}, \quad (14)$$

где τ , F , P_1 определены в (2); звездочка в верхнем индексе означает комплексное сопряжение.

Понятно, что закон сохранения энергии будет выполняться с заданной ошибкой Δ_P , если

$$\left| 100\% \frac{P_{cp} - P_{A1} - P_{A2}}{P_{cp}} \right| = \Delta_P, \quad (15)$$

где $P_{cp} = (T_1 T_2)^2 P_1$ – мощность основного излучения после кристалла.

В дальнейшем будем считать, что приближение (А.50), (А.51) удовлетворительно обеспечивает выполнение закона сохранения энергии, если $\Delta_P \leq 1\%$.

Для последней проверки найденные функции $A_{1,2}(x, y, z_m; L_0)$ подставляем в (9), а затем функции $U_{1,2}(x, y, z_m; L_0)$ – в систему уравнений (А.27), (А.28), которая легко приводится к виду

$$A_{1,2}(x, y, z_m; L_0) = V_{1,2}(x, y, z_m; L_0), \quad (16)$$

где после проведения численного интегрирования $V_{1,2}(x, y, z_m; L_0)$ становятся известными функциями. Понятно, что (А.50), (А.51) будут точным решением системы (А.27), (А.28), если для всех (x, y, z_m) равенства (16) будут выполняться точно.

Полная проверка комплексных равенств (16) представляется весьма сложной задачей, в связи с чем ограничимся упрощенным вариантом. Для функций $V_{1,2}(x, y, z_m; L_0)$, по аналогии с (13), (14), введем понятия средней мощности и кпд, которые обозначим через $(P_V)_{1,2}$ и η_V соответственно. В дальнейшем будем полагать, что решение (А.50), (А.51) с достаточной для практических оценок точностью удовлетворяет исходной системе уравнений (А.27), (А.28), если выполняется

$$\Delta_\eta = \left| 100\% \frac{\eta_A - \eta_V}{\eta_A} \right| \leq 1\%. \quad (17)$$

Результаты проверки по изложенной выше схеме показаны на рис. 2 в виде зависимостей ошибок Δ_P и Δ_η от числа N из (12). Расчеты сделаны для нескольких значений P_1 при (ξ_x, ξ_y, Δ_0) , взятых из (8). Хорошо видно, что величины ошибок убывают по мере увеличения числа N . Это позволяет заключить, что, как и предполагалось, функции (А.50), (А.51) можно считать асимптотически точным (при $N \rightarrow \infty$) решением системы уравнений (А.27), (А.28).

Убедившись в том, что решения (А.50), (А.51) удовлетворяют всем трем сформулированным проверочным условиям, можно приступать к реализации основной задачи, которая с учетом уже полученных

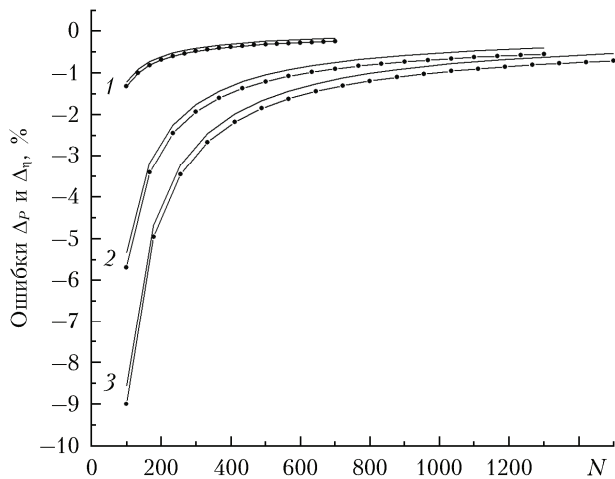


Рис. 2. Ошибки $\Delta\rho$ (кривые с символами) и $\Delta\eta$ (без символов) в зависимости от числа шагов N рекуррентного процесса. Мощность основного излучения: 20 (кривые 1), 120 (2) и 350 Вт (3)

результатов сводится к следующему. Необходимо определить, как оптимальные параметры $(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$, определенные в ПЗП, будут изменяться по мере увеличения мощности основного излучения.

На рис. 3 для нескольких комбинаций (ξ_x, ξ_y) представлены зависимости $(\Delta_0)_{opt}$ от величины средней мощности лазерного излучения. Для большей наглядности по оси X отложена величина $\ln(P_1)$, где P_1 измеряется в ваттах. Видно, что до некоторого уровня средней мощности (в нашем случае до ~ 50 Вт) величина $(\Delta_0)_{opt}$ остается практически постоянной и равной тому значению Δ_{0p} , которое получается в ПЗП. При увеличении мощности (от 50 Вт) величина оптимальной волновой расстройки монотонно убывает (по модулю), возможно, до нуля при $P_1 \rightarrow \infty$.

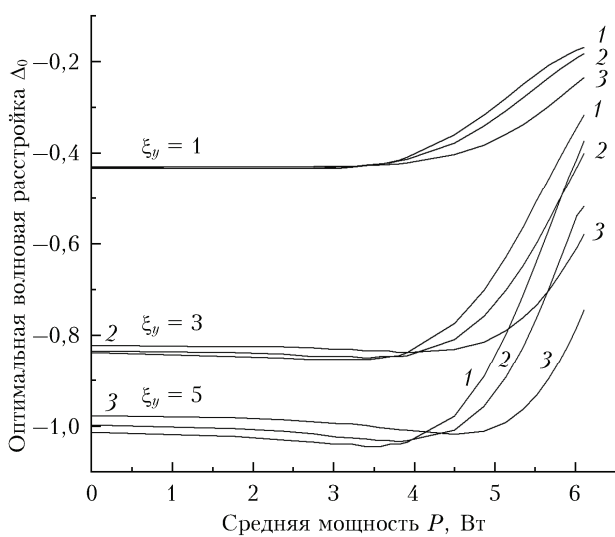


Рис. 3. Величина оптимальной волновой расстройки в зависимости от мощности основного излучения. Значение параметра $\xi_x = 0,02$ (кривые 1); 0,01 (2); 0,003 (3)

Необходимость учета этих результатов при исследовании высокоэффективной ГВГ демонстрирует рис. 4, где приведены зависимости кпд от средней мощности основного излучения при разных значениях волновой расстройки. Зависимости 1–3 получены при постоянных величинах Δ_0 , а для кривой 4 при каждом значении P_1 волновая расстройка выбиралась оптимальной (рис. 3). Параметры фокусировки во всех случаях были одинаковыми, взятыми из (8). Полученные результаты и результаты дополнительных исследований (здесь не приводятся) позволяют утверждать, что для каждой тройки значений (ξ_x, ξ_y, Δ_0) можно указать величину средней мощности $P_1 = P_m$, при которой эффективность ГВГ максимальна — $\eta = \eta_m$. Причем значения P_m и η_m сильно зависят от выбранной величины волновой расстройки.

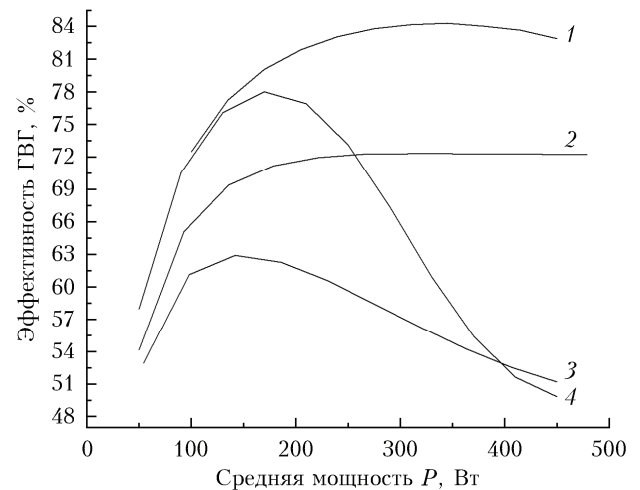


Рис. 4. Эффективность ГВГ как функция мощности основного излучения: $\Delta_0 = 0$ (кривая 1); $-0,2$ (2); $-0,84 = \xi_{yp}$ (3); $(\Delta_0)_{opt}$ (4)

Так как на практике существует техническая возможность подстроить волновую расстройку до ее оптимального значения, то для экспериментаторов более важной является априорная информация об оптимальных величинах параметров (ξ_x, ξ_y) .

На рис. 5 для нескольких значений средней мощности лазерного излучения показано поведение кпд при варьировании параметра ξ_y . Величина ξ_x во всех случаях остается постоянной и равной $\xi_{xp} = 0,02$. При проведении расчетов учитывалось, что каждой тройке значений (ξ_x, ξ_y, P_1) соответствует свое значение $(\Delta_0)_{opt}$. Полученные результаты показывают, что при увеличении мощности основного излучения вплоть до некоторого значения P_0 (в рассматриваемом случае $P_0 \approx 200$ Вт) величина $(\xi_y)_{opt}$ остается практически постоянной и равной ξ_{yp} из (8). Аналогичный вывод получается и для других значений $\xi_x < 0,02$, по крайней мере в качественном плане детальное исследование зависимостей $P_0(\xi_x)$ пока не проводилось.

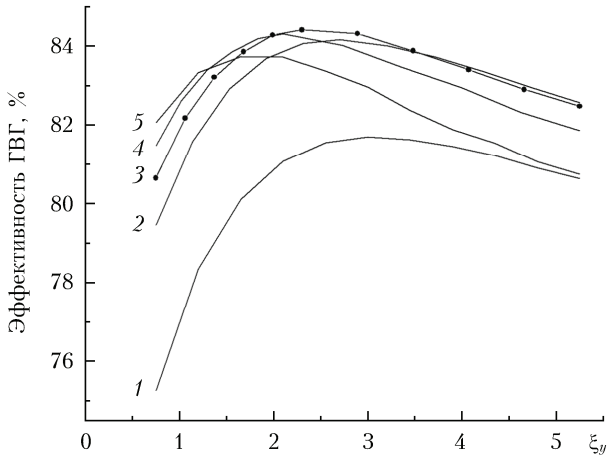


Рис. 5. Зависимость эффективности ГВГ от параметра ξ_y . Мощность основного излучения: 200 (кривая 1); 300 (2); 350 (3); 400 (4) и 450 Вт (5)

Из рис. 5 видно, что функции $\eta(\xi_y)$ оказываются достаточно медленными, поэтому возникает вопрос: нельзя ли считать, хотя бы приближенно, что оптимальная величина параметра ξ_y вообще не зависит от мощности? Для ответа на этот вопрос обратимся к таблице (пока интерес представляют только первые четыре столбца), в которой для выбранных мощностей P_1 (см. рис. 5) приведены значения эффективности ГВГ $\eta_y = \eta_y(\xi_x = 0,02, \xi_y = (\xi_y)_{opt}, P_1)$ и $\eta_p = \eta_p(\xi_x = 0,02, \xi_y = \xi_{yp} = 3, P_1)$, а также ошибки $\Delta_y = 100\%(\eta_p - \eta_y)/\eta_p$. Значения η_y — это максимальные для каждой P_1 значения КПД, взятые из рис. 5, а η_p получены в результате дополнительных расчетов с использованием (8) и при оптимизации волновой расстройки.

Ошибки, возникающие при использовании приближенного варианта расчетов максимальной эффективности ГВГ

P_1 , Вт	η_p , %	η_y , %	Δ_y , %	η_m , %	Δ_m , %
200	81,70	81,70	0,00	81,70	0,00
300	84,10	84,15	-0,06	84,20	-0,13
350	84,25	84,40	-0,18	84,80	-0,65
400	83,84	84,30	-0,54	85,22	-1,64
450	82,96	83,73	-0,92	85,53	-3,10

Результаты, представленные в таблице и на рис. 5, позволяют сделать следующий вывод. Если параметр $\xi_x = 0,02$, то для мощностей накачки $P_1 < P_0 \approx 200$ Вт величина $(\xi_y)_{opt}$ остается постоянной и равной тому значению ξ_{yp} , которое получается в ПЗП. Если оказывается, что $P_0 < P_1 < P_{00}$, то величина $(\xi_y)_{opt}$ будет меньше ξ_{yp} . Однако для практических оценок можно полагать, что, по-прежнему, но уже приближенно, выполняется $(\xi_y)_{opt} \approx \xi_{yp}$. При использовании такого приближения ошибка в определении максимального КПД не будет превышать 1%. Отметим, что при $\xi_x = 0,02$ в рассматриваемом случае $P_{00} \approx 450$ Вт. Наконец, если выполняется условие $P_1 > P_{00}$, то только что предложенное приближение уже будет приводить к достаточно заметной ошибке и значения $(\xi_y)_{opt}$ необходимо каждый раз находить, строя графики, аналогичные приведенным на рис. 5.

Для завершения намеченных исследований остается определить, как будет изменяться параметр фокусировки ξ_x по мере увеличения мощности основного излучения. Строгое решение этой задачи вполне возможно, но потребует большого времени расчетов. В связи с этим воспользуемся приближением, в рамках которого вместо $\xi_y = (\xi_y)_{opt}(\xi_x, P_1)$ будем использовать параметры $\xi_y = \xi_{yp}(\xi_x)$, определенные в ПЗП и представленные на рис. 1. Таким образом, все предварительные расчеты удается свести к определению только функции $\Delta_0 = (\Delta_0)_{opt}(\xi_x, \xi_y, P_1)$, т.е. определение зависимостей $\eta = \eta(\xi_x)$ займет не больше времени, чем расчеты кривых на рис. 5. Такие зависимости, построенные для тех же значений мощности P_1 основного излучения, что и на рис. 5, показаны на рис. 6. Понятно, что значения КПД (рис. 6), рассчитанные для любой пары значений (ξ_x, P_1) , не являются максимальными в силу использования упомянутого выше приближения. Кроме того, их отличия от таких максимально возможных значений будут, как следует из таблицы, увеличиваться по мере роста мощности.

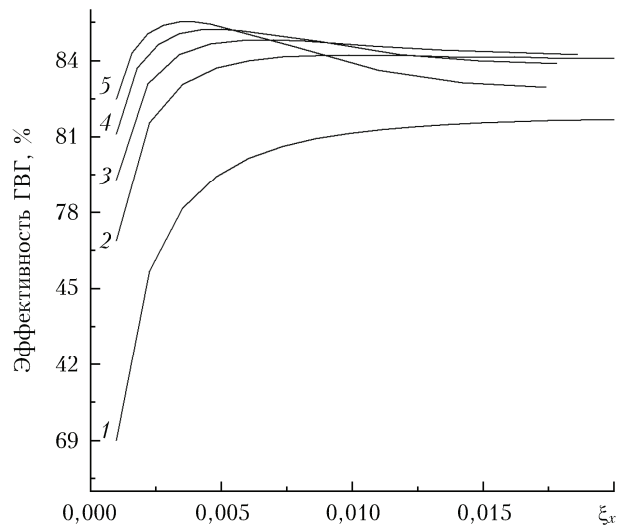


Рис. 6. Зависимость эффективности ГВГ от параметра ξ_x . Мощность основного излучения: 200 (кривая 1); 300 (2); 350 (3); 400 (4) и 450 Вт (5)

Обратившись к результатам, представленным на рис. 6, отметим следующие моменты. Так же как и для ситуации, рассмотренной на рис. 5, оптимальное значение параметра ξ_x для значений мощности $P_1 < P_0 \approx 200$ Вт с большой точностью можно считать постоянным и равным $\xi_{xp} = 0,02$, т.е. той величине, которая получается в ПЗП [см. (8)]. Параметр ξ_y при этом остается равным 3, т.е. совпадает и с ξ_{yp} из (8), и со своим оптимальным значением (см. рис. 5). При дальнейшем увеличении мощности параметр $(\xi_x)_{opt}$ начинает заметно уменьшаться, соответственно (см. рис. 1) уменьшается и ξ_{yp} , который в этих расчетах используется в качестве приближенного представления для $(\xi_y)_{opt}$. Таким образом, результаты, показанные на рис. 6, приходят в соответствие со сказанным во введении в [1]. По мере уве-

личения мощности основного излучения оптимальные параметры фокусировки непрерывно уменьшаются, стремясь, предположительно, к нулю при $P_1 \rightarrow \infty$. К этому в общем известному факту можно добавить только то, что оптимальное значение параметра ξ_x уменьшается, как видно из рис. 5 и рис. 6, в разы быстрее, чем величина $(\xi_y)_{opt}$. Представляется важным отметить и то, что в ситуации на рис. 5 при $P_1 \approx 350$ Вт зависимость $\eta(P_1)$ достигает своего максимума, в то время как кривые на рис. 6 свидетельствуют о непрерывном (с увеличением P_1) росте эффективности ГВГ. Связано это, по-видимому, с тем, что расчеты для рис. 5 проводились при фиксированном значении параметра ξ_x , а кривые на рис. 6 получены при оптимизации обоих параметров фокусировки.

Посмотрим, как сильно отличаются максимальные КПД (η_m), определяемые для каждого значения P_1 (см. рис. 6), от величин η_p (см. таблицу), рассчитанных для фиксированных значений $\xi_x = 0,02$ и $\xi_y = 3$. Эти отличия будем характеризовать ошибками $\Delta_m = 100\%(\eta_p - \eta_m)/\eta_p$. Значения $\eta_m(P_1)$ и $\Delta_m(P_1)$ показаны в двух последних столбцах таблицы. Полученные результаты позволяют нам сделать следующий вывод. Если оказывается, что $P_1 < P_{00} \approx 350$ Вт, то для оценки максимально возможного КПД ($\eta_m(P_1)$) в качестве оптимальных параметров фокусировки можно использовать результаты, полученные в ПЗП (см. рис. 1). Возникающая при этом ошибка в определении η_m не превышает 1% (при $P_1 \approx 350$ Вт), уменьшается при уменьшении P_1 и становится несущественной при $P_1 < P_0 \approx 200$ Вт. Подчеркнем, что возможность использования таких приближенных оценок связана не с тем, что оптимальные значения (ξ_x, ξ_y, Δ_0) мало отличаются от $(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$, полученных в ПЗП и представленных на рис. 1, а с тем, что величина КПД достаточно медленно меняется при варьировании оптимизируемых параметров. Например, при $P_1 \approx 350$ Вт параметры $(\xi_x)_{opt}$ и $(\xi_y)_{opt}$, которые можно оценить, обратившись к рис. 5 и 6, отличаются от оптимальных значений $\xi_x = 0,02$, $\xi_y = 3$, определенных в ПЗП, приблизительно в 3 и 1,5 раза соответственно.

4. Обсуждение результатов

Подведем итог проведенных исследований. Одна из важных прикладных задач теории генерации гармоник состоит в определении параметров такой фокусирующей системы, которая обеспечивает максимальную эффективность ГВГ лазерного излучения в нелинейном кристалле. Понятно, что все необходимые параметры основного излучения и нелинейной среды считаются заданными. В первой части предлагаемой работы [1] приведен математический аппарат, позволяющий решить эту задачу при следующих достаточно типичных условиях. Лазерное излучение является монохроматическим и пространственно когерентным, а нелинейный кристалл — однородным и одноосным. Проблема состоит в том, что процесс определения оптимальных параметров фокусировки

с достаточной точностью (например, $\pm 1\%$) потребует длительного времени работы программы. Логично предположить, что во многом именно это обстоятельство сильно ослабит желание экспериментатора заняться получением априорной теоретической информации.

Отмеченная «техническая» проблема полностью снимается, если оптимизацию процесса ГВГ можно проводить в приближении заданного поля, т.е. при достаточно низких мощностях лазерного излучения. Связано это в первую очередь с использованием подхода, рассмотренного в [1], который позволяет в ПЗП задачу отыскания поля ВГ свести к вычислению одного двукратного интеграла, что уменьшает приблизительно на 2–3 порядка (в зависимости от мощности излучения) время расчетов оптимальных параметров фокусировки. Таким образом, становится понятным практическое значение приведенных выше результатов численного моделирования, которые позволяют утверждать, что оптимальные параметры фокусировки, определенные в ПЗП, будут обеспечивать эффективность ГВГ, близкую к максимальной, и при мощности накачки, существенно превосходящей «разрешенные для ПЗП» значения. Рассмотрим этот момент более детально.

Пусть P — мощность лазерного излучения, η_m — максимально возможная (для выбранной мощности P) эффективность ГВГ, которая достигается при оптимальном выборе параметров $(\xi_x, \xi_y, \Delta_0) = (\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt}$, а $(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$ — оптимальные значения параметров, рассчитанные в ПЗП. Тогда, как показывают представленные выше результаты, можно указать три «пограничных» значения мощности — P_1 , P_2 и P_3 , при пересечении которых методы решения оптимизационной задачи претерпевают качественные изменения:

а) $P < P_1$.

В этом случае строгое решение задачи $((\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt})$ практически не отличается от приближенного решения $(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$. Соответственно $\eta_m((\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt}) = \eta(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$.

б) $P_1 < P < P_2$.

При этом с хорошей точностью выполняется $(\xi_x, \xi_y)_{opt} = (\xi_{xp}, \xi_{yp})$, но $|(\Delta_0)_{opt}| < |\Delta_{0p}|$. Таким образом, $\eta_m((\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt}) = \eta(\xi_{xp}, \xi_{yp}, (\Delta_0)_{opt})$.

в) $P_2 < P < P_3$.

В этой ситуации $(\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt}$ заметно отличаются от $(\xi_{xp}, \xi_{yp}, \Delta_{0p})$, но с ошибкой меньше 1% выполняется $\eta_m((\xi_x, \xi_y, \Delta_0)_{opt}) \approx \eta(\xi_{xp}, \xi_{yp}, (\Delta_0)_{opt})$.

г) $P > P_3$.

В данном случае использование приближенных значений (ξ_{xp}, ξ_{yp}) будет уже приводить к заметным ошибкам в определении максимально возможного КПД, в силу чего задача оптимизации должна решаться строго.

Для задачи о ГВГ в Y-пучке при выбранных исходных условиях (см. разд. 1) находим «пограничные» значения мощности (см. комментарии к рис. 5 и 6) чисто эмпирическим путем: $P_1 \sim 50$ Вт, $P_2 \sim 200$ Вт, $P_3 \sim 350$ Вт. Важно отметить, что по крайней мере для рассмотренной задачи именно при мощности $P \sim P_3 \sim 350$ Вт (см. рис. 3) зависимость

$\eta(\xi_x = \xi_{xp} = 0,02, \xi_y = \xi_{yp} = 3, \Delta_0 = (\Delta_0)_{opt}, P)$ достигает своего максимального значения. Не плохо было бы установить строгую связь значений $P_{1,2,3}$ с заданными исходными условиями задачи, но в настоящий момент это не представляется возможным. Однако, если иметь в виду практические цели, то априорная информация об этих «пограничных» величинах мощности, по-видимому, и не требуется. Попробуем показать это на конкретном примере.

Предположим, что задача состоит в экспериментальной реализации максимальной эффективности ГВГ. Тогда для ее решения можно предложить следующую методику, базирующуюся на приведенных в настоящей статье результатах. Прежде всего теоретически (в рамках ПЗП) определяются параметры (ξ_{xp}, ξ_{yp}) и собирается экспериментальная установка с фокусирующей системой из двух скрещенных цилиндрических линз, фокусные расстояния которых находятся с помощью (ξ_{xp}, ξ_{yp}) . Затем на этой установке определяется зависимость $\eta(P)$, где для каждого значения P экспериментально подбирается значение $(\Delta_0)_{opt}$, которое должно уменьшаться по мере увеличения P . До тех пор пока увеличение мощности лазерного излучения сопровождается ростом КПД используемую фокусирующую систему можно с разумной ошибкой (см. таблицу) считать оптимальной. Если КПД, пройдя свой максимум, начинает падать, то это будет означать, что реализуется ситуация «г», и для дальнейшего увеличения КПД требуется уменьшение параметров фокусировки, причем ξ_x должен уменьшаться быстрее, чем ξ_y . Отметим, что эта методика, строго говоря, будет справедлива только в том случае, если экспериментально исследуется ГВГ в Y-пучке.

Из представленных результатов следуют две интересные закономерности. (К сожалению, первая из них была проверена не полностью.) 1. Если хотя бы один из параметров (ξ_x, ξ_y, Δ_0) фиксирован, то зависимость $\eta(P)$ имеет максимум. Это заявление подтверждено для случаев, когда $\Delta_0 = \text{const}$ (см. рис. 3) и $\xi_x = \text{const}$ (см. рис. 5). Вполне вероятно, что $\eta(P)$ будет иметь максимум и в случае $\xi_y = \text{const}$. 2. Если по мере увеличения мощности все три параметра изменяются оптимальным образом, то зависимость $\eta(P)$ должна асимптотически стремиться к 100% при $P \rightarrow \infty$ (см. рис. 6).

Заключение

Отметим несколько моментов, которые не позволяют говорить о том, что результаты проведенных исследований закрывают все вопросы общей теории генерации гармоник, связанные с оптимизацией фокусирующей системы.

Прежде всего заметим, что общность приведенных в настоящей статье результатов и сформулированных выводов сильно ограничивается принятым решением — рассматривать частный случай, т.е. ГВГ в Y-пучке, в рамках которого дифракция полей в главной оптической плоскости XZ считается несущественной и в расчетах не учитывается. С боль-

шой вероятностью можно предположить, что в качественном плане основные сделанные в работе выводы будут справедливы и для общего случая — строгого учета дифракции. Скорее всего, при таких точных расчетах изменятся (в сторону уменьшения) только «пограничные» значения мощностей $P_{1,2,3}$, введенные в разд. 4. Тем не менее понятно, что это только предположения, которые требуют подтверждения конкретными исследованиями. Их проведение вполне возможно, но для этого необходимо использовать другие более сложные методы и алгоритмы.

Второй принципиально важный момент, влияющий уже на «практичность» приведенных результатов, связан с тем, что все расчеты проводились без учета так называемой предельно допустимой импульсной плотности мощности S_m . Эта величина является одной из характеристик нелинейного кристалла и определяет максимальную импульсную плотность мощности S , которая еще может быть использована для ГВГ. При $S > S_m$ возникает большая вероятность повредить кристалл, поэтому такие ситуации на практике необходимо исключать. В теории появление дополнительного условия $S \leq S_m$ приведет к принципиальным изменениям методики решения оптимизационной задачи, но, по-видимому, существенно отразится на количественной стороне получаемых результатов. Причем понятно, что указанные отличия будут тем заметнее, чем больше будет мощность лазерного излучения, для которой требуется оценить максимальный КПД и, следовательно, определить оптимальные параметры фокусировки. Описание результатов такой уточненной теории не вмещается в рамки настоящей статьи, поэтому указанные вопросы здесь не затрагивались.

На величину оптимальных параметров фокусировки должна существенно влиять пространственная когерентность лазерного излучения, участвующего в процессе ГВГ. Этот момент становится, по-видимому, особенно актуальным, если иметь в виду лазеры на парах металлов (работающие с неустойчивым резонатором), чье излучение состоит из нескольких компонент с сильно отличающейся когерентностью. Вопрос о возможности адаптировать полученные в [1] аналитические решения для ГВГ частично когерентного излучения пока остается открытым.

Учитывая отмеченные моменты, можно сделать вывод, что полученные результаты позволяют выявить (но только в качественном плане) основные закономерности изменения оптимальных параметров фокусировки при увеличении мощности лазерного излучения. Количественная сторона этих вопросов будет сильно зависеть от выбранных исходных условий и сделанных предположений.

1. *Троицкий В.О.* Некоторые вопросы оптимальной фокусировки при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 1. Математический аппарат // Оптика атмосф. и океана. 2015. Т. 28, № 10. С. 934–940.
2. *Никогосян Д.Н.* Кристаллы для нелинейной оптики // Квант. электрон. 1977. Т. 4, № 1. С. 5–25.
3. *Coutts D.W.* Optimization of line-focusing geometry for efficient nonlinear frequency conversion from copper-vapor lasers // IEEE J. Quant. Electron. 1995. V. 31, N 12. P. 2208–2214.

V.O. Troitskii. Some questions of optimal focusing during second harmonics generation in nonlinear crystals. Part 2. Results of numerical calculations.

The problem of second harmonics generation (SHG) of monochromatic spatially coherent paraxial radiation in homogeneous quadratic nonlinear uniaxial crystals is considered theoretically. It is assumed that the laser radiation is focused into a crystal by two crossed cylindrical lenses with different focal lengths. The aim of this study is to find dependences of optical focusing parameters on the primary radiation power. The work consists of two parts. Part 2 presents main results of numerical calculations. It is shown that optimal focusing parameters first vary insignificantly as the primary radiation power increases. Then, beginning from a certain power value, which depends on the initial conditions of the problem, the SHG efficiency maximum becomes attainable at weaker and weaker focusing, and the value of the efficiency maximum monotone increases, probably tending to a value close to 100% under an infinite increase in the power.