УДК 532.528

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ НАНОЖИДКОСТИ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

Т. Хайат[*,**], М. Рашид[*], М. Имтиаз[*], А. Альсаеди[**]

[*] Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан
[**] Университет Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия
E-mails: fmgpak@gmail.com, madiha.rashid@ymail.com, mi_qau@yahoo.com, ali.qau1987@gmail.com

Исследуется задача о тепломассообмене в магнитогидродинамическом течении вязкой наножидкости, насыщающей пористую среду, на экспоненциально растягивающейся излучающей пластине. Исходные дифференциальные уравнения сводятся к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Показано, что стратификация оказывает влияние на локальные числа Нуссельта и Шервуда.

Ключевые слова: магнитогидродинамическая наножидкость, экспоненциально растягивающаяся пластина, пористая среда, двойная стратификация.

DOI: 10.15372/PMTF20170204

Введение. В последние годы исследованию наножидкостей посвящается большое количество работ. В работе [1] экспериментально установлено, что добавление наночастиц в базовую жидкость приводит к существенному увеличению ее теплопроводности. В [2] представлена модель конвективного переноса в наножидкостях с учетом броуновского движения и термофореза. Течения наножидкостей, используемых в таких приложениях, как производство полимеров, бумаги, пищевых продуктов, выращивание кристаллов, микроэлектроника и др., изучались также в работах [3–12].

Интерес к исследованию течения жидкости на растягивающейся поверхности обусловлен его использованием в различных технологических процессах (экструзия полимеров, нанесение полимерных пленок и т. д.). В работе [13] изучалось течение, вызванное движением пластины. В [14–19] исследовался пограничный слой на растягивающейся пластине в предположении, что ее скорость пропорциональна расстоянию от точки покоя. Однако в реальности растяжение пластины необязательно является линейным. В работе [20] рассматривался тепломассообмен в течении в пограничном слое на непрерывно растягивающейся по экспоненциальному закону пластине. В [21] исследовалось влияние скольжения на магнитогидродинамическое (МГД) течение в пограничном слое на экспоненциально растягивающейся пластине с учетом вдува (отсоса) и теплового излучения. В [22] изучалось МГД-течение наножидкости на экспоненциально растягивающейся пластине с конвективными граничными условиями. Течение жидкости Кэссона и теплообмен на пористой экспоненциально растягивающейся пластине с учетом теплового излучения исследовались в [23]. Изучению трехмерного течения вязкоупругой жидкости и массообмена на экспоненциально растягивающейся пластине посвящена работа [24].

Стратификация, имеющая место при тепломассообмене, обусловлена изменениями температуры, концентрации или различием плотностей жидкостей. Автор работы [25] показал, что на стратифицированной по температуре экспоненциально растягивающейся пластине возникает МГД-течение вязкой жидкости. В [26] исследовалось влияние температурной стратификации на смешанное конвективное течение жидкости Максвелла на растягивающейся пластине. Стратифицированное по температуре течение жидкости Олдройда-Б с точкой торможения изучалось в работе [27]. В [28] рассматривалось влияние двойной стратификации (по температуре и массе (плотности)) на смешанное конвективное течение наножидкости на вертикальной пластине. В [29] изучалось свободное конвективное МГД-течение микрополярной жидкости с двойной стратификацией.

Целью настоящей работы является исследование течения наножидкости на экспоненциально растягивающейся пластине, помещенной в стратифицированную среду, при наличии излучения и вязкой диссипации. С использованием метода гомотопического анализа (МГА) исходные уравнения движения, энергии и концентрации сводятся к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются с помощью сходящихся рядов [30–36]. Проанализировано влияние различных параметров на скорость, температуру и концентрацию, а также на скорость тепломассопереноса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой наножидкости на экспоненциально растягивающейся пластине, погруженной в пористую среду с двойной стратификацией. Прямоугольная система координат выбирается таким образом, что ось x направлена вдоль пластины, ось y перпендикулярна ей. Жидкость находится в области $y > 0$. Течение вызвано растяжением пластины по экспоненциальному закону. В рассматриваемой модели наножидкости учитываются броуновское движение и термофорез. Пластина растягивается со скоростью $U_w(x) = U_0\,\mathrm{e}^{x/L}$. Течение в пористой среде описывается законом Дарси. Однородное магнитное поле напряженностью B_0 приложено в направлении, поперечном по отношению к направлению потока. В предположении малости магнитного числа Рейнольдса индуцированным магнитным полем пренебрегается. Полагается, что температура и концентрация на стенках и на бесконечном расстоянии экспоненциально стратифицированы и задаются в виде $T_w(x) = T_0 + b\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$, $C_w(x) = C_0 + a\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$, $T_\infty(x) = T_0 + c\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$, $C_\infty(x) = C_0 + d\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$ соответственно (a, b, c, d — константы).

С использованием стандартных приближений пограничного слоя исходные уравнения для наножидкости с учетом теплового излучения и вязкой диссипации запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\Big(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu}{K}\,u - \sigma B_0^2 u; \tag{2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{(\rho C_p)_f}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f}\Big[D_B\,\frac{\partial C}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_T}{T_\infty}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2\Big] + \\ + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{k^*(\rho C_p)_f}\,\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\mu}{(\rho C_p)_f}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2; \tag{3}$$

$$u\,\frac{\partial C}{\partial x} + v\,\frac{\partial C}{\partial y} = D_B\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T}{T_\infty}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Уравнения (1)–(4) представляют собой закон сохранения массы, закон сохранения импульса, закон сохранения энергии и уравнение неразрывности для концентрации соответственно. Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях x, y; T — температура; C — объемная доля наночастиц; σ — электрическая проводимость жидкости; k — теплопроводность жидкости; ρ — плотность; μ — динамическая вязкость; K — проницаемость пористой среды; $(\rho C_p)_f$ — теплоемкость жидкости; $(\rho C_p)_p$ — теплоемкость материала наночастиц; D_B — коэффициент броуновской диффузии; D_T — коэффициент термофореза; T_∞ — температура окружающей жидкости. Используя аппроксимацию Росселанда, получаем выражение

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*}\,\frac{\partial T^4}{\partial y},$$

где σ^* — постоянная Стефана — Больцмана; k^* — коэффициент поглощения. С использованием разложения в ряд Тейлора запишем

$$T^4 = 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4.$$

Граничные условия представим в форме

$$\begin{gathered} y = 0\colon \quad u = u_w = U_0\,\mathrm{e}^{x/L},\ v = 0,\ T = T_w = T_0 + b\,\mathrm{e}^{x/(2L)},\ C = C_w = C_0 + a\,\mathrm{e}^{x/(2L)}, \\ y \to \infty\colon \quad u \to 0, \quad v \to 0,\ T = T_\infty = T_0 + c\,\mathrm{e}^{x/(2L)},\ C = C_\infty = C_0 + d\,\mathrm{e}^{x/(2L)}\,. \end{gathered} \tag{5}$$

С учетом соотношений

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_0}{2\nu_f L}}\,\mathrm{e}^{x/(2L)}, \qquad v = -\sqrt{\frac{\nu_f U_0}{2L}}\,\mathrm{e}^{x/(2L)}\,[f(\eta) + \eta f'(\eta)],$$

$$u = U_0\,\mathrm{e}^{x/L}\,f'(\eta), \qquad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_0}, \qquad \varphi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_0}$$

уравнение (1) обращается в тождество, из уравнений (2)–(5) получаем

$$\begin{gathered} f''' - (M + \lambda)f' - 2f'^2 + ff'' = 0, \\ \mathrm{Pr}^{-1}(1 + 4R/3)\theta'' + N_b\theta'\varphi' + N_t\theta'^2 + \mathrm{Ec}\,f''^2 - S_t f' - f'\theta + \theta' f = 0, \\ \varphi'' + (N_t/N_b)\theta'' + \mathrm{Sc}\,(f\varphi' - f'\varphi) - \mathrm{Sc}\,S_m f' = 0, \\ f'(0) = 1, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1 - S_m, \quad \theta(\infty) = 0, \qquad \varphi(0) = 1 - S_t, \quad \varphi(\infty) = 0 \end{gathered}$$

(η — переменная подобия; $f'(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ — безразмерные скорость, температура и концентрация; штрих означает производную по η). Параметр пористости λ, число Гартмана M, число Прандтля Pr, параметр излучения R, число Эккерта Ec, параметр температурной стратификации S_t, параметр концентрационной стратификации S_m, параметр броуновского движения N_b, параметр термофореза N_t и число Шмидта Sc определяются следующим образом:

$$\lambda = \frac{\nu_f L}{KU_0}\,\mathrm{e}^{-x/L}, \quad M = \frac{2\sigma B_0^2 L}{\rho_f U_0}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu_f(\rho C_p)_f}{k_f}, \quad R = \frac{4\sigma^* T_\infty^3}{k^* k},$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U_0^2\,\mathrm{e}^{2x/L}}{b\,\mathrm{e}^{x/(2l)}(\rho C_p)_f}, \quad S_t = \frac{c}{b}, \quad S_m = \frac{d}{a}, \quad N_b = \frac{\tau D_B(C_w - C_0)}{\nu},$$

$$N_t = \frac{\tau D_T(T_w - T_0)}{\nu T_\infty}, \qquad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D_B}.$$

Локальный коэффициент поверхностного трения C_f, число Нуссельта Nu и число Шервуда Sh задаются в виде

$$C_f = \frac{\tau_w|_{y=0}}{(1/2)\rho U_0^2\,\mathrm{e}^{2x/L}}, \qquad \mathrm{Nu} = -\frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \qquad \mathrm{Sh} = -\frac{xq_m}{D_B(C_w - C_\infty)},$$

$$C_f\sqrt{\frac{\mathrm{Re}_x}{2}} = f''(0), \quad \mathrm{Nu}\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = -\frac{1}{1-S_t}\,\theta'(0), \quad \mathrm{Sh}\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = -\frac{1}{1-S_m}\,\varphi'(0),$$

где $\mathrm{Re}_x = U_0\,\mathrm{e}^{x/L}\,x/\nu$ — локальное число Рейнольдса.

2. Алгоритм решения задачи. Рассматриваемая задача решается с использованием МГА.

2.1. *Задача деформации нулевого порядка.* Выберем начальные функции $f_0(\eta)$, $\theta_0(\eta)$, $\varphi_0(\eta)$ и линейные операторы L_1, L_2, L_3 в виде

$$f_0(\eta) = 1 - \mathrm{e}^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = (1 - S_t)\,\mathrm{e}^{-\eta}, \quad \varphi_0(\eta) = (1 - S_m)\,\mathrm{e}^{-\eta},$$
$$L_1(f) = f''' - f', \quad L_2(\theta) = \theta'' - \theta, \quad L_3(\varphi) = \varphi'' - \varphi.$$

Операторы обладают свойствами

$$L_1[C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\eta} + C_3\,\mathrm{e}^{-\eta}] = 0, \quad L_2[C_4\,\mathrm{e}^{\eta} + C_5\,\mathrm{e}^{-\eta}] = 0, \quad L_3[C_6\,\mathrm{e}^{\eta} + C_7\,\mathrm{e}^{-\eta}] = 0$$

($C_1, \ldots, C_7$ — константы). Операторы N_f, N_θ, N_φ определяются следующим образом:

$$N_f[\hat f(\eta;\,p)] = \frac{\partial^3 \hat f(\eta,p)}{\partial\eta^3} - (M+\lambda)\,\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta} + \hat f(\eta,p)\,\frac{\partial^2 \hat f(\eta,p)}{\partial\eta^2} - 2\Big(\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta}\Big)^2,$$

$$N_\theta[\hat\theta(\eta,p), \hat\varphi(\eta;p), \hat f(\eta,p)] = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big(1 + \frac{4}{3}\,R\Big)\,\frac{\partial^2\hat\theta(\eta,p)}{\partial\eta^2} + N_t\Big(\frac{\partial\hat\theta(\eta,p)}{\partial\eta}\Big)^2 + \hat f(\eta,p)\,\frac{\partial\hat\theta(\eta,p)}{\partial\eta} +$$
$$+ N_b\,\frac{\partial\hat\theta(\eta,p)}{\partial\eta}\,\frac{\partial\hat\varphi(\eta,p)}{\partial\eta} - \hat\theta(\eta,p)\,\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta} - S_t\,\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta} + \mathrm{Ec}\,\Big(\frac{\partial^2 \hat f(\eta,p)}{\partial\eta^2}\Big)^2,$$

$$N_\varphi[\hat\varphi(\eta;p), \hat f(\eta,p), \hat\theta(\eta;p)] = \frac{\partial^2\hat\varphi(\eta,p)}{\partial\eta^2} + \frac{N_t}{N_b}\,\frac{\partial^2\hat\theta(\eta,p)}{\partial\eta^2} - \mathrm{Sc}\,S_m\,\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta} +$$
$$+ \mathrm{Sc}\,\Big(\hat f(\eta,p)\,\frac{\partial\hat\varphi(\eta,p)}{\partial\eta} - \hat\varphi(\eta,p)\,\frac{\partial \hat f(\eta,p)}{\partial\eta}\Big).$$

Задачи нулевого порядка имеют вид

$$(1-p)L_1[\hat f(\eta,p) - f_0(\eta)] = p h_f N_f[\hat f(\eta,p)],$$
$$(1-p)L_2[\hat\theta(\eta,p) - \theta_0(\eta)] = p h_\theta N_\theta[\hat\theta(\eta,p)],$$
$$(1-p)L_3[\hat\varphi(\eta,p) - \varphi_0(\eta)] = p h_\varphi N_\varphi[\hat\varphi(\eta,p)],$$
$$\hat f'(0,p) = 1, \qquad \hat f(0,p) = 0, \qquad \hat f'(\infty,p) = 0,$$
$$\hat\theta'(0,p) = 1 - S_t, \qquad \hat\theta(\infty,p) = 0,$$
$$\hat\varphi(0,p) = 1 - S_m, \qquad \hat\varphi(\infty,p) = 0,$$

где h_f, h_θ, h_φ — ненулевые вспомогательные параметры; для $p = 0$, $p = 1$ имеем

$$\hat f(\eta,0) = f_0(\eta), \qquad \hat f(\eta,1) = f(\eta),$$
$$\hat\theta(\eta,0) = \theta_0(\eta), \qquad \hat\theta(\eta,1) = \theta(\eta),$$
$$\hat\varphi(\eta,0) = \varphi_0(\eta), \qquad \hat\varphi(\eta,1) = \varphi(\eta).$$

Заметим, что при $p \in [0,1]$ $f_0(\eta)$, $\theta_0(\eta)$, $\varphi_0(\eta)$ сходятся к $f(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ соответственно. С использованием рядов Тейлора получаем соотношения

$$\hat{f}(\eta,p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) p^m, \qquad f_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \hat{f}(\eta,p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0},$$

$$\hat{\theta}(\eta,p) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta) p^m, \qquad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \hat{\theta}(\eta,p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0}, \tag{6}$$

$$\hat{\varphi}(\eta,p) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta) p^m, \qquad \varphi_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \hat{\varphi}(\eta,p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0},$$

сходимость которых зависит от h_f, h_θ и h_φ. При соответствующем выборе h_f, h_θ, h_φ ряды (6) сходятся при $p = 1$ и решение задачи принимает вид

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta), \quad \varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta).$$

2.2. *Задачи деформации порядка m.* Полученные задачи данного порядка решаются следующим образом:

$$L_1[f_m(\eta,p) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_{f,m}(\eta),$$
$$L_2[\theta_m(\eta,p) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_{\theta,m}(\eta),$$
$$L_3[\varphi_m(\eta,p) - \chi_m \varphi_{m-1}(\eta)] = h_\varphi R_{\varphi,m}(\eta),$$
$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = \theta_m(0) = \theta_m(\infty) = \varphi_m(0) = \varphi_m(\infty) = 0,$$
$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leqslant 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

$$R_{f,m}(\eta) = f'''_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} f''_k - 2 f'_{m-1-k} f'_k] - (M+\lambda)\, f'_{m-1},$$

$$R_{\theta,m}(\eta) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big(1 + \frac{4}{3}\,R\Big)\theta''_{m-1} + N_t \sum_{k=0}^{m-1} \theta'_{m-1-k}\theta'_k + N_b \sum_{k=0}^{m-1} \varphi'_{m-1-k}\theta'_k +$$
$$+ \mathrm{Ec} \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k} f''_k - \sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k}\theta_k + \sum_{k=0}^{m-1} \theta'_{m-1-k} f_k - S_t(f'_{m-1}),$$

$$R_{\varphi,m}(\eta) = \varphi''_{m-1} + \frac{N_t}{N_b}\,\theta''_{m-1} - \mathrm{Sc}\, S_m f'_{m-1} + \mathrm{Sc} \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k}\varphi'_k - \varphi_{m-1-k} f'_k].$$

Общие решения представим в виде

$$f_m(\eta) = f^*_m(\eta) + C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\eta} + C_3\,\mathrm{e}^{-\eta},$$
$$\theta_m(\eta) = \theta^*_m(\eta) + C_4\,\mathrm{e}^{\eta} + C_5\,\mathrm{e}^{-\eta}, \qquad \varphi_m(\eta) = \varphi^*_m(\eta) + C_6\,\mathrm{e}^{\eta} + C_7\,\mathrm{e}^{-\eta},$$

где f^*_m, θ^*_m, φ^*_m — частные решения.

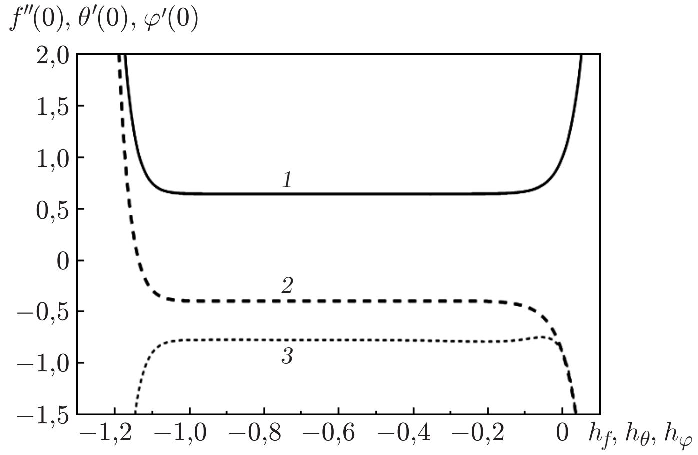

Рис. 1. h-кривые для $f''(0)$ (*1*), $\theta'(0)$ (*2*), $\varphi'(0)$ (*3*) при $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $\lambda = 0{,}1$, $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $S_m = 0{,}1$, $S_t = 0{,}1$, $M = 0{,}1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $N_b = 0{,}8$, $N_t = 0{,}8$, $R = 0{,}4$

3. Сходимость полученных решений. Скорость сходимости решений, полученных с помощью МГА, зависит от вспомогательных параметров. Для контроля сходимости решений строятся h-кривые для скорости, температуры и концентрации. На рис. 1 видно, что допустимыми значениями h_f, h_θ, h_φ являются $-1{,}0 \leqslant h_f \leqslant -0{,}2$, $-0{,}95 \leqslant h_\theta \leqslant -0{,}30$, $-0{,}90 \leqslant h_\varphi \leqslant -0{,}35$. Заметим, что при $h_f = h_\theta = h_\varphi = -0{,}8$ решения сходятся во всей области $0 < \eta < \infty$.

4. Результаты исследования и их обсуждение. Проанализируем влияние различных параметров на скорость $f'(\eta)$, температуру $\theta(\eta)$ и концентрацию $\varphi(\eta)$. На рис. 2 приведена зависимость скорости f' от числа Гартмана M. При увеличении M скорость уменьшается, вследствие того что под действием магнитного поля возникает сила сопротивления (сила Лоренца).

На рис. 3 показано влияние параметров броуновского движения N_b и термофореза N_t на температуру. Видно, что при увеличении этих параметров температура и толщина теплового пограничного слоя также увеличиваются.

На рис. 4 показано влияние на температуру параметра температурной стратификации S_t. При увеличении S_t уменьшается температура, а также разность температур на поверхности и окружающей среды.

Из рис. 5 следует, что безразмерная температура увеличивается с увеличением параметра излучения R. Это обусловлено тем, что при увеличении параметра излучения средний коэффициент поглощения k^* уменьшается, скорость теплопереноса жидкости возрастает.

Как известно, вязкость жидкости зависит от температуры. Вследствие наличия в жидкости сил сопротивления при увеличении числа Эккерта Ec температура увеличивается (рис. 6). Число Эккерта характеризует преобразование кинетической энергии во внутреннюю энергию, вызванное работой сил вязкого трения в жидкости. При наличии вязкой диссипации толщина теплового слоя больше.

На рис. 7–9 показано изменение концентрации наночастиц при различных значениях числа Шмидта Sc, параметра концентрационной стратификации S_m, параметра броуновского движения N_b и параметра термофореза N_t. Видно, что концентрация уменьшается с увеличением Sc и S_m. При увеличении параметра броуновского движения N_b концентрация уменьшается, при увеличении параметра термофореза N_t — увеличивается.

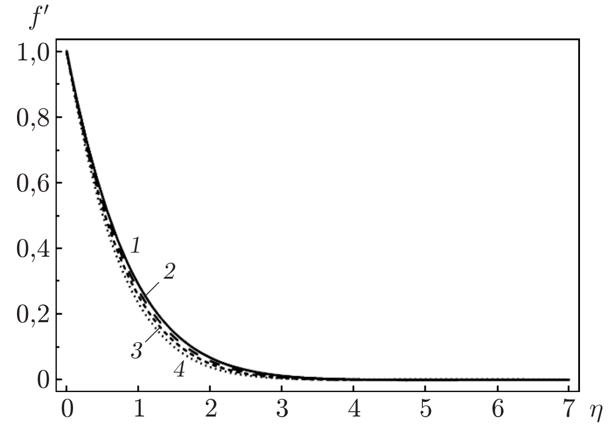

Рис. 2

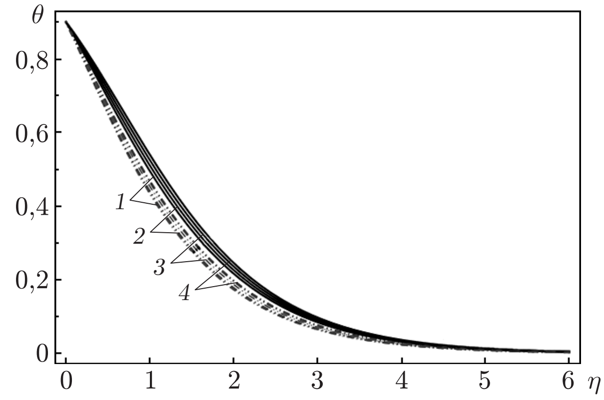

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $f'(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = S_m = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях числа Гартмана M:
1 — $M = 0{,}3$, *2* — $M = 0{,}5$, *3* — $M = 0{,}7$, *4* — $M = 1{,}0$

Рис. 3. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях параметра броуновского движения N_b (сплошные линии) и параметра термофореза N_t (штрихпунктирные линии):
1 — $N_b = 1{,}0$, $N_t = 0{,}1$, *2* — $N_b = 1{,}2$, $N_t = 0{,}2$, *3* — $N_b = 1{,}4$, $N_t = 0{,}4$, *4* — $N_b = 1{,}6$, $N_t = 0{,}6$

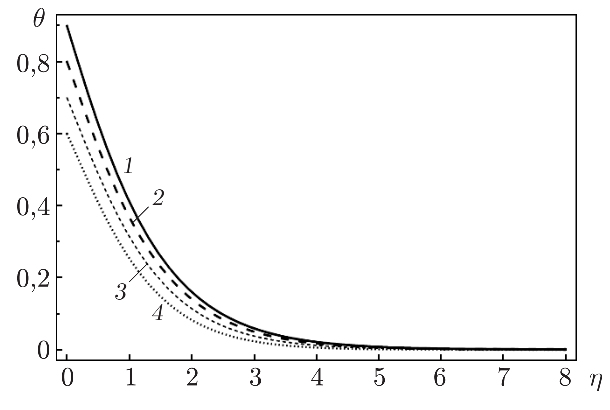

Рис. 4

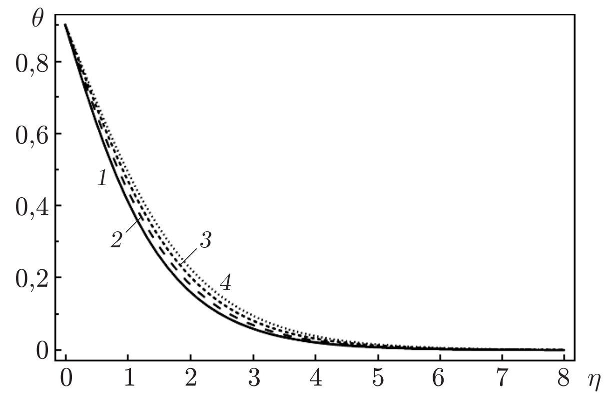

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях параметра температурной стратификации S_t:
1 — $S_t = 0{,}1$, *2* — $S_t = 0{,}2$, *3* — $S_t = 0{,}3$, *4* — $S_t = 0{,}4$

Рис. 5. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях параметра излучения R:
1 — $R = 0{,}1$, *2* — $R = 0{,}2$, *3* — $R = 0{,}3$, *4* — $R = 0{,}4$

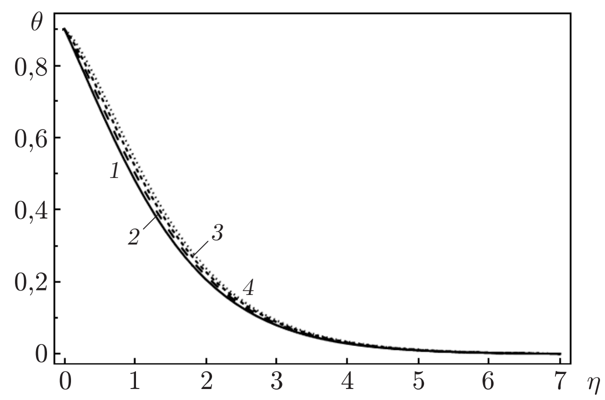

Рис. 6

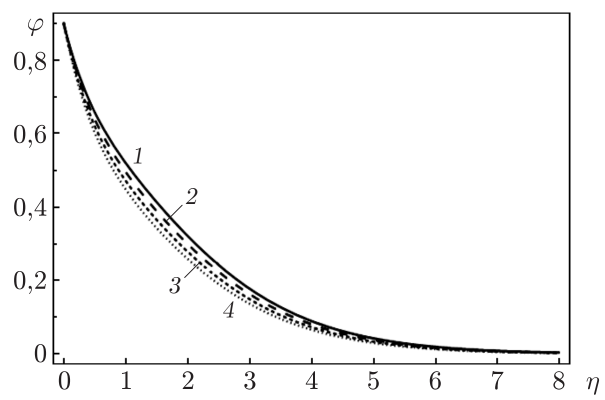

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость $\theta(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $S_t = S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях числа Эккерта Ec:
1 — $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, *2* — $\mathrm{Ec} = 0{,}7$, *3* — $\mathrm{Ec} = 0{,}9$, *4* — $\mathrm{Ec} = 1{,}1$

Рис. 7. Зависимость $\varphi(\eta)$ при $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях числа Шмидта Sc:
1 — $\mathrm{Sc} = 0{,}9$, *2* — $\mathrm{Sc} = 1{,}0$, *3* — $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, *4* — $\mathrm{Sc} = 1{,}2$

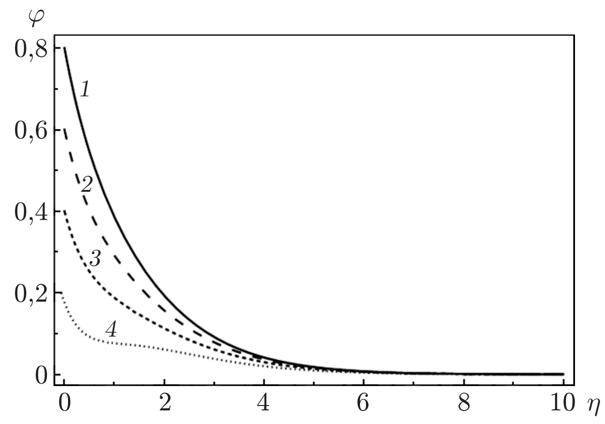

Рис. 8

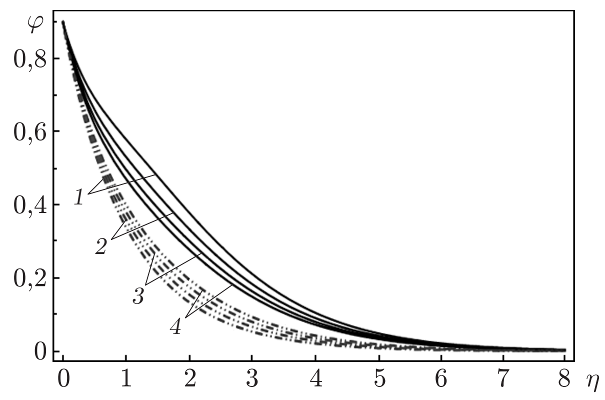

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость $\varphi(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $N_b = N_t = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях параметра концентрационной стратификации S_m:
1 — $S_m = 0{,}2$, *2* — $S_m = 0{,}4$, *3* — $S_m = 0{,}6$, *4* — $S_m = 0{,}8$

Рис. 9. Зависимость $\varphi(\eta)$ при $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $S_t = S_m = M = \lambda = 0{,}1$ и различных значениях параметра броуновского движения N_b (сплошные линии) и параметра термофореза N_t (штрихпунктирные линии):
1 — $N_b = 0{,}5$, $N_t = 0{,}1$, *2* — $N_b = 0{,}6$, $N_t = 0{,}2$, *3* — $N_b = 0{,}7$, $N_t = 0{,}3$, *4* — $N_b = 0{,}8$, $N_t = 0{,}4$

Таблица 1

Сходимость рядов решений для скорости, температуры, концентрации, полученных с помощью МГА для аппроксимаций разного порядка при $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $\lambda = 0{,}1$, $\mathrm{Sc} = 1{,}1$, $S_m = 0{,}1$, $S_t = 0{,}1$, $M = 0{,}1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$, $N_b = 0{,}8$, $N_t = 0{,}8$, $R = 0{,}4$

Порядок аппроксимации	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$	$-\varphi'(0)$
1	1,3467	0,496 36	0,620 00
10	1,3589	0,397 16	0,781 08
20	1,3590	0,397 58	0,774 59
25	1,3590	0,397 61	0,774 14
33	1,3590	0,397 62	0,774 06
37	1,3590	0,397 62	0,774 04
40	1,3590	0,397 62	0,774 04
45	1,3590	0,397 62	0,774 04

Таблица 2

Значения чисел Нуссельта и Шервуда при $\lambda = 0{,}5$, $M = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}9$ и различных значениях параметров концентрационной и температурной стратификации, параметра броуновского движения, параметра термофореза и числа Шмидта

S_m	S_t	N_b	N_t	Sc	$-\theta'(0)/(1-S_t)$	$-\varphi'(0)/(1-S_m)$
0,1	0,1	0,8	0,8	1,1	0,433 77	0,938 12
0,2	0,1	0,8	0,8	1,1	0,444 77	0,997 97
0,4	0,1	0,8	0,8	1,1	0,475 15	1,066 80
0,5	0,1	0,8	0,8	1,1	0,486 75	1,190 40
0,5	0,2	0,8	0,8	1,1	0,480 95	0,860 99
0,5	0,3	0,8	0,8	1,1	0,530 23	0,862 25
0,5	0,4	0,8	0,8	1,1	0,594 63	0,863 86
0,5	0,4	0,6	0,8	1,1	0,483 89	0,749 84
0,5	0,4	0,7	0,8	1,1	0,462 39	0,813 29
0,5	0,4	0,9	0,8	1,1	0,422 11	0,895 72
0,5	0,4	0,9	0,6	1,1	0,460 02	0,902 01
0,5	0,4	0,9	0,7	1,1	0,450 73	0,880 46
0,5	0,4	0,9	0,9	1,1	0,433 22	0,840 74
0,5	0,4	0,9	0,9	1,0	0,450 85	0,777 45
0,5	0,4	0,9	0,9	1,2	0,433 77	0,938 11
0,5	0,4	0,9	0,9	1,3	0,426 59	1,012 20

В табл. 1 показана сходимость рядов решений. Заметим, что сходимость скорости, температуры и концентрации достигается на 23, 33 и 37-м порядках аппроксимации соответственно.

В табл. 2 приведены значения локальных чисел Нуссельта и Шервуда при $\lambda = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 1{,}7$, $R = 0{,}4$, $M = 0{,}1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}5$ и различных значениях параметров броуновского движения, термофореза, температурной и концентрационной стратификации и числа Шмидта. При увеличении значений N_b и Sc число Шервуда растет, число Нуссельта уменьшается. При увеличении значений S_t и S_m локальные числа Нуссельта и Шервуда увеличиваются. Увеличение значения N_t приводит к уменьшению локальных чисел Нуссельта и Шервуда.

Заключение. В работе исследовано влияние двойной стратификации на течение наножидкости на экспоненциально растягивающейся пластине. Получено решение для двумерного стационарного МГД-течения в пограничном слое термоконцентрационно стратифицированной наножидкости, обтекающей экспоненциально растягивающуюся пластину, помещенную в пористую среду. С помощью МГА построены явные выражения для скорости, температуры и концентрации в виде рядов. Показано, что при увеличении числа Гартмана уменьшается скорость, при увеличении параметра температурной стратификации — температура, при увеличении параметра концентрационной стратификации — концентрация. Скорость тепломассообмена увеличивается при увеличении параметров температурной и концентрационной стратификации. Аналогичные результаты можно получить в случае $N_b = N_t = 0$ при использовании вместо наножидкости вязкой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Choi S. U. S.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // ASME. Intern. Mech. Engng. 1995. V. 66. P. 99–105.
2. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // J. Heat Transfer. 2005. V. 128. P. 240–250.
3. **Turkyilmazoglu M.** Unsteady convection flow of some nanofluids past a moving vertical flat plate with heat transfer // J. Heat Transfer. 2013. V. 136, N 3. 031704.
4. **Turkyilmazoglu M.** Nanofluid flow and heat transfer due to a rotating disk // Comput. Fluids. 2014. V. 94. P. 139–146.
5. **Sheikholeslami M., Goriji-Bandpy M.** Free convection of ferrofluid in a cavity heated from below in the presence of an external magnetic field // Powder Technol. 2014. V. 256. P. 490–498.
6. **Sheikholeslami M., Gorji-Bandpy M., Ganji D. D.** Lattice Boltzmann method for MHD natural convection heat transfer using nanofluid // Powder Technol. 2014. V. 254. P. 82–93.
7. **Hussain T., Shehzad S. A., Hayat T., et al.** Radiative hydromagnetic flow of Jeffrey nanofluid by an exponentially stretching sheet // Plos One. 2014. V. 9, N 8. e103719.
8. **Rashidi M. M., Abelman S., Mehr N. F.** Entropy generation in steady MHD flow due to a rotating porous disk in a nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 62. P. 515–525.
9. **Niu J., Fu C., Tan W. C.** Slip flow and heat transfer of a non-Newtonian nanofluid in a microtube // Plos One. 2012. V. 7, N 5. e37274.
10. **Khalili S., Dinarvand S., Hosseini R., et al.** Unsteady MHD flow and heat transfer near stagnation point over a stretching/shrinking sheet in porous medium filled with a nanofluid // Chinese Phys. B. 2014. V. 23, N 4. 048203.
11. **Hayat T., Imtiaz M., Alsaedi A., Marwan M. A.** MHD three-dimensional flow of nanofluid with velocity slip and nonlinear thermal radiation // J. Magnetism Magnetic Materials. 2015. V. 396. P. 31–37.
12. **Hayat T., Imtiaz M., Alsaedi A.** Unsteady flow of nanofluid with double stratification and magnetohydrodynamics // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2016. V. 92. P. 100–109.
13. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // J. Appl. Math. Phys. 1970. V. 21. P. 645–647.
14. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55. P. 744–746.
15. **Afzal N., Baderuddin A., Elgarvi A. A.** Momentum and heat transfer on a continuous flat surface moving in a parallel stream // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1993. V. 36. P. 3399–3403.
16. **Cortell R.** Flow and heat transfer in a moving fluid over a moving flat surface // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 2007. V. 21. P. 435–446.
17. **Ibrahim W., Shankar B., Nandeppanavar M. M.** MHD stagnation point flow and heat transfer due to nanofluid towards a stretching sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 56. P. 1–9.

18. **Turkyilmazoglu M.** Exact solutions for two-dimensional laminar flow over a continuously stretching or shrinking sheet in an electrically conducting quiescent couple stress fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 72. P. 1–8.
19. **Malvandi A., Hedayati F., Ganji D. D.** Slip effects on unsteady stagnation point flow of a nanofluid over a stretching sheet // Powder Technol. 2014. V. 253. P. 377–384.
20. **Magyari E., Keller B.** Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface // J. Phys. D. Appl. Phys. 1999. V. 32. P. 577–585.
21. **Mukhopadhyay S.** Slip effects on MHD boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with suction/blowing and thermal radiation // Ain Shams Engng J. 2013. N 4. P. 485–491.
22. **Hayat T., Imtiaz M., Alsaedi A., Mansoor R.** MHD flow of nanofluids over an exponentially stretching sheet in a porous medium with convective boundary conditions // Chinese Phys. B. 2014. V. 23, N 5. 054701.
23. **Pramanik S.** Casson fluid flow and heat transfer past an exponentially porous stretching surface in presence of thermal radiation // Ain Shams Engng J. 2014. N 5. P. 205–212.
24. **Alhuthali M. S., Shehzad S. A., Malaikah H., Hayat T.** Three dimensional flow of viscoelastic fluid by an exponentially stretching surface with mass transfer // J. Petrol. Sci. Engng. 2014. V. 119. P. 221–226.
25. **Mukhopadhyay S.** MHD boundary layer flow and heat transfer over an exponentially stretching sheet embedded in a thermally stratified medium // Alexandria Engng J. 2013. V. 52. P. 259–265.
26. **Hayat T., Shehzad S. A., Al-Sulami H. H., Asghar S.** Influence of thermal stratification on the radiative flow of Maxwell fluid // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Engng. 2013. V. 35. P. 381–389.
27. **Hayat T., Hussain Z., Farooq M., et al.** Thermally stratified stagnation point flow of an Oldroyd-B fluid // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. V. 15. P. 77–86.
28. **Ibrahim W., Makinde O. D.** The effect of double stratification on boundary layer flow and heat transfer of nanofluid over a vertical plat // Comput. Fluids. 2013. V. 86. P. 433–441.
29. **Srinivasacharya D., Upendar M.** Effect of double stratification on MHD free convection in a micropolar fluid // J. Egypt. Math. Soc. 2013. V. 21. P. 370–378.
30. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
31. **Abbasbandy S., Naz R., Hayat T., Alsaedi A.** Numerical and analytical solutions for Falkner — Skan flow of MHD Maxwell fluid // Appl. Math. Comput. 2014. V. 242. P. 569–575.
32. **Farooq U., Hayat T., Alsaedi A., Liao S. J.** Heat and mass transfer of two-layer flows of third-grade nanofluids in a vertical channel // Appl. Math. Comput. 2014. V. 242. P. 528–540.
33. **Rashidi M. M., Ali M., Freidoonimehr N., et al.** Mixed convection heat transfer for viscoelastic fluid flow over a porous wedge with thermal radiation // Adv. Mech. Engng. 2014. V. 204. 735939.
34. **Hayat T., Asad S., Mustafa M., Alsaedi A.** Boundary layer flow of Carreau fluid over a convectively heated stretching sheet // Appl. Math. Comput. 2014. V. 246. P. 12–22.
35. **Hayat T., Rashid M., Imtiaz M., Althali M. S.** Magnetohydrodynamic (MHD) stretched flow of nanofluid with power-law velocity and chemical reaction // AIP Advances. 2015. N 5. P. 117121.
36. **Mustafa M., Farooq M. A., Hayat T., Alsaedi A.** Numerical and series solutions for stagnation point flow of nanofluid over an exponentially stretching sheet // Plos One. 2013. V. 8, N 5. e61859.

Поступила в редакцию 3/IV 2015 г.