

7. Замышляев Б. В., Евтерев Л. С., Чернейкин В. А. Релаксационное уравнение состояния мягких грунтов. — ДАН СССР, 1981, т. 211, № 5.
8. Ляхов А. Г. Взаимодействие волны в многокомпонентной двухфазной среде с преградой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3.
9. Персон П., Юхансон К. Детонация взрывчатых веществ. М.: Мир, 1973.
10. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П., Чельшев В. П., Шехтер Б. М. Физика взрыва. М.: Наука, 1975.
11. Григорян С. С., Ляхов Г. М. и др. Взрывные волны в лессовидном грунте. — ПМТФ, 1963, № 4.
12. Вовк А. А., Черный Г. П., Михалюк А. В. Действие крупномасштабных взрывов в массиве горных пород. Часть I. Киев: Наукова думка, 1974.
13. Самарский А. А., Арсенин В. Я. Численные решения уравнений газовой динамики с различными типами вязкости. — ЖВММФ, 1964, т. 1, № 2.

УДК 534.242—538.565

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА АКУСТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОКОЛО КРУГОВОЙ РЕШЕТКИ С СЕРДЕЧНИКОМ

В. Л. Окулов
(Новосибирск)

В теории дифракции для задач на собственные значения в качестве собственного параметра обычно выбирают квадрат волнового числа [1]. Для определения собственных волновых чисел (собственных частот) внутренних задач известно достаточно как точных, так и приближенных методов, а для внешних задач в основном рассматривались лишь длинноволновое или коротковолновое приближения. Автору известно только несколько работ, в которых задача на определение собственных значений решалась в строгой постановке (см., например, [2, 3], а также библиографию к ним). В данной работе определены собственные волновые числа внешней задачи дифракции электромагнитных или акустических волн на плоской круговой решетке с сердечником в строгой постановке, т. е. при любых отношениях периода решетки к длине волн.

Круговыми решетками обычно моделируют рабочие колеса центробежных компрессоров и вентиляторов. Решение задачи на собственные значения может быть полезно при анализе явления акустического резонанса, возникающего на некоторых режимах работы этих машин [2]. Структуры, аналогичные круговым решеткам, можно рассматривать как модели электродинамических резонаторов, некоторых антенных и волноводных устройств. Чтобы предсказывать их резонансные свойства, также необходимо знать собственные волновые числа электромагнитных колебаний около подобных открытых структур [1].

1. Рассмотрим неподвижную плоскую круговую решетку диаметра $2R$, составленную из N тонких радиальных лопаток (зеркал), прикрепленных к круглому сердечнику радиуса r (фиг. 1). Пусть во внешности решетки функция $\varphi(\rho, \theta)$ определяет волновую амплитуду установившихся акустических или электромагнитных колебаний (ρ, θ — полярные координаты с началом в центре решетки). Амплитуда полного поля может быть представлена в виде

$$\varphi = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_l,$$

где каждая составляющая полного поля φ_l удовлетворяет:
однородному уравнению Гельмгольца

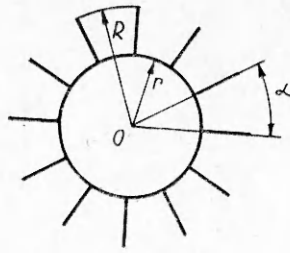
$$(\Delta + k^2)\varphi_l = 0,$$

k — произвольное комплексное число;
однородным условиям Дирихле ($\Omega = 0$) или Неймана ($\Omega = 1$)

$$\varphi_l = 0 \text{ или } \partial\varphi_l/\partial n = 0$$

на лопатках решетки и поверхности сердечника;
обобщенному условию излучения [3]

$$\varphi_l = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(k\rho) \exp(is\theta) \quad \text{при } \rho > R,$$



Ф и г. 1

$H_s^{(1)}(k\rho)$ — функция Ганкеля первого рода, причем $0 \leq \arg k < 2\pi$; условием обобщенной периодичности по θ

$$\varphi_l(\rho, \theta + \alpha) = \varphi_l(\rho, \theta) \exp(i\mu),$$

где $\alpha = 2\pi/N$ — шаг решетки по θ , $\mu = \alpha l$ определяет сдвиг фазы между колебаниями в соседних межлопаточных каналах;

условию ограниченности энергии на острых кромках лопаток решетки и при $\rho = 0$ в случае вырожденного сердечника ($r = 0$) [4].

Собственными волновыми числами поставленной задачи будем называть такие значения k , для которых существует нетривиальное решение φ_l , удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Отметим, что для поставленной задачи справедливы результаты [4]. Следовательно, множество собственных волновых чисел на комплексной плоскости дискретно, и все они (кроме нуля) лежат ниже вещественной оси.

2. Решение поставленной задачи представим в виде

$$(2.1) \quad \varphi_l = \begin{cases} \sum_{v=N_s+l} a_v \xi^v \frac{H_v^{(1)}(k\rho)}{H_v^{(1)}(kR)}, & \rho \geq R, \\ \sum_{2v=N_s} b_{2v} \xi_m^{l-v} \xi^v \frac{Z_v(k\rho)}{Z_v(kR)}, & r \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta - \alpha m < \alpha, \\ s = 0, +1, \pm 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

где $b_{N_s} = (-1)^2 b_{-N_s}$; $\xi = \exp(i\theta)$; $\xi_m = \exp(i\alpha m)$, а функция Z_v определяется выражением

$$Z_v(k\rho) = \begin{cases} J_v(k\rho), & r = 0, \\ N_v(kr) J_v(k\rho) - J_v(kr) N_v(k\rho), & r > 0, \quad \Omega = 0, \\ N'_v(kr) J_v(k\rho) - J'_v(kr) N_v(k\rho), & r > 0, \quad \Omega = 1, \end{cases}$$

здесь $J_v(x)$ и $N_v(x)$ — функции Бесселя и Неймана, а штрих означает производную по ρ . В силу условия конечности энергии на острых кромках векторы $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ из (2.1) принадлежат классу l^2 -последовательностей. Отметим, что в случае вырожденного сердечника (2.1) в точности совпадает с представлением вторичного поля для задачи о возбуждении веера из тонких лент, рассмотренной в [5].

В силу обобщенной периодичности склеивание решения (2.1) при $\rho = R$ достаточно провести для $0 \leq \theta < \alpha$. В результате получим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sum_{v=N_s+l} a_v \xi^v &= \sum_{2v=N_s} b_{2v} \xi^v, \\ \sum_{v=N_s+l} a_v \xi^v \zeta_v^H &= \sum_{2v=N_s} b_{2v} \xi^v \zeta_v^Z, \quad 0 \leq \theta < \alpha, \\ \zeta_v^H &= k H_v^{(1)'}(kR) / H_v^{(1)}(kR), \quad \zeta_v^Z = k Z_v'(kR) / Z_v(kR). \end{aligned}$$

Умножая (2.2) на $\exp\{-i(Ns + l)\theta\}$ и интегрируя по θ от 0 до α , получим бесконечную систему алгебраических уравнений, которую после

исключения a_ν и некоторых тождественных преобразований можно записать в виде

$$(2.3) \quad \sum_{2\nu=N_s} B_{2\nu} \frac{\zeta_\sigma^H - \zeta_\nu^Z}{\sigma^2 - \nu^2} = 0, \quad \sigma = N_s + l, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$B_{2\nu} = b_{2\nu}(1 - (-1)^s \xi_1^l)$. Отметим, что система (2.3) получена при следующих ограничениях на входящие в нее параметры: не рассматриваются случаи $l = 0$ и $2l = N$ (они будут исследованы ниже); исключены значения k , совпадающие с корнями уравнений $H_{N_s+l}^{(1)}(kR) = 0$ и $Z_{N_s/2}(kR) = 0$. Корни этих уравнений определяют собственные волновые числа колебаний во внешности цилиндра радиуса R и внутри кольцевого сектора. Так как первое возможно лишь в пределе при $r \rightarrow R$, а собственные значения кольцевого сектора вещественны, то малые окрестности этих величин можно исключить из рассмотрения.

Таким образом, поставленная задача свелась к нахождению таких k , при которых однородная бесконечная система (2.3) имеет нетривиальное решение.

3. Рассмотрим случаи $l = 0$ и $2l = N$. После склеивания решения (2.1) на дуге $\rho = R$, $0 \leq \theta < \alpha$ имеем при $l = 0$

$$(3.1) \quad \sum_{\nu=N_s} a_\nu \xi^\nu = \sum_{2\nu=N_s} b_{2\nu} \xi^\nu, \quad \sum_{\nu=N_s} a_\nu \xi^\nu \zeta_\nu^H = \sum_{2\nu=N_s} b_{2\nu} \xi^\nu \zeta_\nu^Z$$

и при $2l = N$

$$(3.2) \quad \sum_{2\nu=N(2s+1)} a_\nu \xi^\nu = \sum_{2\nu=N_s} b_{2\nu} \xi^\nu, \quad \sum_{2\nu=N(2s+1)} a_\nu \xi^\nu \zeta_\nu^H = \sum_{2\nu=N_s} b_{2\nu} \xi^\nu \zeta_\nu^Z.$$

Поступая так же, как при выводе (2.3), из (3.1), (3.2) получим следующие системы уравнений:

при $l = 0$

$$(3.3) \quad \frac{c}{\sigma} b_{2\sigma} (\zeta_\sigma^H - \zeta_\sigma^Z) \pm \sum_{2\nu=N(2n+1)} b_{2\nu} \frac{\zeta_\sigma^H - \zeta_\nu^Z}{\sigma^2 - \nu^2} = 0, \quad \sigma = Nn, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

при $2l = N$

$$(3.4) \quad \frac{c}{\sigma} b_{2\sigma} (\zeta_\sigma^H - \zeta_\sigma^Z) \pm \sum_{\nu=Nn} b_{2\nu} \frac{\zeta_\sigma^H - \zeta_\nu^Z}{\sigma^2 - \nu^2} = 0, \quad 2\sigma = N(2n+1), \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad c = \text{const.}$$

Складывая и вычитая уравнения при одинаковых σ , из (3.3), (3.4) находим, что при $l = 0$

$$(3.5a) \quad \frac{1}{\sigma} b_{2\sigma} (\zeta_\sigma^H - \zeta_\sigma^Z) = 0;$$

$$(3.5b) \quad \sum_{2\nu=N(2n+1)} b_{2\nu} \frac{\zeta_\sigma^H - \zeta_\nu^Z}{\sigma^2 - \nu^2} = 0, \quad \sigma = Nn, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

при $2l = N$

$$(3.6a) \quad \frac{1}{\sigma} b_{2\sigma} (\zeta_\sigma^H - \zeta_\sigma^Z) = 0;$$

$$(3.6b) \quad \sum_{\nu=Nn} b_{2\nu} \frac{\zeta_\sigma^H - \zeta_\nu^Z}{\sigma^2 - \nu^2} = 0, \quad 2\sigma = N(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из уравнений (3.5a), (3.6a) видно, что ненулевые амплитудные коэффициенты в разложении (2.1) могут существовать, когда выражение в скобке обращается в нуль. Чтобы определить условия, при которых это возможно, заметим, что

$$(3.7) \quad \zeta_\sigma^H - \zeta_\sigma^Z = \begin{cases} ic_0 & \text{при } r = 0, \\ c_0 H_\sigma^{(1)}(kr) & \text{при } r > 0, \Omega = 0, \\ c_0 H_\sigma^{(1)'}(kr) & \text{при } r > 0, \Omega = 1, \end{cases}$$

где $c_0 = -2(\pi k R H_0^{(1)}(kR) Z_0(kR))^{-1}$. Анализируя (3.7), получим: а) для вырожденного сердечника ($r = 0$) и конечных k коэффициенты b_n , входящие в уравнения (3.5а), (3.6а), могут быть только нулевыми; б) для $r > 0$ могут существовать конечные собственные волновые числа, которые совпадают с соответствующими волновыми числами свободных колебаний около цилиндра радиуса r .

Следовательно, для сдвига фазы $\mu = 0$ и $\mu = \pi$ возможны свободные колебания, «не замечающие» лопаток решетки. Это объясняется тем, что между лопатками решетки в азимутальном направлении укладывается целое число полуволн внешнего поля (для $\mu = 0$ их четное число, а для $\mu = \pi$ — нечетное). В рассматриваемых случаях свободные колебания других видов определяются значениями параметра k , при которых бесконечные системы (3.5б), (3.6б) имеют нетривиальное решение.

4. Собственные значения систем (2.3), (3.5б) и (3.6б) можно определить с помощью метода редукции. Чтобы показать это, методом полуобращения [5] сведем рассматриваемые системы к системам уравнений второго рода. В матричной форме их можно записать в виде

$$L(k)x = x + T(k)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Используя асимптотические представления для цилиндрических функций [6] и оценки из [5], непосредственной проверкой устанавливается аналитичность операторнозначной функции $T(k)$ и компактность оператора T для всех k . Далее, из аналитической теоремы Фредгольма [7] следует существование и аналитичность операторнозначной функции $L^{-1}(k)$ на всей комплексной плоскости, исключая дискретное множество собственных значений. Тогда в соответствии с [8] собственные значения редуцированных систем при увеличении их порядка сходятся к собственным значениям точных. В то же время каждое собственное значение точной системы является пределом собственных значений соответствующих редуцированных систем.

Основная трудность, возникающая при нахождении элементов матриц, связана с вычислением цилиндрических функций, входящих в отношения ζ_v^H и ζ_v^Z , так как функция Неймана неограниченно растет, а функция Бесселя убывает при возрастании v . Чтобы преодолеть эту трудность, представим ζ_v^H и ζ_v^Z через отношения цилиндрических функций:

$$\zeta_v^J = \frac{J'_v(x)}{J_v(x)}, \quad \zeta_v^N = \frac{N'_v(x)}{N_v(x)}, \quad \zeta_v^{J/N} = \frac{J'_v(x)}{N'_v(x)}.$$

Для вычисления введенных отношений используются рекуррентные формулы:

для ζ_v^N в прямом

$$(4.1) \quad \zeta_v^N = -\frac{v}{x} + \left(\frac{v-1}{x} - \zeta_{v-1}^N \right)^{-1},$$

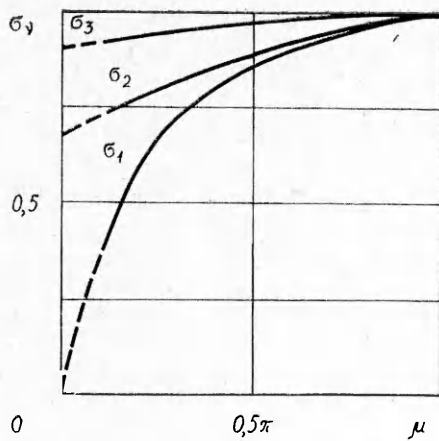
а для ζ_v^J в обратном

$$(4.2) \quad \zeta_v^J = \frac{v}{x} - \left(\frac{v+1}{x} + \zeta_{v+1}^J \right)^{-1}$$

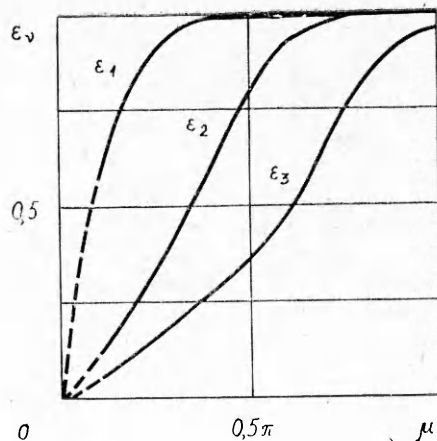
направлениях (относительно возрастания v). Вычисление $\zeta_v^{J/N}$ с помощью соотношения

$$(4.3) \quad \zeta_{v+1}^{J/N} = \zeta_v^{J/N} \left(\frac{v}{x} - \zeta_v^J \right) / \left(\frac{v}{x} - \zeta_v^N \right)$$

v	h_v^0	$\text{Re } h_v$	$\text{Im } h_v$	v	h_v^0	$\text{Re } h_v$	$\text{Im } h_v$
1	2,40048	2,2395	-0,00004	4	11,79153	10,68	-0,41
2	5,52007	5,117	-0,0004	5	14,93091	13,49	-0,96
3	8,65372	7,897	-0,004				



Ф и г. 2



Ф и г. 3

сводится к уже определенным функциям. Начальные функции (4.1), (4.3) определяются с помощью представления цилиндрических функций нулевого и первого порядков в виде ряда [6], а для (4.2) используется выражение

$$\zeta_M^J = \frac{M}{x} - \gamma(M, x),$$

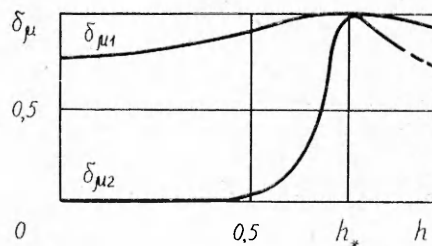
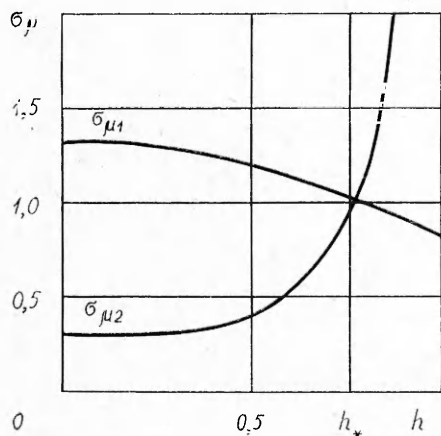
где $\gamma(M, x)$ — разложение в непрерывную дробь отношения $J_M(x)/J_{M-1}(x)$ [6]. Для $\gamma(M, x)$ имеет место оценка точности приближения этой цепной дроби ее конечным отрезком $\gamma_L(M, x)$:

$$|\gamma(M, x) - \gamma_L(M, x)| \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^{L-M-1} \frac{M!(M+1)!}{(M+L+1)!}.$$

Описанный способ вычисления ζ_v^H и ζ_v^Z позволяет значительно расширить область изменения расчетных параметров задачи.

5. Результаты численного расчета собственных волновых чисел для решетки, состоящей из двадцати лопаток (при $R = 1$, $\Omega = 1$), приведены в таблице и представлены на фиг. 2—4. При расчете системы (2.3), (3.5б) и (3.6б) урезались до 50 уравнений. Скорость сходимости проверялась варьированием числа уравнений урезанных систем. Было установлено, что увеличение числа уравнений в 2 раза уточняет величину собственного волнового числа в пятом знаке.

Для анализа полученных результатов введем критические значения k^0 волнового числа, которыми будем называть собственные волновые числа свободных колебаний в межлопаточных областях, ограниченных дугами огибающих решетку окружностей. В данном случае k^0 совпадают с корнями уравнений



Ф и г. 4

$$Z_\nu(k^0 R) = 0, \quad 2\nu = Nn, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В таблице для решетки с вырожденным сердечником при $\mu = \pi$ указаны первые пять собственных волновых чисел и для сравнения ближайšie к ним критические значения, которые являются корнями уравнения $J_0(k_\nu^0) = 0$ [6].

На фиг. 2 представлена зависимость величины $\sigma_\nu = \text{Re } k_\nu(\mu, 0) / \text{Re } k_\nu(\pi, 0)$, а на фиг. 3 — зависимость $\varepsilon_\nu = \exp \{ \text{Im } k_\nu(\mu, 0) \}$ от сдвига фазы μ для первых трех собственных волновых чисел. Отметим, что их минимальное отклонение от вещественной оси отвечает значению параметра $\mu = \pi$. Это означает, что высокочастотные колебания резонаторов и наиболее выраженный акустический резонанс возможны для колебаний с противоположной фазой в соседних межлопаточных областях. Этот вывод не противоречит результатам теории плоских бесконечных прямых решеток [2, 9].

На фиг. 4 приведены зависимости вещественной и мнимой части первого собственного волнового числа от втулочного отношения $h = r/R$ при различных сдвигах фазы $\mu_1 = 0,1\pi$ и $\mu_2 = \pi$. По оси ординат откладывались значения величин, отнесенные к их значениям при $h_* = 0,761$:

$$\sigma_\mu = \text{Re } k_0(\mu, h) / \text{Re } k_0(\mu, h_*) \quad \text{и} \quad \delta_\mu = \text{Im } k_0(\mu, h) / \text{Im } k_0(\mu, h_*),$$

где $k_0(\mu_1, h_*) = 0,645 - i0,685$ и $k_0(\mu_2, h_*) = 6,85 - i0,45$. Следует отметить различие в поведении вещественной части для разных μ при $h \rightarrow 1$. Здесь, так же как и для прямых решеток [2], можно выделить два предельных случая:

1) $\mu = \pi$, когда собственные волновые числа наиболее близки к своим критическим значениям и неограниченно растут вместе с ними при $h \rightarrow 1$;

2) $\mu \rightarrow 0$, когда собственные волновые числа приближаются к значениям, определяющим свободные колебания окружающего решетку пространства, а в пределе (при $h \rightarrow 1$) стремятся к собственным волновым числам колебаний около цилиндра радиуса R .

В частности, для $\mu = 0,1\pi$ предел собственного волнового числа совпадает со значением $k = 0,5012 - i0,6435$, которое является собственным волновым числом колебаний около цилиндра радиуса $R = 1$ [3].

Максимальное отклонение собственных волновых чисел от вещественной оси при совпадении характерных азимутального и радиального размеров решетки ($h = h_*$), по-видимому, можно объяснить существованием переходного режима от свободных колебаний одного направления к колебаниям другого. Анализируя данные, приведенные в [10], можно сделать вывод, что подобное имеет место и для прямых решеток.

Поступила 10 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
2. Курзин В. Б. Об акустическом резонансе в турбомашинах. — Проблемы прочности, 1974, № 2.
3. Курзин В. Б., Сухинин С. В. О собственных частотах колебаний газа вне цилиндрической поверхности, образованной дугой окружности. — ПМТФ, 1981, № 1.
4. Сухинин С. В. О дискретности собственных частот открытых акустических резонаторов. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 49. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1981.
5. Щербак В. В. Матричные операторы во внешних задачах дифракции. — ДАН СССР, 1982, т. 263, № 1.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. Нефедов Е. И., Сивов А. Н. Электродинамика периодических структур. М.: Наука, 1977.
10. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Атлас нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей. Новосибирск: Наука, 1974.

УДК 621.165—226.1.001.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ РАБОЧИХ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ ПАРОВЫХ ТУРБИН МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Ю. М. Давыдов, В. Д. Куликов, Е. В. Майорский

(Москва)

Обтекание решеток профилей паровых турбин, в первую очередь периферийных сечений рабочего венца последних ступеней цилиндров низкого давления, характеризуется большими сверхзвуковыми скоростями истечения и весьма сложной структурой потока. Имея это в виду, невозможно заранее предсказать особенности их обтекания. Экспериментальные исследования таких решеток сложны и дороги. Поэтому представляется целесообразным для первоначального анализа структуры течения использовать численное моделирование и применить методы сквозного счета.

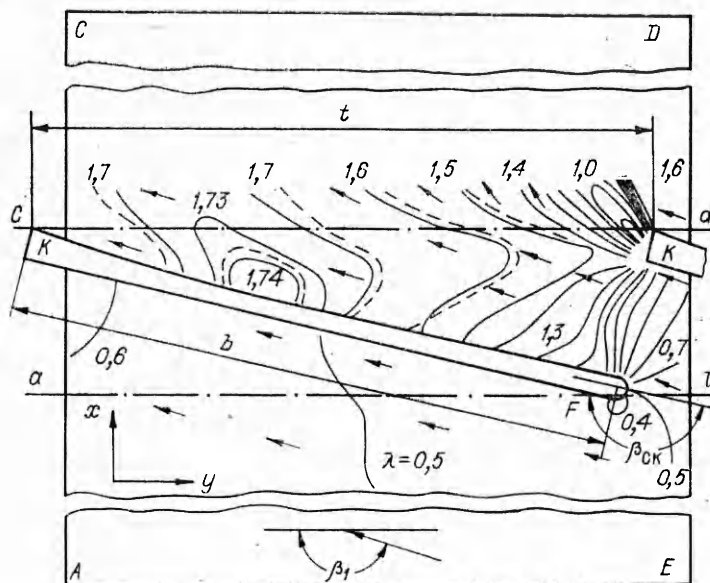
Укажем, например, на выполненные по методу С. К. Годунова [1] расчеты рабочих и сопловых решеток профилей [2—4].

В настоящее время широко распространен метод крупных частиц [5, 6]. Он успешно используется для решения широкого класса задач газовой динамики, в том числе при расчете внутренних течений [7]. В данной работе показывается его применимость для численного исследования нового класса задач: расчета обтекания решеток турбинных профилей.

На фиг. 1 представлена одна из исследованных решеток (вариант I). Расчеты выполнены при угле входа $\beta_1 = 163^\circ$, угле атаки $i = \beta_1 - \beta_0 = \pm 4^\circ 13'$, относительном шаге решетки $\bar{t} = t/b = 1,02$.

Исследовались типичные режимы обтекания решеток, при которых на входе реализуются дозвуковые скорости с $M_1 \approx 0,5$, а на выходе — сверхзвуковые с $M_2 \approx 1,9$.

Расчетная область $ACDE$ (см. фиг. 1) прямоугольной формы разбивалась на несколько зон, отличавшихся размерами прямоугольных ячеек неподвижной сетки. Наименьшие ячейки располагались в области вход-



Фиг. 1