

РАЗВИТИЕ МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ В НЕЙ ГАЗА

Ю. Н. Гордеев, Н. А. Кудряшов

(Москва)

Движение газа или жидкости по развивающейся магистральной трещине рассматривается в связи с проблемой гидроразрыва нефтеносного пласта [1, 2] и при оценке количества выходящих газообразных продуктов по трещине в атмосферу из полости подземного взрыва [3].

Постановка и приближенное решение задачи квазистационарного распространения осесимметричной трещины в горных породах под действием закачиваемой в нее несжимаемой жидкости приведены в [1, 2]. Точное решение задачи гидроразрыва нефтеносного пласта при постоянном вдоль трещины давлении получено в [4]. Развитие дискообразной трещины гидравлического разрыва в пористом насыщенном жидкостью пласте на основе теории консолидации Био рассмотрено в [5]. Численное решение автономной задачи о движении сжимаемого газа по плоской трещине получено в [6].

В данной работе рассматривается задача о распространении магистральной трещины (плоской и осесимметричной) под действием газа, движущегося из подземной полости.

1. Постановка задачи. Движение изотермического газа по магистральной трещине описывается системой уравнений [6]

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}(r^n u \rho w) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p + 12\mu w^{-2} u = 0, \quad p = c^2 \rho,$$

где ρ — плотность; u — скорость; p — давление газа; c — изотермическая скорость звука; μ — вязкость газа; n — параметр геометрии ($n = 0$ — плоская, $n = 1$ — осевая симметрия); w — раскрытие трещины; r — координата; t — время.

Поскольку скорость роста трещины под действием движущегося по ней газа много меньше скорости распространения волн Рэлея, то раскрытие трещины связано с горным давлением и давлением газа выражением [7]

$$(1.2) \quad w(r, t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} L(t) \int_{\xi}^1 \int_{g(t)}^{\theta} \frac{[p(\eta, t) - p_v] \eta^n d\eta \theta^{1-n} d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \eta^2} \sqrt{\theta^2 - \xi^2}}.$$

Здесь $\xi = r/L(t)$; $L(t)$ — длина трещины в момент времени t ; $g(t) = r_0/L(t)$; r_0 — радиус подземной полости; p_v — горное давление; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Система уравнений (1.1), (1.2) замыкается условием конечности напряжений на контуре трещины [4], определяющим длину (радиус) трещины:

$$(1.3) \quad \int_{g(t)}^1 \frac{[p(\eta, t) - p_v] \eta^n d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{K}{\sqrt{2L(t)}}.$$

В [8] показано, что влиянием сил сцепления в горных породах можно пренебречь: $K/\sqrt{2L_0} \approx 0$, $L_0 = L(t=0)$.

Начальные и граничные условия для системы (1.1)–(1.3):

$$(1.4) \quad p(r, t=0) = p_1, \quad w(r, t=0) = w_1(r),$$

$$p(r=r_0, t) = p_2(t), \quad r_0 \leq r \leq L(t).$$

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$(1.5) \quad R(t) = L(t) L_0^{-1}, \quad L_0 = L(t=0), \quad \xi = r L_0^{-1} L(t)^{-1},$$

$$p'(\xi, t) = p(r, t) p_0^{-1}, \quad p_0 = p_2(t=0), \quad t' = t t_0^{-1},$$

$$t_0 = L_0 u_0^{-1}, \quad u_0 = \left(\frac{w_0}{L_0} \right)^2 \frac{p_0 L_0}{12\mu},$$

$$w_0 = L_0 \left[\frac{4(1-\nu)}{\pi} \frac{p_0}{G} \right] \frac{\pi}{2N} \ln(2\sqrt{e} N/\pi), \quad N = p_0/p_T,$$

$$W(\xi, t) = w(r, t) w_0^{-1} R^{-1}(t), \quad U(\xi, t) = u(r, t) u_0^{-1} R^{-1}(t).$$

Далее штрихи опускаем, полагая $p = p'$, $t = t'$. В безразмерных переменных (1.5) система (1.4)–(1.3), начальные и граничные условия (1.4), (1.5) имеют вид

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (RW_p) - R\xi \frac{\partial}{\partial \xi} (W_p) + \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^n RW_p) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} P + \frac{U}{W^2} = 0;$$

$$(1.7) \quad W(\xi, t) = \frac{2N}{\pi \ln(2\sqrt{e} N/\pi)} \int_{\xi}^1 \int_{g(t)}^{\theta} \frac{[p(\eta, t) - N^{-1}] \eta^n d\eta d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \eta^2} \sqrt{\theta^2 - \xi^2}};$$

$$(1.8) \quad \int_{g(t)}^1 \frac{[p(\eta, t) - N^{-1}] \eta^n d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 0;$$

$$(1.9) \quad p(\xi, t=0) = p_1/p_0, \quad W(\xi, t=0) = w_1(\xi L_0)/w_0, \\ p(\xi = g(t), t) = p_2(t)/p_0, \quad g(t) \leq \xi \leq 1.$$

Двойной интеграл (1.7) представим как

$$(1.10) \quad W(\xi, t) = \frac{2N}{\pi \ln(2\sqrt{e} N/\pi)} \int_{g(t)}^1 d\theta Q_n(\xi, \theta) [p(\eta, t) - N^{-1}],$$

где

$$(1.11) \quad Q_n(\xi, \theta) = \theta^n \int_{\chi(\xi, \theta)}^1 \frac{\eta^{1-n} d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \theta^2} \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}, \quad \chi(\xi, \theta) = \begin{cases} \xi, & \xi > \theta, \\ \theta, & \xi < \theta. \end{cases}$$

При $n = 0$ $Q_0(\xi, \theta)$ выражается через элементарные функции:

$$Q_0(\xi, \theta) = \ln \frac{\sqrt{1 - \theta^2} + \sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{|\theta^2 - \xi^2|}}.$$

При $n = 1$ $Q_1(\xi, \theta)$ — эллиптический интеграл первого рода:

$$Q_1(\xi, \theta) = \theta \chi^{-1}(\xi, \theta) F \left[\arcsin \left(\frac{1 - \xi^2}{1 - \theta^2} \right)^{s/2}, \left(\frac{\theta}{\xi} \right)^s \right], \\ s = \text{sign}(\xi - \theta).$$

2. Метод решения. Для численного решения задачи (1.6)–(1.9) используем метод расщепления [9]. В рассматриваемой области $t \in [0, \infty)$, $\xi \in [0, 1]$ введем разностную сетку

$$\omega = \omega_\tau \times \omega_h = \{(\xi_k, t^m), \xi_{k+1} = \xi_k + h, \xi_{k+1/2} = (\xi_{k+1} + \xi_k)/2, t^{m+1} = t^m + \tau; k = 1, \dots, M; m = 1, 2, \dots\}.$$

Система уравнений (1.6)–(1.8), расщепленная на дифференциальном уровне по физическим процессам на три дробных шага по времени, имеет вид

при $t^m \leq t < t^m + \tau/3$

$$(2.1) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} W = 0, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} R = 0,$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} p - \frac{1}{W \xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^n W^3 p \frac{\partial}{\partial \xi} p \right) = 0;$$

при $t^m + \tau/3 \leq t < t^m + 2\tau/3$

$$(2.2) \quad W = W[p], \quad R = R[p], \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} (RWp) = 0;$$

при $t^m + 2\tau/3 \leq t < t^{m+1}$

$$(2.3) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} W = 0, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} R = 0, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} p - \frac{R}{RW} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (Wp) = 0.$$

Система (2.1) описывает движение газа по неподвижной трещине. Первое и второе соотношения в (2.2) совпадают с выражениями (1.7), (1.8) соответственно. Из третьего уравнения (2.2) находим, что $pRW = D(\xi)$ для $t \in [t^m + \tau/3, t^m + 2\tau/3)$ ($D(\xi)$ — функция ξ). Система (2.2) описывает процесс распространения трещины и изменения давления газа в зависимости от деформации трещины. Уравнения (2.3) связаны с пересчетом эйлеровой системы координат (r, t) в подвижную (ξ, t) .

Введем сеточные функции p_k^m, W_k^m, R^m , соответствующие функциям p, W, R в узле (ξ_k, t^m) , и $p_{k+1/2}^m, W_{k+1/2}^m$ в узле $(\xi_{k+1/2}, t^m)$. Аппроксимируем значения сеточных функций в полудельных узлах по формуле $A_{k+1/2}^m = 0,5(A_{k+1/2}^m + A_k^m)$.

Используя интегроинтерполяционный метод [10], из дифференциальных уравнений (2.1)–(2.3) получаем неявную разностную схему на трех дробных шагах:

1) $t^m \leq t < t^m + \tau/3$

$$(2.4) \quad W_k^{m+1/3} = W_k^m, \quad R_k^{m+1/3} = R_k^m, \\ \frac{p_k^{m+1/3} - p_k^m}{\tau} - \frac{1}{W_k^{m+1/3} \xi_k^n} \Lambda_k \{ \xi^n W^3 p \Lambda_{k-1} p \}^{m+1/3} = 0;$$

2) $t^m + \tau/3 \leq t < t^m + 2\tau/3$

$$(2.5) \quad W_k^{m+2/3} = W_k [p^{m+2/3}], \quad R_k^{m+2/3} = R [p^{m+2/3}], \\ p_k^{m+2/3} W_k^{m+2/3} R_k^{m+2/3} = p_k^{m+1/3} W_k^{m+1/3} R_k^{m+1/3};$$

3) $t^m + 2\tau/3 \leq t < t^{m+1}$

$$W_k^{m+1} = W_k^{m+2/3}, \quad R_k^{m+1} = R_k^{m+2/3}, \\ \frac{p_k^{m+1} - p_k^{m+2/3}}{\tau} - \frac{\xi_k}{R_k^{m+1} W_k^{m+1}} \left(\frac{R_k^{m+1} - R_k^m}{\tau} \right) \Lambda_k \{ Wp \}^{m+1} = 0.$$

Здесь $A_k^{m+p/3}$ ($p = 1, 2, 3$) — сеточная функция, полученная в результате выполнения p дробного шага; $\Lambda_k \{ A \}^m = (A_{k+1}^m - A_k^m)/h$.

Вычисление интегралов (1.7), (1.8) проводилось по формуле трапеций. При этом профиль трещины определялся выражением

$$(2.6) \quad W_k^m = \frac{2N}{\pi \ln(2\sqrt{e}N/\pi)} \sum_{j=k}^{M-1} h(Q_n)_{k,j+1/2} [p_{j+1/2}^m - N^{-1}],$$

где $l \leq k \leq M$ и $l = \lceil g(t)/h \rceil$ ($\lceil z \rceil$ — целая часть z). Индекс l характеризует координату границы полости ξ_l на сетке ω , из которой выходит трещина, в момент времени t . Координата ξ_l изменяется с ростом трещины, при этом трещина остается неподвижной относительно системы координат (ξ, t) .

Ядро Q_n не зависит от времени и матрица $(Q_n)_{kj}$ (размера $M \times M$, M — число узлов сетки) вычисляется по формуле (1.11) только один раз.

Длина трещины на $m + 1$ -м слое времени определяется из условия (1.8)

$$\int_{\alpha^{m+1} g^m}^{\alpha^{m+1}} \frac{\xi^n [p^{m+1} - N^{-1}] d\xi}{V[\alpha^{m+1}]^2 - \xi^2} = 0.$$

Параметр α^{m+1} находится итерациями из (2.6). Затем определяется длина трещины $R^{m+1} = \alpha^{m+1} R^m$ на $m + 1$ -м слое времени.

При численном решении проверялся баланс массы

$$M_0(t) = 2^{n+3} \pi^{n-1} G^{-1} (1 - v) L^{n+2}(t) \int_{g(t)}^1 \int_{g(t)}^1 \times \\ \times d\xi d\eta \xi^n \eta^n Q_n(\xi, \eta) p(\xi, t) [p(\eta, t) - N^{-1}]$$

($M_0(t)$ — масса вышедшего из полости газа).

Объем трещины в момент времени t определяется интегралом

$$v(t) = 2^{n+3} \pi^{n-1} G^{-1} (1 - v) L^{n+2}(t) \int_{g(t)}^1 d\xi \psi_n(\xi) [p(\xi, t) - N^{-1}],$$

где $\psi_n(\xi) = \int_{g(t)}^1 d\eta Q_n(\xi, \eta) \eta^n \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sqrt{1 - \xi^2}$

при $g(t) \rightarrow 0$.

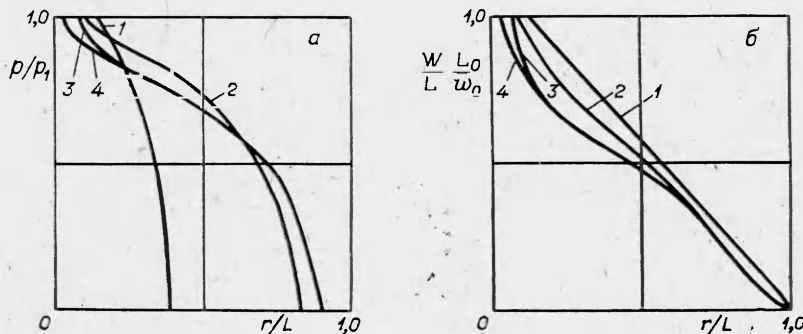
Автомодельные решения задачи движения газа по магистральной трещине (1.1)–(1.4) — стационарные решения системы уравнений (1.6)–(1.8) и могут быть получены методом установления.

3. Результаты и обсуждение. В результате численного решения получены профили давления газа в трещинах, длина и раскрытие трещин в зависимости от времени.

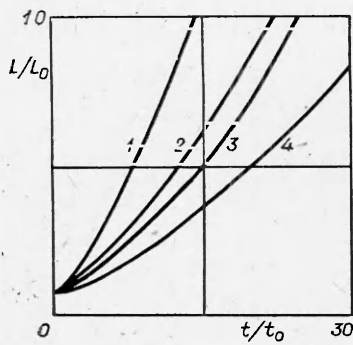
На рис. 1, а, б приведена зависимость давления газа и профиля трещины от координаты при $t = 0,1; 2,5; 10; 15$ (кривые 1–4) для осесимметричного случая ($n = 1$) при следующих параметрах: $p_2(t) = p_0$, $p_1/p_0 = 0,01$, $\delta = r_0/L_0 = 0,1$, $N = 4$, $W_1(\xi) = 1 - \xi$ ($\delta \leq \xi \leq 1$). Видно, что профили давления газа и раскрытия трещины при $t \gg t^*$ (t^* — время начала движения трещины) зависят только от ξ . Это связано с тем, что система газ — трещина с течением времени забывает начальные условия и асимптотически выходит на автомодельный режим с переменной $\xi = r/L(t)$.

На рис. 2 показана зависимость длины распространяющейся трещины ($n = 1$) от времени. Линии 2, 4 соответствуют $N = 3$ ($\delta = 0,5; 0,1$), 1, 3 — $N = 4$ ($\delta = 0,5; 0,1$).

Динамику системы газ — трещина можно условно описать тремя стадиями: первая при $t \in (0, t^*)$ характеризуется движением газа по неподвижной деформирующейся трещине, на второй ($t > t^*$) происходит развитие трещины под действием движущегося в ней газа, на третьей



Р и с. 1



Р и с. 2

($t \gg t^*$) система газ — трещина выходит на автомодельную асимптотику. Проведенные расчеты показали, что длина трещины как функция времени аппроксимируется формулой ($\tilde{t} \gg t^*$)

$$(3.1) \quad L(t) \simeq L(\tilde{t}) \exp \{ \beta(\tilde{t} - \tilde{t}) \}.$$

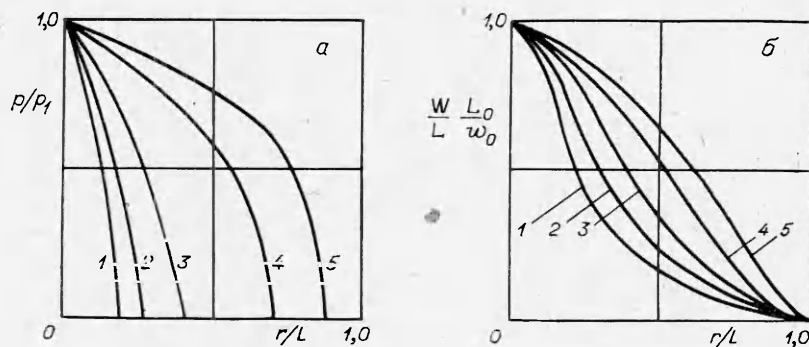
Зависимость (3.1) следует из автомодельной постановки задачи ($\tilde{t} = 0, r_0 = 0$).

Параметры автомодельных асимптотик для различных значений N и n приведены в таблице, где ξ_* — координата фронта газа. При автомодельном движении ($R(t) = \exp \{ \beta t \}$) переменная определяется выражением

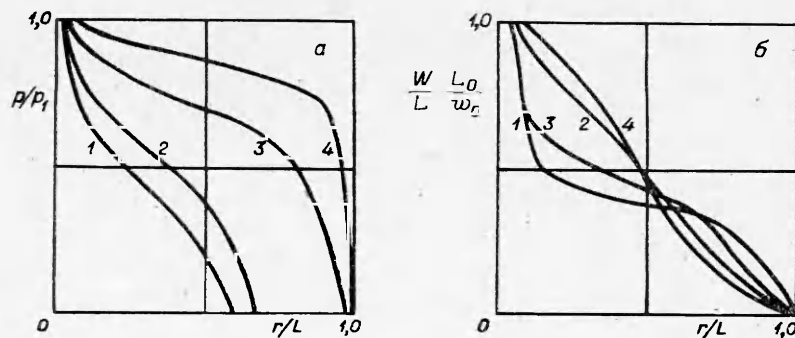
$\xi = r / \exp \{ \beta t \}$. Профили давления газа и раскрытия трещин при этом для плоского случая показаны на рис. 3, а, б ($N = 17; 10; 5; 2; 1,5$, кривые 1—5), для осесимметричного — на рис. 4, а, б ($N = 17; 10; 3; 1,5$, кривые 1—4).

Отметим, что единственный определяющий параметр автомодельных задач ($n = 0, n = 1$) — отношение давления газа к горному давлению. При $1 \leq N \leq 1,5$ профили давления газа и раскрытия трещин как функции координат и времени близки к результатам, полученным при решении задач гидроразрыва [1, 2, 4]. С ростом N на процесс движения начинает влиять сжимаемость газа, что приводит к резкому падению давления вблизи начала координат.

Рассмотрим задачу распространения трещины из полости, заполненной газом. Квазистатическое решение задачи о движении газа из подземной полости по развивающейся трещине применимо в случае, когда на момент окончания динамической стадии взрыва давление газа в полости превышает литостатическое давление породы. Под действием избыточного давления газ проникает в магистральную трещину и создаются условия для ее деформации и развития.



Р и с. 3



Р и с. 4

N	n = 0			n = 1		
	β	ξ_*	W(0)	β	ξ_*	W(0)
1,5	0,17	0,94	1,00	0,015	0,99	1
2,0	0,28	0,86	1,00	0,034	0,98	1
3,0	0,72	0,68	1,00	0,054	0,93	1
4,0	1,30	0,55	1,00	0,092	0,87	1
6,0	3,20	0,40	1,01	0,140	0,78	1
10,0	10,0	0,26	1,02	0,230	0,69	1
17,0	31,0	0,16	1,04	0,410	0,58	1

В качестве граничного используем условие утечки газа из полости

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} M_{\Pi} \Big|_{r=r_0} = -S \rho u \Big|_{r=r_0}.$$

Здесь $M_{\Pi} = 4/3\pi r_0^3 \rho$ — масса газа в полости; r_0 — радиус полости; $S = 2\pi r_0 w$ — поверхность утечки газа из подземной полости.

В безразмерных переменных (1.5) уравнение (3.2) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \kappa R(t) W^3(t, \xi) p \frac{\partial}{\partial \xi} p, \quad \xi = g(t),$$

где $\kappa = \frac{6(1-\nu)}{\pi} \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^2 \frac{p_{\gamma}}{G} \ln(2\sqrt{e} N/\pi)$ — коэффициент утечки.

На рис. 5, а, б представлены зависимости давления газа и профиля раскрытия трещин от координаты ξ при $t = 9,5; 50; 200$ (кривые 1–3) ($N = 2, n = 1, p_1/p_0 = 0,01, \delta = r_0/L_0 = 0,1, \kappa = 0,1$). В этом случае система газ — трещина не имеет автомодельной асимптотики.

Рассмотрим влияние параметров N, κ, δ на движение газа из подземной полости по трещине и определим их характерные значения. Изучение величины давления газа на момент окончания динамической стадии расширения полости проведено в [11]:

$$N = p_0/p_{\gamma} = k,$$

k — коэффициент, зависящий от свойств среды и изменяющийся от 1,3 до 2,3 (например, для гранита $k = 2,1$) [11].

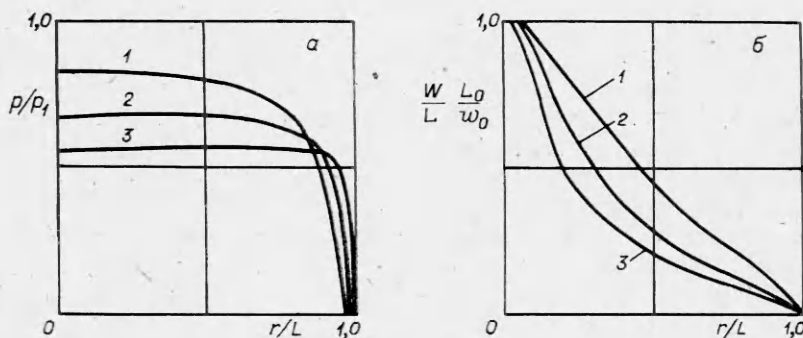
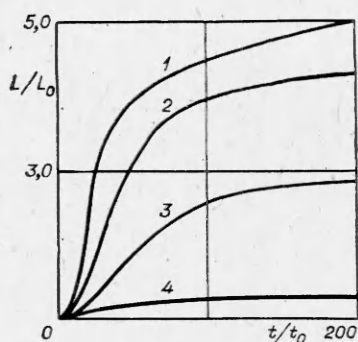


Рис. 5



Р и с. 6

На рис. 6 показано влияние параметров κ и δ на развитие трещины во времени. Кривые 1, 3 соответствуют $\kappa = 0,1$ ($\delta = 0,5; 0,1$), 2, 4 — $\kappa = 0,2$ ($\delta = 0,5; 0,1$). Развитие трещины определяется отношением p к p_γ .

Отношение радиуса полости к начальной длине магистральной трещины зависит от свойств среды, в которой образовалась полость [12]:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\sigma_*}{2\sigma_0} \left[\frac{E}{\sigma_* (q+1)} \right]^{q+1}}, \quad q = \frac{2-\Lambda}{1+\Lambda}$$

где Λ — скорость дилатансии (для несжимаемой среды $\Lambda = 0$, $q = 2$); σ_* — прочность на сжатие; σ_0 — прочность на разрыв; E — модуль Юнга.

При малых δ давление газа в полости может уменьшиться настолько, что рост трещины не начнется. На развитие трещины существенное влияние оказывает отношение максимальной величины раскрытия предельно-равновесной трещины к ее длине ($W(\xi = g(t), t) \approx 1$):

$$\frac{w_0}{L_0} = 3 \frac{\kappa}{\delta^2} = \frac{2(1-\nu)}{\pi} \frac{p_\gamma}{G} \ln(2 \sqrt{e} N/\pi).$$

При больших значениях w_0/L_0 (это возможно для пород с малыми модулями сдвига при большом p_γ) давление газа в полости из-за утечки может уменьшиться до значений, при которых развитие трещины не произойдет. Расчеты показали, что при $\kappa \geq 0,2$, $\delta \leq 0,1$ роста трещины нет, а при $\kappa < 0,2$ или $\delta > 0,1$ происходит развитие трещины, которое с течением времени замедляется до полной остановки.

Авторы благодарят В. М. Ентова за замечания, способствующие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5.
2. Желтов Ю. П. Деформации горных пород. — М.: Недра, 1966.
3. Pitts J. H., Brandt H. Gas flow in a permeable earth formation containing a crack. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, N 4.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. — ПММ, 1956, т. 20, с. 475.
5. Зазовский А. Ф. Развитие дискообразной трещины гидроразрыва в мощном, насыщенном жидкостью пласте. — Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 5.
6. Nilson R. H. Gas-driven fracture propagation. — J. Appl. Mech., 1981, v. 48, N 4.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. — М.: ИЛ, 1955.
8. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 2.
9. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
11. Butkovich T. R. The gas equation of state of natural materials. — UCRL — 14729.
12. Родионов В. Н., Адушкин В. В., Костюченко В. Н. и др. Механический эффект подземного взрыва. — М.: Недра, 1971.

Поступила 21/VI 1985 г.